

מתמטיקה - תוכנית הלימודים לכיתה ט' הנחיות כלליות

עקרונות:

- א. לימודי המתמטיקה בכיתה ט חותמים את לימודי המתמטיקה בחטיבת הביניים, ומשלימים את הנחת התשתית לקראת לימודי המתמטיקה בתיכון.
- ב. הגישה בכיתה ט היא פורמאלית יותר מאשר בכיתות ז-ח, ויחד עם זאת מקפידה על שימור איזון בין גישה אינטואיטיבית ופיתוח יכולות טכניות.
- ג. בלימודי **הגיאומטריה** התלמידים לומדים לראשונה להוכיח משפטים במסגרת היסקית המושתתת על הנחות יסוד והגדרות. במסגרת זו הם גם לומדים להתנסח באופן פורמאלי.
- ד. בלימודי **האלגברה** יש להתייחס לנקודות הבאות:
 1. יש להדגיש את כוחה של האלגברה כאמצעי להסבר של תופעות מספריות ולהכללה של חוקים מתמטיים.
 2. יש להדגיש את אופן השימוש בסמלים אלגבריים בתיאור מבני של תופעות מתמטיות, ובמידול של בעיות. יש לדון באופן שבו בחירת המשתנים משפיעה על יכולתנו להבין אותן תופעות ולפתור אותן בעיות.
 3. יש לעסוק באלגברה כתחום מתמטי שבו מוכיחים משפטים על סמך נתונים, כללי היסק ויישום של חוקים אלגבריים.
- ה. בכל מקום שבו זה אפשרי יש לשוב ולתרגל נושאי תוכן משנים קודמות.
- ו. משימות אורייניות ועיבוד נתונים ישולבו בכל פרק לימוד שבו זה אפשרי.

מבנה התוכנית:

- א. תוכנית הלימודים לכיתה ט נחלקת לשני תחומים: אלגברה (כולל הסתברות) וגיאומטריה. יש ללמד שני תחומים אלה במקביל.
- ב. סדר הפרקים כפי שמופיע בכל תחום בתוכנית הלימודים אינו מחייב, ובלבד שיישמר מבנה קדימויות לוגי.
- ג. תוכנית זו מוגשת בהיקף ובהעמקה התואמים את הנדרש מתלמידי הקבצות א.
- ד. החלקים המסומנים באפור מיועדים לתלמידים מתקדמים.

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

סדר הנושאים המומלץ ומספר שעות הלימוד:

מספר שעות	אלגברה (כולל הסתברות)
20	חזקות ושורשים
15	הסתברות
20	טכניקה אלגברית
30	פונקציות ריבועיות
5	שימושים באלגברה
90	סך הכל
	גיאומטריה
10	דלתון ומשולש שווה שוקיים
12	בניות בסיסות
8	ישרים מקבילים וטרפז
10	מקבילית, ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיה
8	מלבן, ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיו
4	הוכחה על דרך השלילה
8	מעוין וריבוע
60	סך הכל

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

תחום אלגברי והסתברות

1. חזקות ושורשים (20 שעות)

א. חזקות עם מעריך טבעי

פרק החזקות הנלמד בכיתה ט הוא הרחבה של פרק החזקות הנלמד בכיתה ז, והוא משלב נושאים נוספים שנלמדו בעבר (למשל זיהוי חוקיות, גיאומטריה, גרפים ופונקציות). פרק זה מניח בסיס ללימוד עתידי של הפונקציה המעריכית, סדרות הנדסיות, טכניקה אלגברית וחקר תופעות של גדילה ודעיכה. לימוד חזקות הוא הזדמנות להפגיש תלמידים עם פונקציות שאינן ליניאריות ושאינן ריבועיות.

חזקה (שבה המעריך הוא מספר טבעי) היא כפל חוזר: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}}$

לפרמטר a קוראים **בסיס החזקה**, ולפרמטר n קוראים **מעריך החזקה**

בפרט, מגדירים: $a^1 = a$

דגשים:

1. מומלץ לדעת בעל-פה חזקות ריבועיות מ- 1^2 ועד 20^2 וחזקות של 2 עד 2^{10} .
2. יש לחזור ולתרגל את סדר פעולות החשבון בביטויים שבהם יש חזקות, כפל, חילוק, חיבור וחסור.
3. יש לשלוט בכתיבה מדעית של מספרים גדולים באמצעות חזקות של 10.
4. כאשר בסיס החזקה הוא מספר שלילי אזי הביטוי הוא חיובי אם מעריך החזקה הוא זוגי ושלילי אם מעריך החזקה הוא אי-זוגי.
5. יש להכיר ולשלוט בחוקי החזקות כשהמעריכים הם מספרים טבעיים, ולדעת לנמק אותם בהסתמך על חוקי החילוף והקיבוץ של הכפל והחילוק. רשימת החוקים שיש להכיר היא:

$$a^n \cdot a^k = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ פעמים}} = a^{n+k}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ פעמים}}} = a^{n-k} \quad (n > k, a \neq 0)$$

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{k \text{ פעמים}} = a^{nk}$$

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ פעמים}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}} \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ פעמים}} = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}}}{\underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ פעמים}}} = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

6. אם בסיס החזקה הוא מספר הגדול מ-1 ומעריך החזקה הוא מספר טבעי הגדול מ-1, אזי הביטוי גדול מבסיס החזקה.
- אם בסיס החזקה הוא מספר בין 0 ל-1 ומעריך החזקה הוא מספר טבעי הגדול מ-1, אזי הביטוי קטן מבסיס החזקה.
7. יש לשלב חזקות בביטויים מספריים ובביטויים אלגבריים.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

8. יש ללמוד להציג מספר טבעי כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים.
9. יש להכיר את הגרף של הפונקציה: $y = a^n$ (n טבעי, $a > 0$) להבין את ההבדל בקצב הגדילה בין גרפים בעלי בסיסי חזקה שונים. בפרט, יש להבין את ההבדל בין גידול ליניארי וגידול מעריכי באמצעות דוגמאות מספריות. יש לדון בקושי שבחלוקת הציר לשנתות בשרטוט גרף של פונקציה מעריכית.
10. יש לבטא יחידות מידה שונות באמצעות כתיב חזקות.

ב. הרחבת מושג החזקה למעריכים שהם אפס ומספרים שליליים שלמים

$$(a \neq 0) \quad a^0 = 1, \quad (a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

דגשים:

1. יש להציג חזקות עם מעריך שהוא אפס ועם מעריכים שהם מספרים שליליים שלמים בכמה אופנים, באופן שיבהיר את המניע להגדרות אלה. למשל:
א. באמצעות התבוננות בסדרת השוויונות:

$$\begin{array}{rcl} 2^4 = 16 & & \\ & \swarrow :2 & \\ 2^3 = 8 & & \\ & \swarrow :2 & \\ 2^2 = 4 & & \\ & \swarrow :2 & \\ 2^1 = 2 & & \\ & \swarrow :2 & \\ 2^0 = 1 & & \\ & \swarrow :2 & \\ 2^{-1} = \frac{1}{2} & & \end{array}$$

- ב. באמצעות התבוננות בזהות $a^{n-k} = \frac{a^n}{a^k}$. זהות זו מוכרת כבר בעבור $k > n$. עתה, אם נציב $n = k$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad \text{נקבל } a^0 = 1 \text{ ואם נציב } n = 0 \text{ נקבל}$$

2. יש להוכיח, לאור ההגדרות לעיל, שחוקי החזקות נשארים תקפים גם בעבור מעריכים שליליים ואפס (אין חובה לכסות את כל המקרים).
3. יש לשלוט בכתיבה מדעית של מספרים (חיוביים) קטנים.
4. 0^n שווה לאפס בעבור כל n טבעי.
 0^n אינו מוגדר בעבור $n < 0$, עובדה המתקשרת להיעדר הגדרה של חילוק באפס.
 0^n אינו מוגדר בעבור $n = 0$ אבל אין בשלב זה כלים לנמק זאת.
5. יש לקשר בין חזקות שבהן המעריך הוא מספר שלילי לבין יחידות מידה, וקצבי דעיכה, ויש לפתח בתלמידים תובנה מספרית לדעיכה מעריכית.
6. יש לשלב חזקות בביטויים מספריים ובביטויים אלגבריים.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ג. שורשים ריבועיים

פרק זה הוא המשך לפרק על שורשים ריבועיים הנלמד בכיתה ח, והוא מהווה הכנה ללימוד המשוואה הריבועית. לכל מספר a שאינו שלילי, $s = \sqrt{a}$ הוא המספר היחיד המקיים $s \geq 0$ ו- $s^2 = a$.

דגשים:

1. שורש ריבועי של מספר שקטן מאפס אינו מוגדר.
2. יש ללמוד לחשב שורש ריבועי באמצעות מחשבון ולהבחין בין הערך המקורב המתקבל לבין הערך האמיתי.
3. מהגדרת השורש הריבועי נובע כי: $\sqrt{a^2} = |a|$ לכל a ו- $(\sqrt{a^2}) = a$ לכל $a \geq 0$
4. יש להכיר את הזהויות: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)
 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a, b > 0$), $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$ ($a \geq 0, k$ טבעי)
 ולדעת לבסס אותן על חוקי חזקות. הזהות הראשונה, למשל, מבוססת על השוויון $(xy)^2 = x^2 y^2$ כך:
 $(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$
5. יש ללמוד להשתמש במשפט פיתגורס כדי לתת ייצוג גאומטרי לשורשים ריבועיים, למשל לבנות קטעים באורכים $\sqrt{7}, \sqrt{6}$.

2. הסתברות (15 שעות)

מבוא

1. הסתברות היא תחום תוכן העוזר בקבלת החלטות מושכלות. לעתים קרובות אדם נאלץ לקבל החלטות בתנאי חוסר וודאות, ושיקולים הסתברותיים עוזרים לשקלל סיכויים וסיכונים לקבלת החלטות מיטביות.
 2. בכיתה ח למדו התלמידים את המשמעות של ההסתברות הן כמדד למידת ההיתכנות שאדם מייחס להתרחשות מאורע, והן כשייכות היחסית של המאורע כשחוזרים על אותו הניסוי מספר רב של פעמים. הם למדו לחשב הסתברויות של מאורעות בניסויים שבהם קיימת סימטריה ניכרת לעין בין כל תוצאות הניסוי, ולכן מניחים שכל התוצאות הן שוות הסתברות.
 3. התכנים המרכזיים הנוספים בכיתה ט הם:
 - א. הסתברות מותנית: כשנוסף מידע חלקי על תוצאת הניסוי אזי ההסתברות המיוחסת למאורע יכולה להשתנות.
 - ב. מושג האי-תלות והשימוש בו בחישוב הסתברויות.
 - ג. חישוב הסתברויות של איחוד וחיתוך של כמה מאורעות במקרים שבהם הנתונים מאפשרים זאת (מאורעות זרים, מאורעות בלתי תלויים, או מאורעות תלויים שבהם אפשר לחשב הסתברות מותנית).
- מטרת הלימוד היא פיתוח אינטואיציה להתניה ואי-תלות, לצד המשך פיתוח יכולת החישוב. יש לגשת לפתרון שאלות בדרך אינטואיטיבית, ולהימנע מהצבה מכנית בנוסחאות.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

א. הסתברות מותנית

הסתברות משקפת את מידת ההיתכנות שאדם מייחס להתרחשות מאורע כשהוא מנצל באופן מושכל את מלוא המידע שברשותו. ההסתברות להתרחשות מאורע יכולה להשתנות כשהמידע שבידי האדם משתנה. להסתברות של מאורע כשידוע שמאורע אחר התרחש קוראים **הסתברות מותנית**.

דגשים:

- יש להציג מגוון של דוגמאות שבהן שינוי במידע משנה את ההסתברות המיוחסת להתרחשות מאורע. בשלב ראשון על העיסוק להיות איכותני, ולהסתפק בקביעה אם המידע הנוסף הגדיל, הקטין או לא שינה את ההסתברות.
- תוספת של מידע מצמצמת את התוצאות האפשריות שלהן אפשר לצפות, וכתוצאה מכך יש לשקלל מחדש את ההסתברויות שמיוחסות למאורעות שונים. אפשר להדגים תופעה זו באמצעות שכיחויות יחסיות. למשל: אם מטילים קובייה מספר רב של פעמים, השכיחות היחסית של התוצאה "4" תהיה קרובה ל- $1/6$. אבל אם נתבונן רק באותן הטלות שבהן תוצאת ההטלה הייתה זוגית, הרי שהשכיחות היחסית של התוצאה "4" תהיה קרובה ל- $1/3$. מכאן שההסתברות לתוצאה "4" היא $1/6$, אבל אם ידוע מראש שהתוצאה היא זוגית אזי ההסתברות לתוצאה "4" היא $1/3$. במקרה זה נאמר: ההסתברות המותנית של התוצאה "4" כשידוע שהתוצאה היא זוגית היא $1/3$.
- יש לתרגל מגוון של דוגמאות שבהן אפשר לחשב באופן כמותי את השתנות ההסתברות כתוצאה ממידע נוסף.

ב. הסתברות של שני מאורעות

דגשים:

- אם השכיחות היחסית של מאורע אחד (כשחוזרים על אותו הניסוי מספר רב של פעמים) היא a, ומבין כל הפעמים שבהם התקיים מאורע זה השכיחות היחסית של מאורע אחר היא b, אזי השכיחות היחסית של הפעמים שבהם התקיימו שני המאורעות יחדיו היא המכפלה ab. (יש לקשר בין עובדה זו ובין המשמעות של כפל שברים קטנים מ-1).
- מסעיף 1 נובע כי ההסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו שווה למכפלת ההסתברות שהמאורע הראשון התרחש בהסתברות שהמאורע השני התרחש, כשזו מותנית בכך שהמאורע הראשון התרחש.
- יש ללמוד לחשב על סמך סעיף 2 את ההסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו.
- יש ללמוד למדל ולארגן נתונים הסתברותיים באמצעות מודלים כדוגמת עץ ושטח, וללמוד להשתמש במודלים מגוונים לפתרון בעיות.
- ההסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו אינה יכולה להיות גדולה מההסתברות הנפרדת של כל מאורע. יש לנמק עובדה זו הן באמצעות שיקולים אינטואיטיביים, והן בהסתמך על הקשר שבין הסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו והסתברות מותנית.

ג. הסתברות של מאורעות זרים, הסתברות של מאורעות בלתי תלויים והסתברות של מאורעות תלויים

דגשים:

- שני מאורעות הם **זרים** אם לא ייתכן ששניהם יתרחשו יחדיו.
- שני מאורעות הם **בלתי תלויים** אם הידיעה על התרחשות האחד אינה משנה את ההסתברות להתרחשות האחר. שני מאורעות שאינם בלתי תלויים נקראים **תלויים**.
- במצבים שבהם האקראיות של שני מאורעות היא ממקורות שונים המאורעות הם בלתי תלויים.
- אם שני מאורעות הם זרים אזי ההסתברות שהאחד יתרחש כשידוע שהאחר התרחש היא אפס. מכאן נובע ש:
א. המאורעות תלויים, כלומר הידיעה מראש שהאחד התרחש משפיעה על ההסתברות להתרחשותו של

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

האחר

ב. ההסתברות ששניהם יתרחשו יחדיו היא אפס.

5. אם שני מאורעות הם בלתי תלויים אזי ההסתברות שהאחד יתרחש כשידוע מראש שהאחר התרחש שווה להסתברות שהוא יתרחש גם ללא המידע על התרחשות המאורע האחר. נובע מכאן שההסתברות ששניהם יתרחשו יחדיו היא מכפלת ההסתברויות שלהם.

6. אם שני מאורעות הם זרים אזי ההסתברות שלפחות אחד מהם יתרחש היא סכום ההסתברויות שלהם. אם שני מאורעות אינם זרים אזי ההסתברות שלפחות אחד מהם יתרחש קטנה מסכום ההסתברויות שלהם.

7. הסתברות שלפחות אחד משני מאורעות יתרחש אינה יכולה להיות קטנה מההסתברות הנפרדת של כל אחד מהם.

8. יש לתרגל תכנים אלה באמצעות דוגמאות מחיי יומיום.

9. אפשר להרחיב תכונות אלה בעבור יותר משני מאורעות, ובפרט בעבור ניסויים חוזרים בלתי תלויים.

3. טכניקה אלגברית (20 שעות)

א. נוסחאות הכפל (מכפלת דו איבר בדו איבר):

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

פתיחת סוגריים, פירוק לגורמים ופתרון משוואות ריבועיות באמצעות השלמה לריבוע

נוסחאות הכפל הן מרכיב חשוב בטכניקה אלגברית ואריתמטית. נוסחאות אלה משמשות את התלמידים בפירוק לגורמים, בחקר של תופעות מספריות ובפתרון משוואות ריבועיות.

דגשים:

1. יש לפתח את נוסחאות הכפל באמצעים אלגבריים, ולהדגים אותן באמצעים גיאומטריים (בעבור מספרים חיוביים).

2. יש להרגיל את התלמידים להשתמש בנוסחאות הכפל בשני אופנים: בפתיחת סוגריים ובפירוק לגורמים.

3. יש ללמוד להשתמש בנוסחאות הכפל בפתרון בעיות חשבוניות, כולל בחישוב מנטאלי. וכן יש להראות כיצד שימוש בסמלים אלגבריים מקנה שיטות מהירות ויעילות לביצוע חישובים אריתמטיים.

4. יש ללמוד לצמצם שברים אלגבריים באמצעות פירוק לגורמים ובאמצעות נוסחאות הכפל.

5. אם $a^2 = b^2$ אזי $a = b$ או $a = -b$. אפשר להסיק זאת מהזהות הבאה: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 0$

6. א. יש להראות כיצד פיתוח הביטוי $(a - b)^2$ נובע מהצגתו כ- $(a + (-b))^2$.

ב. יש להראות כיצד פיתוח הביטוי $(a - b)^3$ נובע מהצגתו כ- $(a + (-b))^3$.

7. יש ללמוד להשלים תלת איבר $x^2 + bx + c$ לריבוע.

8. יש ללמוד לפתור משוואות ריבועיות באמצעות ההשלמה לריבוע שבסעיף 7.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ב. פירוק של תלת-איבר ריבועי (טרינום ריבועי) $x^2 + bx + c$ ופתרון משוואות ריבועיות

המטרה בסעיף זה היא ללמוד לפרק תלת-איבר ריבועי למכפלה של דו-איברים ליניאריים במקרים שבהם זה אפשרי. פירוק זה שימושי בפתרון משוואות ריבועיות ובצמצום שברים. שימו לב: הביטוי $x^2 + bx + c$ ייחשב תלת איבר ריבועי גם אם b ו/או c שווים לאפס.

דגשים:

1. נוסחאות הכפל הן מקרה פרטי של פירוק תלת-איבר.
2. כהטרמה לפירוק תלת-איבר כדאי לעסוק בפירוק לפי קבוצות (ראו דוגמה 1 בנספח). יש לעסוק בדוגמאות שבהן המקדם של האיבר הריבועי הוא 1.
3. בשלב זה, פירוק של תלת-איבר מבוסס על ניסוי וטעייה, שבו יש למצוא שני מספרים שסכומם b ומכפלתם c . בהמשך תילמד דרך המבוססת על נוסחת השורשים.
4. פירוק תלת-איבר משמש בפתרון משוואות ריבועיות. יש להרגיל את התלמידים לבדוק את נכונות הפתרונות באמצעות הצבה.
5. פירוק לגורמים שימושי בצמצום שברים אלגבריים וכן בכפל או בחילוק של שברים אלגבריים.
6. יש לעסוק במשוואות רציונליות שאפשר לפתור באמצעות פירוק המכנה לגורמים.
7. תחומי הצבה של שברים אלגבריים יכולים להשתנות כתוצאה מצמצום השבר. יש ללמד את התלמידים שתחום ההצבה נקבע על פי הביטוי המקורי. יש ללמוד להבחין בהבדלים בין הביטוי המקורי ובין הביטוי המצומצם באופן גרפי, ולהבליט הבדלים אלה אם הם אינם נראים לעין.

4. פונקציות ריבועיות (30 שעות)

א. הפונקציה $f(x) = x^2$ והייצוג הגרפי שלה

דגשים:

1. סעיף זה הוא הכנה ללימוד פונקציה ריבועית כללית.
2. יש לשרטט את גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ באמצעות טבלת ערכים והשלמה מקורבת לעקום רציף. צורת הגרף מכונה **פרבולה**.
3. יש לקשר בין הסימטריה השיקופית של הפרבולה ובין ביטוי האלגברי: $f(-x) = f(x)$.
4. ראשית הצירים היא נקודת המינימום של הגרף, והיא מכונה **קדקוד הפרבולה**. הקדקוד ממוקם על ציר הסימטריה, שהוא ציר y .
5. יש לפתור משוואות מהצורה $x^2 = m$ באמצעים אלגבריים וגרפיים (מפגש של פרבולה עם קו אופקי). במקרים שבהם m הוא שלילי, יש לקשור את היעדר הפתרון להיעדר נקודת חיתוך בין הגרפים ולהיעדר שורש למספר שלילי.
6. יש ללמוד באילו תנאים יש למשוואה מהצורה $x^2 = m$ שני פתרונות, באילו תנאים יש לה פתרון אחד, ובאילו תנאים אין לה פתרון כלל.
7. גרף הפונקציה יורד בתחום $x < 0$ ועולה בתחום $x > 0$.
8. בעבור x חיובי, קצב הגידול של הפונקציה גדול יותר ככל ש- x גדול יותר. אפשר לראות זאת באמצעות חישובים מספריים (הפרשים בין ערכי הפונקציה בעבור ערכים שהפרשם שווה: 1, 2, 3 וכו') ובאמצעות הייצוג הגרפי.
9. מידת ההשתנות של y כש- x גדל בתוספת קבועה אינה אחידה להבדיל מבפונקציה קווית.

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ב. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2$ כאשר $a \neq 0$ - מתיחה, כיווץ ושיקוף

דגשים:

1. יש לשרטט את הגרף של הפונקציה $f(x) = ax^2$ בעבור כמה ערכים של a בתחומים $a < 0$, $0 < a < 1$, $a > 1$ באמצעות טבלת ערכים והשלמה מקורבת לעקום רציף. כל הגרפים הללו הם **פרבולות**.
2. ציר y הוא ציר הסימטריה של כל הפרבולות מצורה זו.
3. הגרפים של הפונקציות $f(x) = ax^2$ ו- $f(x) = -ax^2$ הם סימטריים ביחס לציר ה- x .
4. הראשית היא הקדקוד של כל הפרבולות הללו. היא נקודת מינימום כש- $a > 0$ ונקודת מקסימום כש- $a < 0$.
5. יש לשרטט על אותה מערכת צירים כמה פרבולות מהצורה $y = ax^2$ במטרה לראות כיצד שינוי בערך של a מתבטא במתיחה או כיווץ אנכיים של הפרבולה.
6. יש לפתור משוואות מהצורה $ax^2 = m$ או $ax^2 = bx^2$ באמצעים גרפיים ואלגבריים.

ג. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + c$ כאשר $a \neq 0$ - הזזות אנכיות

דגשים:

1. יש לשרטט גרפים של פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + c$ בעבור ערכים שונים של a ו- c . מכיוון שגרפים אלה הם הזזות של הגרף $f(x) = ax^2$ גם הם **פרבולות**.
2. הגרף של הפונקציה $f(x) = ax^2 + c$ מתקבל מהגרף של הפונקציה $g(x) = ax^2$ על ידי הזזה אנכית של כל נקודה בשיעור קבוע, c .
3. ציר y הוא ציר הסימטריה של כל הפרבולות מצורה זו. הקדקוד ממוקם בנקודה $(0, c)$.
4. קצב השינוי של הפונקציה $f(x) = ax^2 + c$ בתחום נתון אינו תלוי בערך של הפרמטר c .
5. יש לפתור משוואות מהצורה $ax^2 + c = m$ באמצעים אלגבריים ובאמצעות זיהוי נקודות חיתוך של גרפים של שתי פונקציות (פרבולה וישר מקביל לציר ה- x). כמו כן יש ללמוד להסביר באמצעים אלגבריים וגרפיים באילו מקרים יש למשוואה מהצורה $ax^2 + c = m$ שני פתרונות, באילו מקרים יש לה פתרון יחיד, ובאילו תנאים אין לה כלל פתרון.
6. יש לעסוק בתחומי החיוביות/שליליות של פונקציות מסוג זה בעבור מגוון הסימנים האפשריים של הפרמטרים a ו- c .

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ד. הרכבה של הזזות אופקיות, אנכיות, מתיחה וכיווץ של הפונקציה $f(x) = x^2$
פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא:
 $t(x) = a(x - p)^2 + k$, $m(x) = a(x - p)^2$, $g(x) = (x - p)^2$ (כאשר $a \neq 0$)

דגשים:

1. יש לשרטט גרפים של פונקציות מהצורה $g(x) = (x - p)^2$ בעבור ערכים שונים של p . הפרבולה המתאימה לפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ מתקבלת מהזזה אופקית של הפרבולה $f(x) = x^2$ ב- p יחידות. מכיוון שגרפים אלה מתקבלים מהזזות של הגרף $f(x) = x^2$ גם הם פרבולות.
2. ציר הסימטריה של גרף הפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ הוא $x = p$ והקדקוד ממוקם בנקודה $(p, 0)$.
3. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2$ מתקבלות מהזזה אופקית של הפרבולה $y = ax^2$ או ממתיחה של הפרבולה $y = (x - p)^2$.
4. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אנכית של הפרבולה $y = a(x - p)^2$.
5. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אופקית, שאחריה מתיחה והזזה אנכית של הפרבולה $y = x^2$.
6. בפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ ציר הסימטריה הוא $x = p$, שיעורי הקדקוד הם (p, k) , והסימן של המקדם a מבדיל אם לפרבולה יש נקודת מינימום או נקודת מקסימום.
7. יש לדעת למצוא תחומי חיוביות ושלייליות לפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$.

ה. הפונקציה הריבועית וייצוגיה האלגבריים השונים

פונקציה ריבועית היא פונקציה שאפשר להציגה כ:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$. ייצוג זה נקרא ייצוג סטנדרטי של פונקציה ריבועית.
בנוסף לייצוג הסטנדרטי של הפונקציה הריבועית קיימים ייצוגים נוספים:
ייצוג קדקודי: $g(x) = a(x - p)^2 + k$
ייצוג כמכפלה: $h(x) = a(x - t)(x - r)$

דגשים:

1. יש לדעת לעבור בין הייצוגים האלגבריים השונים של הפונקציה הריבועית בדוגמאות מספריות בלבד.
המעבר מייצוג סטנדרטי לייצוג קדקודי ייעשה באמצעות השלמה לריבוע. המעבר מייצוג סטנדרטי לייצוג כמכפלה ייעשה באמצעות פירוק לגורמים, אולם מעבר זה אינו תמיד אפשרי. מעבר מייצוג קדקודי או מייצוג כמכפלה לייצוג סטנדרטי ייעשה באמצעות פתיחת סוגריים.
2. מעבר לייצוג כמכפלה ייעשה רק כש- $a = \pm 1$.
3. היתרון של ייצוג קדקודי הוא בזיהוי ציר הסימטריה, בזיהוי הקדקוד ובזיהוי תחומי עלייה/ירידה של הפרבולה.
4. היתרון של הייצוג כמכפלה $h(x) = a(x - t)(x - r)$ הוא בזיהוי נקודות החיתוך עם ציר ה- x ובזיהוי תחומי חיוביות/שלייליות.
5. יש לדעת למצוא את ציר הסימטריה, את הקדקוד, את תחומי העלייה והירידה, את תחומי החיוביות והשלייליות ואת נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים באמצעות מעבר בין הייצוגים האלגבריים השונים.
6. אם פונקציה ריבועית מקבלת אותו ערך בעבור x_1 ו- x_2 אזי ציר הסימטריה הוא $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
7. יש לשלב את העיסוק בפונקציה ריבועית עם העיסוק בפונקציה קווית.

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

1. פתרון משוואות ריבועיות ופתרון שאלות מילוליות

משוואה ריבועית היא משוואה שאפשר להציג בייצוג סטנדרטי $ax^2 + bx + c = 0$ כאשר $a \neq 0$

דגשים:

1. המשמעות הגרפית של פתרון המשוואה הוא מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$ עם ציר ה- x .
2. כל משוואה מהצורה
 $ax^2 + bx + c = rx + q$
 $a(x - p)^2 + k = rx + q$
 $a(x - n)(x - t) = rx + q$
 היא משוואה ריבועית שאותה אפשר להעביר לייצוג סטנדרטי על ידי פתיחת סוגריים וריכוז כל הביטויים האלגבריים באגף אחד.
3. אם בייצוג הסטנדרטי $b = 0$, אזי המשוואה היא $ax^2 + c = 0$, ואפשר לפתור אותה באמצעות בידוד x^2 והוצאת שורש ריבועי.
4. אם בייצוג הסטנדרטי $c = 0$, אזי המשוואה היא $ax^2 + bx = 0$ ואפשר לפתור אותה באמצעות הוצאת גורם משותף.
5. כש- $a = \pm 1$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ נלמדו עד כה שתי דרכים לפתרון:
 א. פירוק של תלת-איבר ריבועי
 ב. השלמה לריבוע
6. יש להראות באמצעות השלמה לריבוע כי השורשים של משוואה ריבועית הם:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 כשהביטוי שבתוך השורש (דיסקרימיננטה) אינו שלילי. כשהדיסקרימיננטה שלילית אין למשוואה פתרונות. מחישוב ממוצע השורשים נובע כי ציר הסימטריה הוא $x = \frac{-b}{2a}$
7. דיסקרימיננטה שלילית מתקבלת במצבים שבהם הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ אינה חותכת את ציר ה- x . במצבים אלה אי-אפשר לייצג את הפונקציה כמכפלה $y = a(x - t)(x - r)$.
8. יש לעסוק גם בדוגמאות שבהן הפתרונות אי-רציונליים ולשרש באמצעות דוגמאות את ההרגל לפי יש לצפות תמיד לתוצאות "עגולות".
9. יש ללמוד לפתור משוואות ריבועיות במגוון דרכים, ויש לעודד את התלמידים לזהות דרכי פתרון יעילות למשוואה נתונה על פי אופן ייצוגה.
10. יש ללמוד למצוא נקודות חיתוך של פרבולה $y = ax^2 + bx + c$ וישר $y = rx + q$ על ידי פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = rx + q$.
 א. אם קיימים שני פתרונות אזי יש שתי נקודות חיתוך.
 ב. אם קיים פתרון יחיד אזי הישר משיק לפרבולה.
 ג. אם לא קיים פתרון אזי אין נקודות חיתוך.
11. יש לעסוק בשאלות מילוליות הדורשות פתרון משוואה ריבועית במגוון רחב של הקשרים, ובכללן שאלות העוסקות בגופים במרחב. יש לשים לב למצבים שבהם אחד הפתרונות אינו קביל בהקשר של השאלה המילולית.
12. יש ללמוד לפתור בעיות מינימום/מקסימום ריבועיות שאותן אפשר לפתור על ידי מציאת קדקוד של פרבולה.
13. יש לפתור משוואות ריבועיות שפתרון יכול להיות מבוסס על הצבה של ביטוי אלגברי במקום x .

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ז. אי שוויונות ריבועיים

דגשים:

1. יש ללמוד לפתור אי-שוויונות ריבועיים מהצורה
 $ax^2 + bx + c > 0$
 $ax^2 + bx + c < 0$
 $ax^2 + bx + c \geq 0$
 $ax^2 + bx + c \leq 0$
 $ax^2 + bx + c \neq 0$
(כאשר $a > 0$) באמצעות שרטוט סקיצה.
2. יש ללמוד לפתור אי-שוויונות ריבועיים מסוגים אלה גם כאשר $a < 0$ באמצעות סקיצה או באמצעות כפל האי-שוויון ב-1.
3. יש ללמוד לפתור אי-שוויונות ריבועיים מהצורה $ax^2 + bx + c > rx + q$ באמצעות סקיצה של ייצוג גרפי.

ח. מערכת משוואות לא ליניאריות של שתי משוואות בשני נעלמים ופתרון שאלות מילוליות

נושא זה מקנה לתלמיד נקודת מבט נוספת על נושא שכבר למד, ומסכם מגוון של נושאים שנלמדו בתחום האלגברה.

דגשים:

1. יש ללמוד לפתור מערכות משוואות לא ליניאריות של שתי משוואות בשני נעלמים במקרים שבהם אפשר לצמצם את המערכת למשוואה אחת שהיא לכל היותר ממעלה שנייה.
2. יש להיעזר בפתרונות גרפיים במידת האפשר.
3. יש ללמוד לפתור שאלות מילוליות שמצריכות פתרון מערכות משוואות כדוגמת אלה שהופיעו בדגש 1.

5. שימושים באלגברה (5 שעות)

פרק זה נועד לסכם את המושגים, התכונות והחוקים שנלמדו באלגברה במטרה לבסס פרספקטיבה וחוש לגבי מהי אלגברה ומהם שימושיה המגוונים, תוך הדגשת עצמתה ככלי מתמטי. מוצע לממש מטרה זו באמצעות עבודה על סוגים שונים של מטלות בהן תלמידים עוסקים ודנים בייצוג/מידול סימבולי של בעיות מתחומים שונים לצורך פתרון, הבנה וניתוח של ביטויים סימבוליים, חקר תופעות מספריות שונות (כלליות או שמתקיימות רק במקרים ייחודיים), והבנה ויצירה של הוכחות אלגבריות פשוטות.

דגשים:

1. יש לראות כיצד בחירות שונות של משתנה לייצוג בעיה משפיעות על הבחירה לפתרון.
2. מומלץ לחזור ולהתבונן בחישובים אריתמטיים תוך הישענות על חוקים אלגבריים.
3. יש לאמץ את האלגברה ככלי זמין וכללי לחקר / לימוד של תופעות מספריות.
4. יש ללמוד לקרוא ביטויים אלגבריים קריאה תבניתית וללמוד לפרש אותם בהתאם. (למשל, על מנת לייעל חישובים, להפיק מידע וכו').
5. יש להבין ולדעת ליצור הוכחות פשוטות באלגברה.
6. יש לשלב יישומים של טכניקה אלגברית עם הפעלת שיקולי משמעות.
7. יש לשלב בין אלגברה לבין גיאומטריה.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

תחום גיאומטרי

מבוא

אחת המטרות המרכזיות של לימודי הגיאומטריה בכיתה ט היא היכרות עם מערכת היסק (דדוקטיבית), ולימוד מיומנויות היסק.

סדר התכנים נקבע כך שלימוד מיומנויות ההיסק ייעשה באופן מדורג, וכך שכל תוכן יהיה מבוסס באופן היררכי על תכנים שנלמדו לפניו. אפשר ללמד תכנים אלה גם בסדר אחר מזה המוצע בתוכנית, ובלבד שיתקיימו שני התנאים הבאים:

- א. קיום סדר הגיוני במבנה ההיסקי של התכנים הנלמדים.
 - ב. שימור סדר לימוד מיומנויות ההיסק כפי שאלה באות לידי ביטוי בתוכנית. מיומנויות אלה מפורטות בכל סעיף בנפרד.
1. בכיתות ז-ח נלמדה גיאומטריה בגישה קדם-היסקית, ששילבה פיתוח אינטואיציה באמצעים מוחשיים ונימוק טענות באופן לא פורמאלי. כמו כן הושם דגש על תכנים חישוביים. לימודי הגיאומטריה בכיתה ט מסיטים את הדגש אל הגישה ההיסקית, תוך הדגשה של הפן הלוגי-פורמאלי. האיזון עם הגישה הקדם-היסקית נשמר באמצעות הישענות על תשתית הידע שהצטברה בכיתות ז-ח (ראו סעיף 5). יש להדגיש כי השיקולים הלא פורמאליים אינם נזנחים, והם ממשיכים להיות חלק מדרך החשיבה הראשונית. בכיתה ט נוסף אליהם נדבך, שלא רק שאינו מבטל אותם, אלא שהוא אף נשען עליהם הן כידע קודם והן כתשתית לבניית עטיפה פורמאלית ולוגית.
 2. בראשית הלימוד יושם דגש על היכרות עם מערכת היסקית, ובפרט על היכולת להתבסס רק על הגדרות ועל עובדות שנכונותן כבר נקבעה. כמו כן, בהמשך תילמד גם הדרך המקובלת לנסח טענה ולכתוב הוכחה.
 - שאר מיומנויות ההיסק תלמדנה במהלך כיתה ט, תוך כדי התקדמות בתוכנית הלימוד.
 3. ההיכרות עם מערכת היסקית ולימוד מיומנויות היסק כוללים את:
 - א. המושגים הגדרה, משפט והוכחה.
 - ב. התשתית הלוגית של המתמטיקה: כמתים כגון לכל, קיים, גרירה לוגית, תנאי מספיק, תנאי הכרחי ודוגמה נגדית.
 - ג. חשיבה היסקית: יכולת להבין הוכחה נתונה, ויכולת להוכיח משפט באופן עצמאי.
 - ד. כתיבה פורמאלית: כל טענה מנומקת היטב ולא נעשות טעויות לוגיות.
 4. ההיכרות עם מערכת היסקית ולימוד מיומנויות היסק תהיה מלווה בהרחבת עולם התוכן הגיאומטרי.
 5. תוכנית כיתה ט נשענת על הכרת המושגים הבאים שנלמדו בכיתות ז-ח: ישר, קטע, זווית, חוצה זווית, אנך, משולש, משולש ישר זווית, משולש שווה שוקיים, משולש שווה צלעות, חוצה זווית במשולש, תיכון במשולש, גובה במשולש/במצולע, מרחק של נקודה מישר, ישרים מקבילים, זוויות מתחלפות, זוויות מתאימות, מרובע, מלבן, ריבוע, טרפז, מקבילית, מעגל, תיבה, מנסרה משולשת, גליל, צורות חופפות, שטח, היקף, שטח פנים, נפח.
 6. להלן רשימה של הנחות יסוד ומשפטים שעליהם, ורק עליהם, אפשר להתבסס בתחילת כיתה ט:
 - א. כלל המעבר (טרנזיטיביות): שני עצמים גיאומטריים ששווים/חופפים לעצם שלישי שווים/חופפים ביניהם.
 - ב. כלל החיבור: שני קטעים (או זוויות), שכל אחד מהם מחולק לשני קטעים זרים, שווים אם הקטעים שמרכיבים אותם שווים בהתאמה.
 - ג. בין כל שתי נקודות עובר קו ישר יחיד.
 - ד. סכום זוויות צמודות הוא 180 מעלות.
 - ה. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים הפיקוח על הוראת המתמטיקה

- ו. משפטי החפיפה במשולש: $\angle x, \angle y, \angle z$, $\angle x, \angle y, \angle z$ וניצב ויתר.
 - ז. במשולש שווה-שוקיים התיכון לבסיס, הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים. כמו כן, זוויות הבסיס שוות.
 - ח. אם שני קווים הם מקבילים אזי זוויות מתחלפות ביניהם שוות.
 - ט. סכום הזוויות במשולש הוא 180 מעלות.
 - י. סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור, בעל n צלעות, הוא $180(n-2)$ מעלות.
 - יא. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה, ובפרט גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.
 - יב. סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
 - יג. משפט פיתגורס.
 - יד. שני משולשים שכל זוויותיהן שוות הם דומים.
 7. תוכנית הלימודים בגיאומטריה מחולקת לתחומי תוכן, שבכל אחד מהם מצוינים דגשים ומטרות משנה. בכל תחום תוכן, מפורטות המיומנויות שאותן יש ללמוד בשלב זה, וכן רשימת המשפטים שאותם צריכים התלמידים להכיר ולדעת להוכיח. סדר הלימוד המוצע של תחומי התוכן השונים אינו מחייב כל עוד נשמרים המבנה הלוגי, וסדר לימוד מיומנויות ההיסק.
 8. בכיתה ט יימשך העיסוק בחישובים. התשתית שאותה למדו התלמידים בכיתות ז-ח כוללת חישובי זוויות, חישובי שטחים, חישובי נפחים וחישובים המבוססים על משפט פיתגורס.
 9. בכיתה ט יעסקו התלמידים בבניות בסרגל ובמחוגה בגישה היסקית.
 10. תלמידים עלולים לפקפק בנחיצותה של גישה היסקית מכיוון שהורגלו מחוץ ללימודים ובמהלכם להשתכנע בנכונותה של טענה בגישה אינדוקטיבית. יש לחזק את הצורך בנחיצותה של הוכחה באמצעות דוגמאות. קיימות כמה תוצאות שאינן מובנות מאליהן (ואף מפתיעות), שגישה דדוקטיבית יכולה לשכנע באמיתותן. התוכנית מציעה חופש החלטה לגבי העיתוי של הוראת תוצאות אלה.
- להלן רשימת דוגמאות לתוצאות שאינן מובנות מאליהן:
- א. משולש שבו התיכון לצלע שווה למחצית הצלע הוא משולש ישר זווית.
 - ב. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחציתו.
 - ג. כל זווית היקפית הנשענת על קוטר של מעגל היא זווית ישרה.
 - ד. סכום זוויות חיצוניות בכל מצולע קמור הוא 360 מעלות.
 - ה. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע ושווה למחציתה.
 - ו. קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
 - ז. התיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס קבוע.
 11. הדוגמאות שבתוכנית הגיאומטריה מציגות דרכים אפשריות ליישום המיומנויות החדשות הנלמדות בכל פרק. בכל אחד מפרקי התוכן יש ללמד בנוסף תרגילים המבססים מיומנויות שנלמדו בפרקים קודמים גם אם דוגמאות כאלה אינן מובאות באופן מפורש בתוכנית.
 12. במידת האפשר, רצוי להציג לתלמידים יותר מדרך הוכחה אחת, ויש לעודד תלמידים לפתור תרגילים במגוון דרכים.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

1. דלתון ומשולש שווה שוקיים (10 שעות)

הדלתון הוא הפלטפורמה שעל גביה יש לתרגל את חפיפת המשולשים ואת הכתיבה המסודרת של הוכחה.

מיומנויות:

- זיהוי של משפט על סמך מושגים שהוגדרו
- הכרת הפקמת "כל"
- זיהוי של הנתונים ושל התוצאה המבוקשת
- הבנה של השתלשלות היסקית קצרה
- ספקנות לגבי נכונות טענות
- הנמקה של טענה בודדת
- זיהוי (קדם היסקי) של משולשים חופפים
- שימוש במשפטי חפיפה לנימוק החפיפה שזוהתה
- הסקת שוויון קטעים או זוויות מתוך משפטי החפיפה
- כתיבה פורמאלית קצרה
- שימוש במערכת צירים לצורך שרטוט צורות נתונות
- חישובי שטח והיקף

הגדרות:

- הדלתון הוא מרובע שלו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו.
- קדקוד של הדלתון, שהוא נקודת חיתוך של שתי צלעות (סמוכות) השוות זו לזו, נקרא **קדקוד ראשי**, והזווית בקדקוד זה נקראת **זווית ראש**. הזוויות בשני הקדקודים האחרים נקראות **זוויות צד**.
- האלכסון המחבר שני קדקודים ראשיים בדלתון נקרא **אלכסון הראשי**. האלכסון האחר נקרא **אלכסון המשני**.

דגשים:

1. בהוראת הנושא הראשון יש להניח את התשתית למיומנויות היסודיות של היסק בגיאומטריה:
 - א. יש לדעת שטענה מתמטית מתייחסת לפקמת כל, גם אם אין הוא מנוסח במפורש.
 - ב. יש ללמוד לנסח כל משפט או תרגיל במונחים של: "אם.... אזי....".
 - ג. יש ללמוד לזהות מהם הנתונים ומה צריך להוכיח בהסתמך על ניסוח המשפט.
 - ד. יש להבין את ההשתלשלות ההיסקית של הוכחה נתונה.
 - ה. יש לעורר בתלמידים ספקנות, ולהרגילם לבדוק נכונות ורלוונטיות של נימוקים. בפרט, מומלץ לנתח נימוקים שגויים או נימוקים שאינם רלוונטיים.
 - ו. יש לזהות בכלים קדם-דדוקטיביים משולשים החופפים זה לזה. יש לדעת כיצד לברר האם הנתונים לגבי משולשים אלה תואמים לאחד ממשפטי החפיפה, ויש לדעת להוכיח את החפיפה בגישה דדוקטיבית.
 - ז. התלמידים יידרשו לתכנן הוכחה ולנסחה. יש להקפיד שכל טענה משמעותית במהלך הוכחה תהיה מלווה בנימוק.
2. כלים העומדים בפני התלמידים לפיתוח חשיבה היסקית ולבניית הוכחות הם:
 - א. סימון על גבי שרטוט.
 - ב. קישור לידע קודם.
 - ג. חשיבה לפני מתוך הנתונים וחשיבה לאחור מתוך הנדרש להוכחה.
 - ד. ניסוי וטעייה.
 - ה. סיעור מוחות (דיון כיתתי).
3. יש ללמוד לנסח את הנתון במשפט או בתרגיל ואת מה שצריך להוכיח בו בכתיב פורמאלי.
4. יש ללמוד לכתוב מקטעים של הוכחה פורמאלית.
5. לרשות התלמידים עומדים כלי תוכן שאותם רכשו בכיתות ז-ח (ראו סעיף 5 במבוא). מומלץ לחשוף את התלמידים לכלי תוכן אלה בהדרגה, ורק בהתאם לצרכים.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

6. בפרקי הלימוד הראשונים, מומלץ שלא לחרוג ממבנים היסקיים פשוטים (עד שני שלבי היסק). בכל מקום שבו הדבר אפשרי יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה למסקנה.
7. מיומנויות היסק נוספות נדחות לפרקים הבאים.
8. יש לנצל את הוראת הדלתון כדי לתרגל היסק הנוגע לחפיפת משולשים ולמשולש שווה שוקיים, או לנושאים אחרים שנלמדו בעבר.
9. יש לדעת להסיק שוויון קטעים או שוויון זוויות מתוך משפטי חפיפת משולשים.
10. יש להסיק תוצאות הנובעות מתכונות הדלתון.
11. לצד תרגילים היסקיים, יש לתרגל נושאים חישוביים הקשורים בדלתון ובשיבוצו במערכת צירים.

פירוט התוכן:

1. דלתון קמור מורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.
2. במסגרת לימוד הדלתון יש לחזור על משפטים העוסקים במשולשים שווי שוקיים:
 - א. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
 - ב. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
3. במסגרת הוראת הדלתון יש ללמוד משפטים שטרם נלמדו בנושא משולשים שווי שוקיים:
 - א. משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
 - ב. משולש שבו חוצה זווית מתלכד עם גובה הוא משולש שווה שוקיים.
 - ג. משולש שבו תיכון מתלכד עם גובה הוא משולש שווה שוקיים.
4. יש להדגים לפני התלמידים דלתון קמור ודלתון קעור.
5. האלכסון הראשי של הדלתון הוא ציר סימטריה.
6. האלכסון הראשי של הדלתון חוצה את זוויות הראש.
7. האלכסון הראשי של הדלתון חוצה את האלכסון המשני.
8. האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה.
9. זוויות הצד בדלתון שוות זו לזו.
10. שטח הדלתון שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

2. בניות בסיסיות (12 שעות)

בניות באמצעות סרגל ומחוגה הן תחום תוכן המשתלב הן עם הגישה ההיסקית והן עם תחומי התוכן הנלמדים בכיתה ט. בפרק זה נדרשים התלמידים לתכנן את פעולותיהם כדי לממש בניה נדרשת. תוך כדי כך הם מחזקים את מיומנויות ההוכחה שאליהן נחשפו בפרק הקודם. הפרק כולל ביסוס של התוכן שנלמד בפרק הקודם ושל פרק חפיפת משולשים. מעבר לכך, פרק זה משמש מבוא לבניות עזר שתופענה בהוכחות בהמשך. תרגילי הבנייה מבוססים באופן בלעדי על התוכן של פרק הלימוד הקודם. בהמשך הלימוד יש לבסס את הבניות גם לצורות הגיאומטריות ולתכנים החדשים שיילמדו.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

מיומנויות:

- הקדמת תכנון לביצוע
- יכולת הצדקה של כל שלב בביצוע
- זיהוי מקרים שבהם הנתונים מספיקים לבניית צורה יחידה
- הטמעת הקשר שבין יחידות צורה הנבנית, לבין חפיפתה לצורה אחרת שנבנתה לפי אותם נתונים

דגשים:

1. כל בנייה תהיה מבוססת על תכנון מוקדם באופן שיספק את דרישות הבנייה על פי הנתונים.
2. כל בנייה תהיה מלווה בהוכחה המצדיקה אותה.
יוצאות מכלל זה הן הבניות הבאות: העתקת קטע, חיבור קטעים או חיסורם (כולל הכפלת קטע נתון במספר טבעי), העתקת זווית, חיבור זוויות או חיסורן (כולל הכפלת זווית נתונה במספר טבעי).
3. יש להראות כיצד מחסור בדרישות הבנייה עלול לגרור לחוסר יחידות של הצורה הנבנית.
4. יש להראות כיצד עודף בדרישות הבנייה עלול לשלול את אפשרות הבנייה.
5. יש לדעת לקשר בין דרישות בנייה המגדירות צורה יחידה לבין משפטי החפיפה.
6. היחידות של הצורה הנבנית גוררת את חפיפתה לכל צורה אחרת שנבנתה לפי אותן דרישות. עובדה זו היא היבט נוסף של מושג החפיפה.
7. הבניות יכולות להיעשות באמצעות סרגל חסר שנתות ומחוגה, או באמצעות אמצעי טכנולוגי המדמה זאת.
8. יש ללמד משפטים שהוכחתם מתבססת על בנייה כגון: אם במשולש שתי צלעות שאינן שוות, הרי שמול הצלע הגדולה מהן ממוקמת הזווית הגדולה.

פירוט הבניות הבסיסיות:

1. העתקת קטע
2. חיבור קטעים או חיסורם (כולל הכפלת קטע נתון במספר טבעי)
3. העתקת זווית
4. חיבור זוויות או חיסורן (כולל הכפלת זווית נתונה במספר טבעי)
5. חציית קטע
6. העלאת אנך אמצעי לקטע
7. הורדת אנך לישר מנקודה שמחוץ לישר
8. העלאת אנך לישר מנקודה על הישר
9. חציית זווית
10. בניית משולש לפי נתונים התואמים את כל אחד ממשפטי החפיפה המוכרים
11. בניית משולש לפי נתונים התואמים את אחד ממשפטי החפיפה המוכרים ביחס למשולש החלקי לו:
 - א. בנו משולש לפי אורך חוצה זווית, ושתי הזוויות הנוצרות בקצותיו עם צלעות המשולש.
 - ב. בנו משולש לפי אורך צלע, אורך התיכון לאותה צלע ואורך צלע נוספת.
 - ג. בנו משולש לפי אורך צלע, אורך הגובה לאותה צלע ואורך צלע נוספת.
 - ד. בנו משולש שווה שוקיים לפי אורך הבסיס ואורך הגובה לבסיס.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

3. ישרים מקבילים וטרפז (8 שעות)

מיומנויות:

- מיומנות היסק בכל הנוגע לקשרים בין הקבלה וזוויות
- זיהוי (קדם היסקי) של ישרים מקבילים
- שימוש בקשרים בין הקבלה וזוויות לנימוק ההקבלה שזוהתה (זוג ישרים מקבילים יחיד)
- הסקת שוויון זוויות מתוך הקבלה

הגדרות:

- **ישרים מקבילים** הם ישרים הנמצאים באותו מישור ואינם נחתכים.
- **טרפז** הוא מרובע שבו יש זוג יחיד של צלעות המקבילות זו לזו.
- הצלעות המקבילות נקראות **בסיסים**, והצלעות האחרות נקראות **שוקיים**. המרחק בין שני הבסיסים נקרא **גובה**.

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושא הקודם.
2. אם שני ישרים מקבילים זה לזה, אזי כל שתי זוויות מתחלפות ביניהם שוות זו לזו. טענה זו, שהוזכרה בכיתה ז', ונראית תואמת את המציאות שבה אנו חיים, איננה ניתנת להוכחה, ואנחנו מקבלים אותה כהנחת יסוד.
3. אם שתי זוויות מתחלפות בין שני ישרים שוות זו לזו, אזי שני הישרים מקבילים זה לזה. טענה זו ניתנת להוכחה, והוכחתה מבוססת על דרך השלילה. אפשר להוכיחה בשלב זה, אך אפשר לדחות את הוכחתה לשלב מאוחר יותר שבו תילמד באופן מסודר המיומנות של הוכחה בדרך השלילה.
4. המרחק בין שני ישרים מקבילים הוא קבוע.
5. הקבלה בין ישרים היא תכונה טרנזיטיבית.
6. יש לדעת לבנות ישר המקביל לישר a והעובר דרך נקודה Q שמחוץ לישר a .
דרך א:
 - מורידים אנך b מהנקודה Q לישר a .
 - מעלים אנך c לישר b מהנקודה Q .
 - לישרים a, c יש אנך משותף ולכן הם מקבילים.דרך ב:
 - מחברים את הנקודה Q עם נקודה P כלשהי הממוקמת על הישר a .
 - מעתיקים את הזווית שבין הישר a לבין הקטע PQ על הקטע PQ בקדקוד Q כך ששתי הזוויות תתחלפנה.
 - שוק הזווית החדשה והישר a מקבילים זה לזה.
7. בהוראת הטרפז יש לבסס את התשתית למיומנויות היסודיות של היסק בנושא ישרים מקבילים:
 - א. יש לזהות ישרים מקבילים על סמך שתי זוויות מתחלפות השוות זו לזו, או על סמך שתי זוויות מתאימות השוות זו לזו או על סמך שתי זוויות חד-צדדיות שסכומן 180° (אין חובה ללמד את המושג זוויות חד צדדיות). יש לדעת לנמק את הסיבה להקבלה.
 - ב. מכך ששני ישרים מקבילים זה לזה, יש לזהות שכל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו, או שכל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו או שסכום כל שתי זוויות חד-צדדיות הוא 180° , ויש לדעת לנמק זאת בהתאם.
8. יש לנצל את הוראת הטרפז כדי לתרגל היסק בנושא זוג יחיד של ישרים מקבילים, זאת לפני העיסוק בשני זוגות של ישרים מקבילים שיבוא לידי ביטוי בפרק המקבילית.
9. יש להסתמך על הידע בבניות כדי להשתמש בבניות עזר בהוכחת משפטים.
10. במקרים שבהם הדבר אפשרי, יש להדגים דרכים שונות להוכיח אותו משפט.
11. במידת האפשר, מומלץ להציג לפני התלמידים יותר מדרך אחת לכתיבת הוכחה.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

פירוט התוכן:

1. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא טרפז, יש להראות ששתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו, וששתי הצלעות הנוספות אינן מקבילות זו לזו.
2. בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו. משפט זה אפשר להוכיח במגוון דרכים ובאמצעות בניות עזר שונות (הורדת אנכים לבסיס הארוך משני קצות הבסיס הקצר, העברת מקביל לשוק דרך אחד מקדקודי השוק האחרת¹, הארכת שוקי הטרפז עד חיתוך²)
3. טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים. גם משפט זה אפשר להוכיח במגוון דרכים ובאמצעות בניות עזר שונות.
4. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
5. האנך האמצעי לבסיסים בטרפז שווה שוקיים הוא ציר סימטריה.
6. יש לדעת לחשב היקף ושטח של טרפז.

4. מקבילית, ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיה (10 שעות)

מיומנויות:

- הבנת הוכחות רב-שלביות שבהן מובלטת שרשרת ההיסקים
- הכרה בעובדה שיש יותר מדרך נכונה אחת להוכיח טענה
- אבחנה בין משפט למשפט הפוך

הגדרה:

המקבילית היא מרובע שבו יש שני זוגות של צלעות המקבילות זו לזו.

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושאים הקודמים.
2. בכל ההנמקות הנוגעות לזוויות בין קטעים מקבילים יש לציין מהו זוג הקטעים המקבילים שבו מדובר.
3. יש להכיר את תכונות המקבילית הנובעות מהגדרתה. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרת המקבילית לתכונה המבוקשת.
4. יש להכיר דרכים לזיהוי מקבילית מכלל המרובעים. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלים קריטריון לזיהוי מקבילית, לתנאי ההגדרה שלה, במשפט מהצורה: "מרובע שבו..... הוא מקבילית".
5. יש לדעת להבדיל בין משפט ובין משפט הפוך באמצעות היפוך הנתון ומה שצריך להוכיח.
6. יש לדעת להבדיל בין ההוכחה של משפט וההוכחה של המשפט ההפוך לו באמצעות היפוך הכיוון של שרשרת ההיסקים (ובכלל זה הנתון ומה שצריך להוכיח).
7. יש להכיר שנקודות משפט אינה מחייבת את נכונות המשפט ההפוך לו.
8. עד כה התבססו ההוכחות על מהלך היסקי בן שלב אחד או שניים. כעת, אם ההוכחה היא מרובת שלבים יש לקיים דיון כיתתי על המהלך ההיסקי של ההוכחה, ולהבליט את שרשרת ההיסקים העומדת בבסיסה.
9. במידת האפשר, רצוי להציג לתלמידים יותר ממהלך היסקי אחד להוכחה.

¹ גישה זו להוכחת המשפט תילמד רק לאחר לימוד המקבילית.

² ההוכחה האחרונה מתבססת על ידע בדמיון שאותו למדו התלמידים בגישה קדם-דדוקטיבית בכיתה ח. אין להסתמך על הדמיון באופן בלעדי להוכחת המשפט כיוון שהנושא עדיין לא נלמד במסגרת דדוקטיבית.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

פירוט התוכן:

1. יש לדעת כיצד בונים מקבילית על סמך שתי צלעות סמוכות והזווית החדה שביניהן, או על סמך שתי צלעות סמוכות ואלכסון המקבילית.
2. יש להכיר את תכונות המקבילית ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתה:
 - א. האלכסון מחלק את המקבילית לשני משולשים חופפים.
 - ב. צלעות נגדיות שוות זו לזו.
 - ג. זוויות נגדיות שוות זו לזו.
 - ד. סכום זוויות סמוכות הוא 180° .
 - ה. חוצי זוויות סמוכות מאונכים זה לזה.
 - ו. האלכסונים חוצים זה את זה.
3. יש להכיר את הסימטריה הסיבובית של המקבילית סביב נקודת מפגש האלכסונים.
4. יש להכיר תוצאות הנובעות מתכונות המקבילית:
 - א. בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
 - ב. טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
 - ג. טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
5. יש להכיר תכונות מזהות של מקבילית ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה.
 - א. אם הסכום של כל שתי זוויות סמוכות במרובע הוא 180° , אזי המרובע הוא מקבילית.
 - ב. אם במרובע כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו, אזי המרובע הוא מקבילית.
 - ג. מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.
 - ד. מרובע שבו הצלעות הנגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
 - ה. מרובע שבו שתי צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
6. יש להכיר את התכונות של קטע אמצעים במשולש ובטרפז וכיצד הן נובעות מתכונות המקבילית.
 - א. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
 - ב. קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
 - ג. קטע היוצא מאמצע צלע של משולש ומקביל לצלע אחרת חוצה את הצלע השלישית.
 - ד. קטע היוצא מאמצע שוק של טרפז ומקביל לבסיסיו חוצה גם את השוק האחרת.

5. מלבן, ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיו (8 שעות)

מיומנויות:

- אבחנה בין סוגים שונים של נכונות
- הפרכת טענה מתמטית

הגדרה:

מלבן הוא מרובע שבו כל הזוויות ישרות

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושאים הקודמים.
2. יש ללמוד להבחין בין שלושה סוגים של טענות:
 - א. טענה שהיא נכונה בכל מקרה.
 - ב. טענה שאיננה נכונה בכל מקרה. (למשל, האלכסונים במלבן מחלקים זה את זה ביחס של 2:1).
 - ג. טענה שאיננה נכונה בכל מקרה, אבל ייתכנו מקרים פרטיים שבהם היא נכונה (למשל: צלעות סמוכות במלבן שונות זו מזו).
3. יש לדעת שמשפט במתמטיקה נחשב נכון רק אם הוא מתקיים בכל מקרה. משפט במתמטיקה נחשב לא נכון גם אם קיימים מקרים פרטיים שבהם הוא מתקיים (למשל: צלעות סמוכות במלבן שונות זו מזו).
4. יש להסיק מסעיף 3 שדי בדוגמא נגדית אחת כדי להפריך טענה מתמטית.
5. יש להכיר את תכונות המלבן הנובעות מהגדרתו. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרת המלבן לתכונה המבוקשת.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראות המתמטיקה

6. יש להכיר דרכים לזיהוי מלבן מכלל המרובעים, ומכלל המקביליות. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי מלבן, לתנאי ההגדרה שלו, במשפט מהצורה: "מרובע שבו.... הוא מלבן" או "מקבילית שבה.... היא מלבן".
7. יש לאפשר לתלמידים לחקור בעצמם תופעות גיאומטריות, לשער השערות (אפשר בכלים טכנולוגיים) ולהוכיחן.

פירוט התוכן:

1. יש לדעת לבנות מלבן בהינתן שתי צלעות סמוכות, או בהינתן צלע ואלכסון.
2. יש להכיר את תכונות המלבן ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתו:
 - א. מלבן הוא מקבילית ולכן כל תכונות המקבילית מתקיימות בו.
 - ב. האלכסונים במלבן שווים זה לזה.
3. יש להכיר את הסימטריה הסיבובית של המלבן סביב נקודת מפגש האלכסונים, ואת שני צירי הסימטריה שלו.
4. יש להכיר תכונות מזהות של מלבן ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה.
 - א. מקבילית שבה יש זווית ישרה היא מלבן.
 - ב. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
 - ג. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא מלבן אפשר לפעול באחת משלוש הדרכים הבאות:
 - i. להראות שיש שלוש זוויות ישרות.
 - ii. להראות שהוא מקבילית שבה יש זווית ישרה.
 - iii. להראות שהוא מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה.
5. יש להכיר תוצאות הנובעות מתכונות המלבן ומהדרכים לזיהויו.
 - א. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
 - ב. בהזדמנות זו יכול להילמד גם המשפט ההפוך אף שהוכחתו איננה מבוססת בהכרח על פרק המלבן, אלא על משולשים שווים שוקיים. כאן אפשר להוכיחו גם בהסתמך על הדרכים לזיהוי מלבן: משולש שבו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא מחלק, הוא משולש ישר זווית.

6. הוכחה על דרך השלילה (4 שעות)

פרק זה עוסק במיומנות ההוכחה על דרך השלילה במגוון תכנים גיאומטריים שבהם המיומנות נדרשת.

מיומנויות:

- הוכחה על דרך השלילה
- חלוקה דיכוטומית של מלוא האפשרויות
- בירור טענה היפותטית

דגשים:

1. הוכחות על דרך השלילה שימושיות בגיאומטריה, ובתחומים מתמטיים אחרים.
2. הוכחה על דרך השלילה מורכבת מסדרה של שלבים כדלקמן:
 - א. חלוקה דיכוטומית של מלוא האפשרויות: תוצאה 1 או תוצאה 2.
 - ב. בירור של השאלה: "מה היה קורה אילו...[הייתה מתקיימת תוצאה 2]?"
 - ג. תוך כדי הבירור מתבהרת תוצאה הכרחית שעומדת בסתירה לנתון או לעובדה ידועה.
 - ד. הסתירה שהתבהרה שוללת את האפשרות של תוצאה 2.
 - ה. משלילת תוצאה 2 נותרת אפשרות יחידה והיא קיומה של תוצאה 1.
3. יש להדגים את עקרון ההוכחה בכמה דוגמאות פשוטות (שבהן שלב הבירור הוא קצר), ושאותן ניתן לבחור מבין הדוגמאות 1 - 5 להלן. לאחר מכן יש לעבור להוכחות מורכבות (שבהן שלב הבירור מורכב יותר) של משפטים שאת תוכנם הגיאומטרי יש להכיר.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

פירוט המשפטים בהם אפשר להשתמש בהוכחה בדרך השלילה:

1. אפשר להעלות אנך אחד בלבד מנקודה על ישר.
2. מנקודה מחוץ לישר אפשר להוריד ישר אחד בלבד המאונך לישר הנתון.
3. כל שני גבהים במשולש נחתכים.
4. כל שני חוצי זווית במשולש נחתכים.
5. כל שני אנכים אמצעיים במשולש נחתכים.
6. אם שתי זוויות מתחלפות בין שני ישרים מקבילים שוות זו לזו אזי זוג הישרים מקבילים זה לזה.
7. המשפט החפיפה הרביעי: אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, ואם הזווית שמול הצלע הגדולה (בין השתיים) במשולש האחד שווה לזווית המתאימה לה במשולש האחר אזי שני המשולשים חופפים זה לזה.
8. אם במשולש שתי זוויות השונות זו מזו, הרי שמול הזווית הגדולה ממוקמת הצלע הגדולה.
9. קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה, הוא קטע אמצעים.
10. קטע המחבר שתי שוקיים בטרפז, מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם, הוא קטע אמצעים.

7. מעוין וריבוע (8 שעות)

מיומנויות:

- הבלטת שרשרת היסקים
- הכרת היחסים ההדדיים בין קבוצות מרובעים
- אוריינות גיאומטרית

הגדרות:

- המעוין הוא מרובע שבו כל הצלעות שוות.
- ריבוע הוא מרובע שבו כל הצלעות שוות וכל הזוויות ישרות.

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושאים הקודמים.
2. יש להכיר את תכונות המעוין ותכונות הריבוע הנובעות מהגדרותיהם. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרות לתכונות המבוקשות.
3. יש להכיר דרכים לזיהוי מעוין מכלל המרובעים, מכלל הדלתונים, ומכלל המקביליות. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי מעוין לתנאי ההגדרה שלו במשפט מהצורה: "מרובע שבו.... הוא מעוין" או "דלתון שבו.... הוא מעוין" או "מקבילית שבה.... היא מעוין".
4. יש להכיר דרכים לזיהוי ריבוע מכלל המרובעים, מכלל המקביליות, מכלל המלבנים ומכלל המעוינים. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי ריבוע לתנאי ההגדרה שלו.
5. יש להכיר את היחסים ההדדיים הקיימים בין קבוצות שונות של מרובעים, ובכללן קשרי הכלה, קשרי זרות, וקשרי חפיפה חלקית.
6. בפרק ההוראה האחרון יש לחזק את האוריינות הגיאומטרית של התלמידים. אוריינות גיאומטרית היא היכולת לקרוא תיאור של מבנה גיאומטרי ולשרטטו כראוי על סמך הבנת הנקרא. הכנת השרטוט על ידי התלמיד עצמו תבטא את יכולתו לקרוא בדקדקנות ראויה את מלוא הפרטים המופיעים בתיאור מבלי להסתמך על מראה עיניים.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

פירוט התוכן:

1. יש לדעת לבנות ריבוע בהינתן צלע.
2. יש לדעת לבנות מעוין בהינתן צלע וזווית בין צלעות.
3. יש להכיר את תכונות המעוין ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתו:
א. מעוין הוא מקבילית ולכן כל תכונות המקבילית מתקיימות בו.
ב. האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.
ג. האלכסונים במעוין חוצים את הזוויות.
4. יש להכיר את תכונות הריבוע ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתו:
א. ריבוע הוא מקבילית, ולכן כל תכונות המקבילית מתקיימות בו.
ב. ריבוע הוא מלבן, ולכן כל תכונות המלבן מתקיימות בו.
ג. ריבוע הוא מעוין, ולכן כל תכונות המעוין מתקיימות בו.
5. יש להכיר את הסימטריות הסיבוביות של המעוין ושל הריבוע סביב נקודת מפגש האלכסונים ואת כל צירי הסימטריה שלהם.
6. יש להכיר תכונות מזהות של מעוין ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה.
א. מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
ב. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
ג. מקבילית שבה אלכסון חוצה את זווית המקבילית היא מעוין.
7. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא מעוין אפשר לפעול באחת משלוש הדרכים הבאות:
א. להראות שארבע צלעות שוות.
ב. להראות שהמרובע הוא מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות.
ג. להראות שהמרובע הוא מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה.
ד. להראות שהמרובע הוא מקבילית שבה אלכסון חוצה את זווית המקבילית.
8. יש להכיר תכונות מזהות של ריבוע ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא ריבוע אפשר לפעול באחת משתי הדרכים הבאות:
א. להראות שבמרובע כל הצלעות שוות וכל הזוויות שוות.
ב. להראות שהמרובע הוא הן מלבן והן מעוין.
9. יש להכיר תוצאות הנובעות מתכונות המעוין והריבוע ומהדרכים לזיהוים.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

נספח – דוגמאות לתוכנית הלימודים לכיתה ט'

מבוא לנספח:

מטרת הנספח היא להדגים את הנושאים והדגשים המופיעים בתוכנית הלימודים. הדוגמאות נועדו להציג דרכים לממש את רוח התוכנית, להציג דרכים לשלב בין נושאים ולהציג מגוון של דרגות מורכבות וקושי. הדוגמאות בנספח אינן מחייבות ובוודאי שאינן מתיימרות למצות את שלל התרגילים שיופיעו בספרי הלימוד.

1. חזקות ושורשים (20 שעות)

א. חזקות עם מעריך טבעי

1. א. היעזרו בכתוב חזקות כדי לכתוב ביטויים חשבוניים השווים למספרים הבאים:
 $0.169 \quad 1.44 \quad 0.25 \quad 169 \cdot 196 \quad 64 \cdot 25 \quad 12,100 \quad 81$
 מצאו יותר מדרך כתיבה אחת.
 ב. כתבו בדרכים שונות את הביטויים a^5 , ו- $4a^2b^3$ באמצעות חזקות.
2. פי כמה גדול 7^{42} מ- 7^{41} ?
 פי כמה גדולים a^{b+3} , a^{b+2} , a^{b+1} מ- a^b (מ- $a > 1$)?
3. לפניכם סדרת מספרים עם חוקיות כפולית-3,6,12,24,.....
 א. מהי החוקיות הקושרת בין שני איברים עוקבים בסדרה?
 ב. מהו האיבר החמישי בסדרה?
 ג. הציגו את האיבר העשירי כמכפלה של חזקות של גורמים ראשוניים.
 ד. כתבו ביטוי אלגברי המבטא את ערכו של האיבר הנמצא במקום ה- n.
4. א. כתבו טבלאות ערכים לפונקציות הבאות (עבור x טבעי):
 $f(x) = x+2$, $g(x) = x-2$, $m(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$
 ב. שרטטו את הגרפים של ארבע הפונקציות. (גרף נקודות עבור x טבעי).
5. איזה מהמספרים הבאים שווה ל- 2^{10} ?
 א. $2^2 \cdot 2^5$ ב. $2^7 \cdot 2^3$ ג. $(2^5)^2$
 ד. $2^{20} : 2^2$ ה. $(\frac{10}{5})^2$ ו. $(2^5)^5$ ז. $(-2)^{10}$
6. א. מה הערך של n במשוואה $4^{20} + 4^{20} = 2^n$?
 ב. הציעו אפשרויות שונות לערכים של m ו- k (מספרים טבעיים) במשוואה $2^m \cdot 2^k = 1,024$
7. קבעו בכל אחד מהסעיפים הבאים איזה ביטוי גדול יותר? הסבירו את תשובתכם.
 א. 3^4 או 4^3
 ב. 3^{400} או 4^{300}
 ג. 10^{20} או $97 \cdot 10^{18}$
 ד. a^k או b^k (k טבעי, $a > b$, $a, b > 0$)
8. א. האם ייתכן ש $a^5 = a^6$? נמקו.
 ב. האם ייתכן ש $a^5 > a^6$? נמקו.
9. המילים קילו, מגה, ג'יגה וטרה מייצגות מספרים.
 כתבו מספרים אלה באמצעות חזקות.
10. סדרו את המספרים הבאים בסדר עולה:
 $5000 \cdot 10^{10}$, $500 \cdot 10^{10}$, $50 \cdot 10^{13}$, $5 \cdot 10^{15}$
11. הראו כי $3^{100} + 3^{101} + 3^{102} = 3^{100} \cdot 13$
12. סדרו את המספרים הבאים בסדר עולה (היעזרו בחוקי חזקות):
 5^{50} , 3^{75} , 2^{100}

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

13. כיצד מספר הספרות בייצוג עשרוני של מספר קשור למעריך של 10 בייצוג המדעי שלו?

14. השתמשו בכתוב מדעי כדי לבטא את הגדלים הבאים:

- מהירות האור בחלל (שהיא בקירוב 300,000,000 מטר לשנייה).

- מספר השניות בשנה (365.25 ימים)

- מספר הקילומטרים שיעבור האור בחלל בשנה אחת.

15. א. השלימו את ריבוע הקסם כך שתתקבל אותה **מכפלה** בכל שורה, בכל טור ובשני האלכסונים הראשיים.

ב. תארו בעזרת חזקות את הקשר בין מכפלת הביטויים האלגבריים בכל שורה, טור או אלכסון ראשי ובין הביטוי האלגברי הממוקם במשבצת האמצעית.

		$\left(\frac{a}{2}\right)^2$
$2a$	$(2a)^2$	$(2a)^3$

16. א. מצאו דוגמאות שונות שבהן מתקיים $(a + b)^n = a^n + b^n$

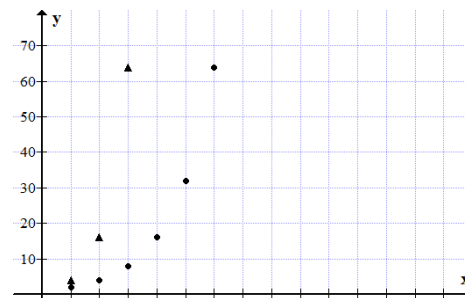
ב. האם נכון תמיד ש $(a + b)^n = a^n + b^n$? נמקו.

17. נתון: $-1 < T < 0 < P < 1$

איזה מהביטויים הבאים הוא הקטן ביותר?

א. 0 ב. $P \cdot T$ ג. $P^2 \cdot T^2$ ד. $P^3 \cdot T^3$

18. לפניכם הגרפים של הפונקציות $y = 2^n$ ו- $y = 4^n$ (n מספר טבעי).



א. סמנו באדום את גרף הפונקציה $y = 2^n$ ובכחול את גרף הפונקציה

$y = 4^n$.

ב. השלימו טבלת ערכים לשני הגרפים:

n	1	2	3	4	5	6
$y = 2^n$						
$y = 4^n$						

ג. הסבירו מדוע אורכו של הקטע המקביל לציר y ומחבר בין שתי נקודות של שני הגרפים הוא $2^n \cdot (2^n - 1)$

ד. שרטטו על מערכת הצירים את גרף הפונקציה $y = 3^n$ בעבור אותם ערכים של n.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ב. הרחבת מושג החזקה למעריכים שהם אפס ומספרים שליליים שלמים

$$(a \neq 0) \quad a^0 = 1, \quad (a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1. כתבו את המספרים הבאים בייצוגים של שבר פשוט ומספר עשרוני:
 $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-9}, (0.01)^{-1}$

2. מהו ערך הביטוי $(548^{-1})^{-1}$? הצדיקו תשובתכם בשתי דרכים שונות.

3. בעבור איזה ערך של x הביטוי $(x - 5)^{-3}$ אינו מוגדר?

4. הציבו את הסימנים $>, <$ או $=$
1. $2^{-5} \quad (-2)^5$

2. $(-3)^3 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

3. $2^{-5} \quad 2^{-3}$

האם אפשר לפתור את השאלה מבלי לחשב את הביטויים המספריים?

5. חשבו את ערך הביטוי: $\frac{1}{(x-5)^{-2}}$ בעבור $x = 6, 7, 5.5, -1$

6. מצאו את כל פתרונות המשוואה (הניחו כי הביטוי במעריך הוא מספר טבעי): $(2x + 1)^{2x-1} = 1$

7. נמקו מדוע $(a^{-n})^k$ שווה a^{-nk} בעבור n, k טבעיים.

8. האם ייתכן ש $a^{-5} = a^{-6}$? הסבירו.

9. השתמשו בכתיב מדעי כדי לבטא את הגדלים הבאים:

- סנטימטר מעוקב הוא $\frac{1}{1000000}$ של מטר מעוקב.

- פיזיקאים מתארים אטום בגביש כקובייה שאורך צלעותיה כ- 10^{-7} מ"מ.
כמה קוביות כאלה יידרשו למלא 1 סמ"ק?

10. המילים סנטי, מילי, מיקרו, ננו ופיקו מייצגות מספרים.
כתבו מספרים אלה באמצעות חזקות.

11. השלימו את המכנה באגף שמאל: $\frac{2a^3b^5}{\quad} = \frac{1}{2}a$

12. פשטו את הביטוי $\left(\frac{x^4 \cdot x^2 \cdot x^{-5}}{b^5 \cdot b^2 \cdot b^{-4}}\right)^3$ וחשבו את ערכו בעבור $x = 8, b = 4$

13. בבריקה גדל צמח שצף על פני המים. בכל שעה הצמח מכפיל את שטחו (השטח של הצמח בתום כל שעה הוא פי 2 מאשר בתחילתה). 30 שעות מתחילת גדילתו הצמח כיסה את פני כל הבריקה.
כמה שעות מתחילת גדילתו כיסה הצמח את מחצית שטח הבריקה?

14. איזה מהביטויים הבאים הוא הקטן ביותר? איזה הוא הגדול ביותר?

א. $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ ב. 2^{-3} ג. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ ד. $\frac{1}{4}$

ג. שורשים ריבועיים

1. מצאו לאילו מהביטויים הבאים שווה הביטוי $\sqrt{72}$ מבלי להיעזר במחשבון
א. $2\sqrt{6}$ ב. $2\sqrt{18}$ ג. $6\sqrt{2}$ ד. $7\sqrt{2}$

2. חשבו בעזרת מחשבון של הערך של $\sqrt{2}$. חשבו בעזרת מחשבון: $(1.4142)^2$. השוו בין שתי התוצאות והסבירו את ההבדל.

3. חשבו את ערך הביטוי $(\sqrt{2})^{10}$

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4. הציבו סימן $<$, $>$ או $=$ מבלי להיעזר במחשבון
א. $\sqrt{11}$ _____ $2\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{75}$ _____ $5\sqrt{3}$

5. הראו כי $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$ מבלי להיעזר במחשבון.

6. הראו כי $2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2\frac{2}{3}}$. מצאו מספרים אחרים שבעבורם מתקיים שוויון דומה.

7. שרטטו משולש ישר זווית שאורך הניצבים בו הם 1 יח' ואורך ו-2 יח' אורך. העתיקו את היתר על ציר המספרים ואימדו ברמת דיוק של עשירית יח' אורך את האורך. חשבו במדויק את אורך היתר בעזרת משפט פיתגורס.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

2. הסתברות (15 שעות)

א. הסתברות מותנית

1. ההסתברות שירד גשם בירושלים ביום אקראי בשנה היא 0.12.
כיצד משתנה הסתברות זו (האם היא גדלה או קטנה?) אם ידוע:
א. שבאותו היום הטמפרטורה המרבית היתה 10 מעלות.
ב. שבאותו היום הטמפרטורה המרבית היתה 30 מעלות.
ג. שאותו היום היה יום ד' בשבוע.
2. הטילו מטבע הוגן שלוש פעמים. מהי ההסתברות שבהטלה השלישית התקבלה "תמונה"? כיצד משתנה הסתברות זו אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבל "מספר". יש לפתור שאלה זו בשתי דרכים שונות:
א. לערוך רשימה של 8 התוצאות שיכולות להתקבל בהטלת מטבע 3 פעמים, לזהות מתוכן את כל התוצאות שבהן בשתי ההטלות הראשונות התקבל "מספר", ועל פיהן לקבוע מהי ההסתברות לקבלת "תמונה" בהטלה השלישית.
ב. להסתמך על חוסר הרלבנטיות של התוצאות בשתי ההטלות הראשונות לתוצאת ההטלה השלישית, כדי להסיק שידיעת תוצאות אלה ההטלות הראשונות אינה משנה את ההסתברות של ההטלה השלישית.
3. מטילים שתי קוביות הוגנות, אחת כחולה ואחרת אדומה.
א. מה ההסתברות שהסכום שהתקבל הוא 4?
ב. מה ההסתברות שהסכום שהתקבל הוא 4 אם ידוע שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 6?
ג. מה ההסתברות שהסכום שהתקבל הוא 4 אם ידוע שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3?
ד. מה ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 אם ידוע שהסכום שהתקבל הוא 4?
ה. האם הידיעה שהסכום שהתקבל הוא 4 משפיעה על ההסתברות שאנחנו מייחסים לכך שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3? (השוו בין התוצאה של סעיף ד ובין ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 אם לא ידוע מהו הסכום שהתקבל).

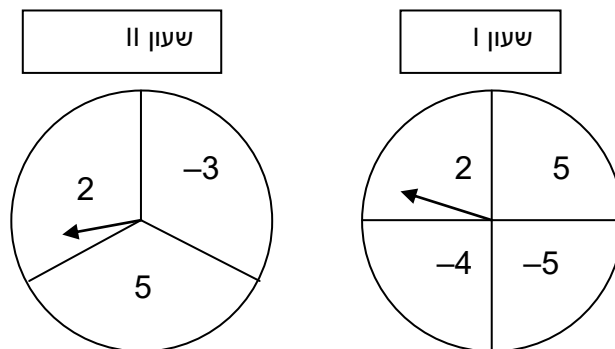
ב. הסתברות של שני מאורעות

1. קשת בענן מופיעה רק אם יורד גשם, ובנוסף קרני השמש מפציעות מבעד לעננים. מה יותר סביר: שירד גשם או שתופיע קשת בענן?
2. בשכבת כיתה ט 100 תלמידים. $\frac{1}{5}$ מתלמידי השכבה מצטיינים במתמטיקה. 0.3 מתלמידי השכבה מצטיינים באנגלית. 60% מבין התלמידים המצטיינים במתמטיקה מצטיינים גם באנגלית.
א. מהי השכיחות היחסית של התלמידים שמצטיינים הן במתמטיקה והן באנגלית?
ב. אם נבחר תלמיד מהשכבה באופן אקראי:
I. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין במתמטיקה?
II. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין באנגלית?
III. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין באנגלית אם ידוע שהוא מצטיין במתמטיקה?
IV. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין הן באנגלית והן במתמטיקה?
3. ההסתברות שקלע יפגע במטרה בירייה הראשונה היא 0.7. ההסתברות שאותו קלע יפגע במטרה בירייה השנייה היא 0.9 אם פגע בפעם הראשונה ו-0.5 אם לא פגע בפעם הראשונה.
א. מהי ההסתברות שהקלע יפגע בשתי הפעמים?
ב. מהי ההסתברות שהקלע יפגע בפעם הראשונה ולא יפגע בפעם השנייה?
ג. מהי ההסתברות שהקלע לא יפגע בפעם הראשונה ויפגע בפעם השנייה?
ד. מהי ההסתברות שהקלע לא יפגע בשתי הפעמים?

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ג. הסתברות של מאורעות זרים, הסתברות של מאורעות בלתי תלויים והסתברות של מאורעות תלויים

1. מטילים שתי קוביות הוגנות: אחת כחולה ואחרת אדומה.
 - א. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3?
 - ב. מהי ההסתברות שבקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4?
 - ג. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 וגם שבקובייה האדומה התקבלה 4?
 - ד. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 או שבקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4?
 - ה. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 או שבקובייה האדומה התקבלה תוצאה זוגית?
 - ו. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 וגם שבקובייה האדומה התקבלה תוצאה זוגית?
 - ז. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 כשידוע שבקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4?
2. בתוך כד יש 12 כדורים, 7 לבנים ו-5 שחורים. מוציאים מהכד שני כדורים באקראי בזה אחר (ללא החזרה).
 - א. מהי ההסתברות שהכדור הראשון היה לבן?
 - ב. מהי ההסתברות שהכדור השני היה שחור?
 - ג. מהי ההסתברות שהכדור השני היה לבן כשידוע שהכדור הראשון היה שחור?
 - ד. מהי ההסתברות שהכדור הראשון היה לבן וגם שהכדור השני היה שחור?
 - ה. האם המאורעות "הכדור הראשון היה לבן" ו-"הכדור השני היה שחור" הם זרים?
 - ו. האם המאורעות "הכדור הראשון היה לבן" ו-"הכדור השני היה שחור" הם בלתי תלויים?
3. מטילים מטבע הוגן 3 פעמים. מהי ההסתברות שבכל 3 ההטלות תתקבל "תמונה"? מטילים מטבע הוגן 7 פעמים. מהי ההסתברות שבכל 7 ההטלות תתקבל "תמונה"?
4. מסובבים את המחוגים של שני ה"שעונים" המשורטטים להלן עד לעצירתם.



- בכל שעון העיגול מחולק לחלקים שווים.
- א. הדס מנצחת אם שני המחוגים נעצרים על מספר חיובי. יובל מנצח אם שני המחוגים נעצרים על מספר שלילי. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהם לנצח.
 - ב. אפרת מנצחת אם המכפלה של שני המספרים שעליהם נעצרו המחוגים היא חיובית. אייל מנצח אם המכפלה של שני המספרים שעליהם נעצרו המחוגים היא שלילית.
 - א. חשבו את ההסתברויות של כל אחד מהם לנצח.
 - א. האם המשחק הוגן?

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

3. טכניקה אלגברית (20 שעות)

א. נוסחאות הכפל (מכפלת דו איבר בדו איבר):

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

פתיחת סוגריים, פירוק לגורמים ופתרון משוואות ריבועיות באמצעות השלמה לריבוע

1. חשבו (מבלי להיעזר בכתיבה) את הביטויים הבאים בהסתמך על נוסחאות הכפל:

$$1001^2$$

$$79^2$$

$$72 \cdot 68$$

2. הדגישו את באופן גיאומטרי והן באופן אלגברי מדוע $31 \cdot 31$ אינו שווה ל- $30 \cdot 30 + 1 \cdot 1$ (דוגמה זו מפריכה את הטענה שסכום הריבועים שווה לריבוע הסכום).

3. פתחו סוגריים וכתבו ביטוי קצר ככל האפשר:

א. $(x + 3)(x - 3)$

ב. $(x + 5)(x - 5) - (2x + 5)^2$

4. נמקו בשתי דרכים שונות מדוע $(a - b)^2 = (b - a)^2$

5. בעבור אילו ערכים של a ו- b מתקיים כי $(a - b)^2 = a^2 - b^2$?

6. בדקו מה מתקבל בשני האגפים של נוסחאות הכפל כש- $a = b$ בביטויים

$$(a + b)^2 \text{ ו- } (a - b)^2$$

7. בדקו האם מתקיים תמיד השוויון $(a - b)^3 = (b - a)^3$. אם כן הסבירו מדוע, ואם לא, תקנו את המשוואה (מבלי לשנות את האגף השמאלי) כך שתתקיים תמיד.

8. כתבו, אם אפשר, את אחד הסימנים $>$, $<$ או $=$ כך שהיחס בין שני האגפים יהיה נכון לכל a

א. $(a + 1)(a - 1)$ _____ a^2

ב. $(a + 1)^2$ _____ $(a - 1)^2$

ג. $a^2 + 1$ _____ $a^2 - 1$

ד. $(a + 1)^2 - 1$ _____ $a^2 + 2a$

ה. $(a + 1)^2$ _____ $(a + 1)(a - 1)$

ו. $(a - 1)^2$ _____ $(a + 1)(a - 1)$

9. פתרו את המשוואה: $(x + 5)^2 = (x - 5)^2$ בדרכים שונות.

10. כתבו את תחום הצבה של x וצמצמו את השברים:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{6x + 8}{9x^2 + 24x + 16}, \quad \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$$

11. נתון ריבוע שאורך צלעותיו $3a$ ס"מ. אם נגדיל זוג צלעות מקבילות שלו ב-2 ס"מ ונקטין את שתי הצלעות האחרות ב-2 ס"מ נקבל מלבן. שטחו של איזה, הריבוע או המלבן, גדול יותר ובכמה?

12. א. השלימו את הביטוי $x^2 + 6x + 5$ לריבוע.

ב. השלימו את הביטוי $4x^2 + 12x + 6$ לריבוע.

13. פתרו את המשוואה $x^2 + 10x = 39$ באמצעות השלמה לריבוע: למשל -

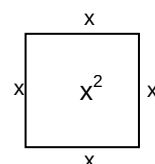
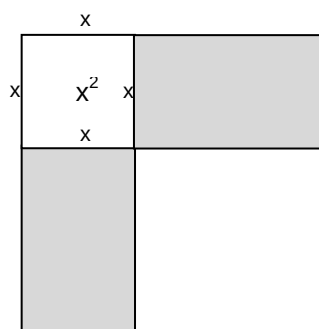
$$x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = 39 + 5^2$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm 8$$

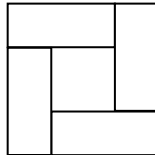
$$x_2 = -13 \quad x_1 = 3$$

הערה: אלחואריזמי הציע פתרון גיאומטרי למשוואה הריבועית. בפתרוננו התעלם מהשורש השלילי:



משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

- א. זהו את האיברים האלגבריים בצורה גיאומטרית.
 ב. השלימו את הפתרון בדרך גיאומטרית.
14. חשבו את 12^3 בהסתמך על נוסחאות הכפל ובהסתמך על חוקי החזקה.
15. הסבירו כיצד השרטוט הבא מדגים את השוויון: $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$



16. השלימו את הביטוי $(\quad + \quad)^2 = \quad + 12x + \quad$ בשלוש דרכים שונות.

17. הראו ללא שימוש במחשבון איזה ביטוי גדול יותר: $\sqrt{4} + \sqrt{7}$ או $\sqrt{5} + \sqrt{6}$

18. א. מצאו דוגמאות שונות שבהן מתקיים $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$
 ב. האם נכון תמיד ש $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$?

19. חשבו את הביטויים החשבוניים:

$$\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2}$$

ב. פירוק של תלת-איבר ריבועי (טרינום ריבועי) $x^2 + ax + c$ ופתרון משוואות ריבועיות

1. פרקו לגורמים את הביטויים הבאים:
 א. $x^2 + 2x + 3x + 6$
 ב. $x^2 - 4x - 2x + 8$
 ג. $x^2 - x + 5x - 5$
2. א. הסבירו מדוע לשתי המשוואות הבאות יש אותם פתרונות:
 $(x - a)(x - b) = 0$
 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$
 ב. פתרו את המשוואה $x^2 - 5x + 4 = 0$ באמצעות פירוק תלת-איבר.
3. שרטטו על מערכת צירים את הגרפים של הביטויים: $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$ ו- $x - 3$
 הסבירו מהו ההבדל בין שני הגרפים.
4. פרקו לגורמים, כתבו תחומי הצבה וצמצמו:
 א. $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$ ב. $\frac{2a^2-32}{4-a}$ ג. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x-3}$
5. פרקו לגורמים, כתבו תחומי הצבה וצמצמו: $\frac{2a^2-a}{4} : \frac{a^2-2a+1}{8a}$
6. פתרו את המשוואות, כתבו תחומי הצבה ובדקו את הפתרון באמצעות הצבה:
 א. $\frac{x}{x^2-5x+6} = 6$ ב. $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ ג. $\frac{6}{x^2-x-6} + \frac{x+1}{x^2-4}$

הנחיה: פרקו את המכנים לגורמים והיעזרו בפירוק זה.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4. פונקציות ריבועיות (30 שעות)

א. הפונקציה $f(x) = x^2$ והייצוג הגרפי שלה

1. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = 25$
2. הציגו באופן גרפי את המשוואה $x^2 = 4$.
3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.
א. האם הנקודות הבאות נמצאות על גרף הפרבולה?
 $(-1, -1)$, $(-0.5, 0.25)$, $(1.1, 1.21)$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$
ב. הסבירו מדוע הנקודה (a, b) אינה על הפרבולה $f(x) = x^2$ כש- $b < 0$.
4. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות הבאות הממוקמות על הפרבולה $f(x) = x^2$: $(1, 0.24)$, $(\quad, 0.49)$. האם קיים רק פתרון אחד? הסבירו.
5. $f(x) = x^2$, $g(x) = x$.
א. בעבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) = g(x)$?
ב. שרטטו את הגרפים של הפונקציות לעיל במערכת צירים אחת, וקבעו בעבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) < g(x)$. הסבירו את הקשר בין תשובתכם ובין תכונות של כפל של מספרים הגדולים מ-0 וקטנים מ-1.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ב. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2$ כאשר $a \neq 0$ - מתיחה, כיווץ ושיקוף

1. פתרו באמצעים אלגבריים ובאמצעים גרפיים את המשוואות הבאות.
צינו אם לא קיים פתרון.

א. $3x^2 = 9$

ב. $3.2x^2 = -x^2$

ג. $3x^2 = -3$

2. ציינו תכונות משותפות לגרפים של כל הפרבולות מהצורה $f(x) = ax^2$?

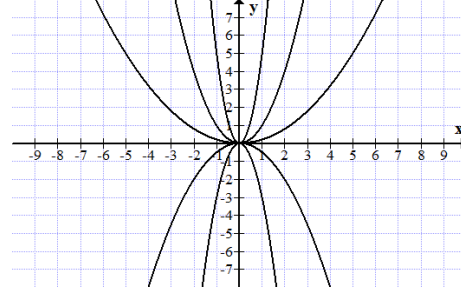
3. שייכו כל נקודה לפונקציה שלה:

$(1,0.5)$, $(2,-4)$, $(3,0.9)$, $(10,1)$

$y = 0.1x^2$, $y = -x^2$, $y = 0.5x^2$, $y = 0.01x^2$

4. שייכו כל גרף לפונקציה:

$y = -0.5x^2$, $y = 5x^2$, $y = x^2$, $y = -3x^2$, $y = 0.2x^2$



5. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = ax^2$

מה היחס בין $f(952.5)$ לבין $g(952.5)$?

6. הנקודה $(3,3)$ ממוקמת על גרף הפונקציה $y = ax^2$.

א. מהו a ?

ב. כתבו שיעורים של עוד שתי נקודות הממוקמות על אותו הגרף.

7. א. מהן כל הנקודות במישור שדרך עוברת פרבולה מהצורה $y = ax^2$?

ב. האם דרך כל שתי נקודות על המישור עוברת פרבולה מהצורה $y = ax^2$ הסבירו.

ג. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + c$ כאשר $a \neq 0$ - הזזות אנכיות

1. נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = 3x^2$.

שרטטו את הגרף של הפונקציה $g(x) = 3x^2 - 2$

2. מצאו את כל הפתרונות (אם קיימים) של המשוואות הבאות:

א. $5x^2 + 2 = 12$

ב. $-3x^2 - 6 = 12$

3. מצאו בדרך אלגברית ובדרך גרפית את נקודות החיתוך של הפרבולה

$y = 4x^2 - 9$ עם ציר ה- x וציר ה- y . כתבו את התחום שבו הפונקציה חיובית ואת התחום שבו היא שלילית.

4. נתון שערכי הפונקציה $f(x) = ax^2 + c$ חיוביים לכל ערך של x .

מה תוכלו לומר על הערכים של הפרמטרים a ו- c ?

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

5. נתון ריבוע. אם נגדיל שתי צלעות נגדיות שלו ב-3 ס"מ ונקטין את שתי הצלעות האחרות ב-3 ס"מ יתקבל מלבן. אם נגדיל כל אחת מצלעות הריבוע פי 2 יתקבל ריבוע אחר (ריבוע ב). שטח ריבוע ב גדול ב-84 סמ"ר משטח המלבן. מה שטח הרבוע הנתון?
6. בעבור אילו ערכים של k יש למשוואה $k = -3x^2 - 5$ שני פתרונות? פתרון אחד? לא קיים פתרון?
7. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x^2 + 10$. מה ההפרש בין שיעורי ה- y של שתי הפונקציות כש- $x = 2$? כש- $x = 952.5$?
8. מצאו את נקודות החיתוך של שתי הפרבולות ומצאו מהו המרחק בין שני הקדקודים שלהן במקרים הבאים:
 א. $y = 2x^2 - 8$ ו- $y = -2x^2 + 8$
 ב. $y = 2x^2 + 8$ ו- $y = -2x^2 + 8$
9. הראו באופן גרפי ובאופן אלגברי כי לגרפים של הפונקציות $y = 2x^2 + 8$ ו- $y = -2x^2 - 8$ אין נקודות חיתוך. מצאו מהו המרחק בין שני הקדקודים של שתי הפרבולות.
- ד. **הרכבה של הזזות אופקיות, אנכיות, מתיחה וכיווץ של הפונקציה $f(x) = x^2$ פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא:**
 $f(x) = (x - p)^2$, $g(x) = a(x - p)^2 + k$, $m(x) = a(x - p)^2$ (כאשר $a \neq 0$)
1. נתונה הפונקציה $y = (x - 2)^2$
 א. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטריה כמו לפונקציה הנתונה ויש לה שתי נקודות חיתוך עם ציר x.
 ב. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטריה כמו לפונקציה הנתונה ולא קיימות לה נקודות חיתוך עם ציר x.
2. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 4)^2 - 9$
 א. מצאו את קדקוד הפרבולה, ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.
 ג. מצאו פונקציה נוספת שיש לה אותו ציר סימטריה כמו של $f(x)$ אבל יש לה נקודת מקסימום.
 ד. שרטטו על אותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות ומצאו את המרחק בין קדקודי הפרבולות.
3. נתונה הפונקציה $y = (x - 2)^2$
 א. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטריה כמו לפונקציה הנתונה ויש לה שתי נקודות חיתוך עם ציר x.
 ב. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטריה כמו לפונקציה הנתונה ולא קיימות לה נקודות חיתוך עם ציר x.
4. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 4)^2 - 9$
 א. מצאו את קדקוד הפרבולה, ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.
 ג. מצאו פונקציה נוספת שיש לה אותו ציר סימטריה כמו של $f(x)$ אבל יש לה נקודת מקסימום.
 ד. שרטטו על אותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות ומצאו את המרחק בין קדקודי הפרבולות.
5. הציגו את הפונקציות הבאות בצורה $y = (x - p)^2 + k$ ומצאו את נקודת המינימום/מקסימום שלהן בדרך אלגברית או גרפית:
 א. $f(x) = x^2 - 6x + 9$
 ב. $g(x) = (x - 4)(x + 4)$
6. א. מצאו פונקציה ריבועית מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ שהקדקוד שלה הוא הנקודה (1,2)
 ב. כמה פונקציות שונות כאלה קיימות? הסבירו.
7. א. מצאו פונקציה ריבועית מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ שהגרף שלה עובר דרך הנקודה (1,2) אך נקודה זו אינה קדקוד הפרבולה.
 ב. כמה פונקציות שונות כאלה קיימות? הסבירו.
8. נתונות שתי פונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$. אילו פרמטרים בשתי הפונקציות שווים, אם ידוע שלשתיהן אותו קדקוד? הסבירו.
9. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2 - 2x$ בצורה $y = a(x - p)^2 + k$ ושרטטו את הגרף שלה.

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ה. הפונקציה הריבועית וייצוגיה האלגבריים השונים

1. א. מצאו את ציר הסימטריה של גרף הפונקציה $y = 2x^2 - 6x + 5$
ב. שרטטו סקיצה של הפרבולה.
2. ציר הסימטריה של גרף הפונקציה $y = (x - 1)(x - 3)$ הוא $x = 2$.
הסבירו בשתי דרכים שונות כיצד ניתן להסיק זאת.
3. לפונקציה $y = (x - 6)(x + 2)$ שתי נקודות חיתוך עם ציר x.
א. מהו קדקוד הפרבולה?
ב. מה צריך להיות הערך p בפונקציה $y = (x - 6)(x + 2) + p$ כדי שקדקוד הפרבולה יהיה $(1, 0)$?
ג. מה צריכים להיות ערכי t בפונקציה $y = (x - 6)(x + 2) + t$ כדי שהפרבולה תהיה חיובית לכל x?
4. להלן רשימה של זוגות של פונקציות זהות. התאימו בין הזוגות. (עשו זאת בדרך אלגברית או בדרך גרפית):
 $y = -(x - 1)^2 + 4$, $y = (x - 1)^2 - 4$, $y = (x + 1)^2 - 4$
 $y = (x - 1)(x + 3)$, $y = x^2 - 4x + 4$, $y = (x + 1)(x - 3)$
 $y = (3 - x)(x + 1)$, $y = (x - 2)(x - 2)$
5. א. כתבו את הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 - 6x + 8$ בשני ייצוגים נוספים.
ב. שרטטו את גרף הפונקציה ומצאו את:
1. נקודות החיתוך עם הצירים
2. ציר הסימטריה ושיעורי הקדקוד
3. תחום העלייה ותחום החיוביות.
ג. חזרו על סעיפים א' ו-ב' עם הפונקציות הריבועיות $g(x) = x^2 - 6x + 9$ ו- $h(x) = x^2 - 6x + 10$.
הסבירו מה התאפשר ומה לא התאפשר ומדוע.

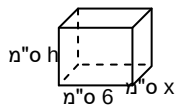
ו. פתרון משוואות ריבועיות ופתרון שאלות מילוליות

1. פתרו את המשוואות הבאות והקפידו לכתוב את תחומי ההצבה:
א. $4(x^2 + 1) + 6 = (x + 6)^2 - (x + 1)(x - 1)$
ב. $\frac{(x + 3)^2 - 4}{x + 1} = 0$
ג. $\frac{x - 3}{x^2 - 49} - \frac{1}{x - 7} + \frac{12}{x^2 + 7x} = 0$
ד. $\frac{1}{4} + \frac{5}{4x^2 - 100} = \frac{2}{10 - 2x}$
2. נתונות הפונקציות:
 $f(x) = -2(x - 4)(x + 2)$
 $g(x) = x - 4$
א. באיזה תחום $f(x) > 0$
ב. באיזה תחום $f(x) < g(x)$
ג. K הוא קדקוד הפרבולה.
כתבו את משוואת הישר המקביל לגרף של g(x) ועובר דרך הנקודה K.
ד. מהו התחום שבו המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ היא חיובית?
נמקו את תשובתכם.
3. נתונים הפרבולה $y = x^2$ ושני הישרים $y = 2x$, $y = -2x$.
הגרפים של שלוש הפונקציות נחתכים בראשית הצירים (O)
א. מצאו נקודת חיתוך נוספת של כל אחד מהישרים עם הפרבולה. סמנו את נקודות החיתוך ב-A ו-B.
ב. מצאו נקודה M כך שהמרחב AOBM יהיה מעוין.

y K

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4. בכנס העוסק ב"חידושים בבניית טיסנים" נפגשו כמה תלמידים. כל אחד מהם לחץ את ידי כל האחרים. כמה תלמידים נפגשו אם בסה"כ נספרו 435 לחיצות ידיים?
5. אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 26 ס"מ. אחד הניצבים ארוך ב-4 ס"מ משתי פעמים הניצב האחר. מהו היקף המשולש?
6. חברת אוטובוסים מציעה לבתי ספר את המחירון הבא: בעבור 40 תלמידים המחיר הוא 100 שקלים לתלמיד. כל תלמיד נוסף מוזיל את המחיר לתלמיד ב-2 שקלים. כמה תלמידים השתתפו בטיול אם עלותו הייתה 4,050 שקלים?
7. יואב רכב על אופניו מרחק של 30 ק"מ. האופניים התקלקלו, והוא המשיך בדרכו בהליכה במהירות קבועה, מרחק של 8 ק"מ. את הדרך כולה עבר יואב ב-5 שעות. מהירות ההליכה הייתה קטנה ב-6 קמ"ש ממהירות הרכיבה. מהי המהירות שבה רכב יואב?
8. מחירו של מוצר היה 8 שקלים. לאחר שמחירו ירד באחוז מסוים ועלה שוב באותו האחוז היה מחירו 7.82 שקלים. בכמה אחוזים ירד ערכו של המוצר בתחילה?
9. נתון דף נייר בצורת מלבן שאורכו 20 ס"מ ורוחבו 10 ס"מ. רוצים לחתוך מתוכו מלבן פנימי כך שרוחב השוליים שיישארו יהיה שווה בארבעת הצדדים. נסמן ב- x את רוחב השוליים שמשאירים בכל צד של המלבן.
- א. מהו הביטוי שמתאר את התחום האפשרי של השוליים?
 (סמנו את התשובה הנכונה).
 (1) $0 < x < 10$
 (2) $5 < x < 10$
 (3) $0 < x < 5$
- ב. מהו רוחב השוליים אם שטח המלבן הפנימי הוא 56 סמ"ר?
10. יש למקם מוט שאורכו 13 ס"מ בתוך תיבה שממדיה הם: רוחב x ס"מ, אורך $x + 1$ ס"מ וגובה $x + 9$ ס"מ. מהם מימדי התיבה הקטנה ביותר שבתוכה אפשר למקם את המוט?
11. נבחר מספר, נעלה אותו בריבוע ונחסיר מהתוצאה את מכפלת המספר שבחרנו ב-4. א. כתבו פונקציה המתאימה למספר שבחרנו את התוצאה הסופית שתתקבל.
 ב. מה צריך להיות המספר שנבחר כדי שתתקבל תוצאה מינימלית (קטנה ביותר)?
 ג. מהי אותה תוצאה מינימלית?
12. נתון מלבן שהיקפו 32 ס"מ.
 א. סמנו את אורך צלע המלבן ב- x וכתבו פונקציה המתאימה לאורך צלע המלבן את שטח המלבן.
 ב. מה צריך להיות אורך צלע המלבן כדי ששטח המלבן יהיה מרבי?
 ג. מהו השטח המרבי?
13. יוצרים שלד של תיבה מחוט מתכתי שאורכו 56 ס"מ. אורך אחד המקצועות בתיבה הוא 6 ס"מ. מה צריכים להיות אורכי שני המקצועות הנוספים כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?
14. המרחק בין שני ישובים, A ו-B הוא 200 ק"מ. מכונת יצאה מהישוב A ליישוב B במהירות 60 קמ"ש. בו זמנית יצא רוכב אופנוע מהישוב B ליישוב C במהירות 50 קמ"ש. הכביש בין היישובים A ו-B מאונך לכביש בין היישובים B ו-C. א. כמה זמן אחרי שכלי הרכב יצאו לדרכם היה ריבוע המרחק ביניהם מינימלי?
 ב. מהו אותו מרחק מינימלי?
15. פתרו את המשוואות הבאות:
 $(2x)^2 + 6 \cdot 2x + 8 = 0$
 $(2x-1)^2 - 6x + 3 - 4 = 0$
 $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$



משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

ז. אי שוויונות ריבועיים

1. התאימו לביטוי האלגברי של האי-שוויון את הייצוג הגרפי המתאים:

	•	•	$-2 < x < 5$
	•	•	$x < -1$ או $x > 3$
	•	•	$x \leq 4$
	•	•	$x \neq -2$

2. פתרו את האי-שוויונות הבאים:

א. $3x^2 - 9x - 10 < -1 - 3x$

ב. $(x + 3)^2 + 5 > 2$

ג. $-(x + 2)^2 \leq 1$

3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 9$. היעזרו בשרטוט גרף מתאים כדי להתאים לכל אי-שוויון את הפתרון שלו:

כל מספר הוא פתרון	•	•	$x^2 + 6x + 9 > 0$
$x = -3$	•	•	$x^2 + 6x + 9 < 0$
$x \neq -3$	•	•	$x^2 + 6x + 9 \geq 0$
אין פתרון	•	•	$x^2 + 6x + 9 \leq 0$

4. פתרו את האי-שוויונות הבאים. הסבירו את דרך הפתרון.

א. $\frac{x^2 - 7x + 10}{(x - 1)^2} < 0$

ב. $\frac{x^2 + 9x + 14}{(x - 1)^2} > 0$

5. במשולש ישר זווית אורך ניצב אחד הוא 5 ס"מ ואורך הניצב השני הוא 6 ס"מ. האריכו את כל אחד מהניצבים ב- x ס"מ. מה יכול להיות תחום הערכים של x אם ידוע ששטח המשולש שהתקבל גדול מ-36 סמ"ר.

6. לפניכם משורטטים גרפים של שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ וכן נתונות נקודות החיתוך של הפונקציות. בעבור כל אחד מארבעת זוגות הגרפים הבאים כתבו את התחום שבו $g(x) > f(x)$

א.

$g(x)$

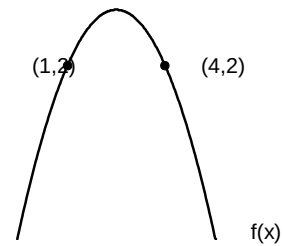
$f(x)$

$(0, 4)$

$(2, 2)$

משרד החינוך
 המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
 הפיקוח על הוראת המתמטיקה

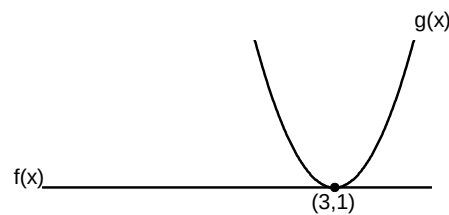
ב. $g(x)$



ג. $g(x)$

$f(x)$

ד.



ח. מערכת משוואות לא ליניאריות של שתי משוואות בשני נעלמים ופתרון שאלות מילוליות

1. פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 20 \\ (x + 6)(y - 3) = 20 \end{cases}$$

2. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה והישר:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$g(x) = 0.5x + 3$$

3. ענו על השאלות הבאות:

א. היקפו של מלבן הוא 32 ס"מ ושטחו 48 סמ"ר. מה הם אורכי הצלעות של המלבן?

ב. היקפו של מלבן הוא 34 ס"מ. אורך האלכסון הוא 13 ס"מ.

מה הם אורכי הצלעות של המלבן?

ג. ברוק עבר מרחק של 30 ק"מ בהליכה במשך זמן מסוים. בדרכו חזרה הגדיל את מהירותו ב-1 קמ"ש

וכתוצאה מכך התקצר זמן ההליכה בשעה אחת. מה הייתה המהירות של ברוק בדרך הלוך?

ד. לקבוצת תלמידים הוזמן מרצה בעלות של 2,000 ש"ח. אם הקבוצה הייתה מונה 20 תלמידים יותר,

העלות לכל תלמיד הייתה פוחתת ב-50 שקלים.

כמה תלמידים מנתה הקבוצה ומה הייתה העלות לכל תלמיד?

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

5. שימושים באלגברה (5 שעות)

דגש 1:

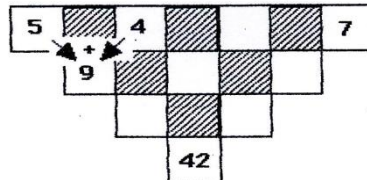
- רשמו שלוש אפשרויות לייצג שלושה מספרים עוקבים כלשהם. חברו את שלושתם ונסו להסיק מכל אחת מהאפשרויות שהצעתם אלו תכונות יש לסכום (איזה סוג מספר מתקבל).
- הראו כי מתקיים השוויון $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2 \frac{2}{3}}$ ומצאו מספרים אחרים שבעבורם מתקיים שוויון כזה.
את הדוגמא ניתן להכליל בשלושה אופנים נפרדים על ידי בחירה שונה של המשתנים. בחירה אחת מובילה להכללת יתר, בחירה אחרת מובילה להכללת חסר, ובחירה נוספת להכללה מועילה.
הכללת יתר: $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
הכללת חסר: $a \cdot \sqrt{\frac{a}{a+1}} = \sqrt{a + \frac{a}{a+1}}$
הכללה מועילה: $a \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a + \frac{a}{b}}$

דגש 2:

- חשבו את 103×97 בעזרת החוק $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ וחשבו 1002^2 בעזרת החוק של ריבוע של סכום.
- התבססו על ידיעותיכם על הפונקציה הריבועית כדי לקבוע איזה משני האומדנים המוצעים (90×50) או (80×60) הוא קירוב טוב יותר ל- 85×55 (הערה: לחקירה זאת ניתן להיעזר בפונקציה $f(x) = x(140 - x)$ ובייצוג הגרפי שלה תוך כדי ניתוח השתנותה).

דגש 3:

- בסידור שלהלן, יש למלא את התאים הריקים במספרים, כך שבכל תא לבן יופיע הסכום של המספרים שבתאים הלבנים הסמוכים שבשורה שמעליו. בסידור זה, רק ה"קדקודים" נתונים (כלומר, 5, 7 ו-42), וכדוגמה מילאנו את אחד התאים. הציבו מספרים במשבצות הלבנות כך שהכלל יתקיים בכל התאים. האם יתכן יותר מפתרון אחד? נמקו.



- להלן דוגמא של מכפלה בה שני גורמיה הם מספרים דו-ספרתיים: 31×39 . חשבו את תוצאתה. כעת החליפו את סדר הספרות בתוך כל אחד מהגורמים וחשבו את התוצאה של המכפלה החדשה (13×93) . מה הקשר בין שתי התוצאות? האם קשר זה מקרי (מתקיים רק בדוגמה זאת, הוא קורה לפעמים או היא תופעה כללית עבור כל מכפלה בין שני גורמים דו-ספרתיים? נמקו

דגש 4:

- פתרו את המשוואה $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x+1}$ בעזרת הנוסחה של פתרון משוואה ריבועית (ועל ידי החלפת משתנים).

- כיצד ניתן לדעת מבלי לפתור כי אין פתרון למשוואה $\frac{2x+3}{4x+6} = 2$.

דגש 5:

- לבטח הנכם מכירים מספרים ראשוניים גדולים מ-19. אבל להלן "הוכחה" לכך שלא קיימים מספרים ראשוניים גדולים מ-19: ניקח מספר n כלשהו, כך ש $n > 19$, אם n זוגי, אזי הוא לא ראשוני. אבל, אם n

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

הוא אי-זוגי, אזי המספרים $\frac{n-1}{2}$ ו- $\frac{n+1}{2}$ הם מספרים טבעיים ומתקיים השוויון הבא

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

וזוהו ביטוי מהצורה $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ כלומר ניתן לבטא את n

כמכפלה של שני גורמים ולכן הוא איננו מספר ראשוני. כיצד תיישב את הסתירה: מצד אחד אתם מכירים מספרים גדולים מ-19 שהם ראשוניים ומצד שני יש "הוכחה" שאין כאלה?

2. בחרו מספר אי-זוגי כלשהו, העלו אותו בריבוע ותחסירו 1 מהתוצאה. הראו כי המספר שהתקבל הוא תמיד כפולה של 8.

3. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

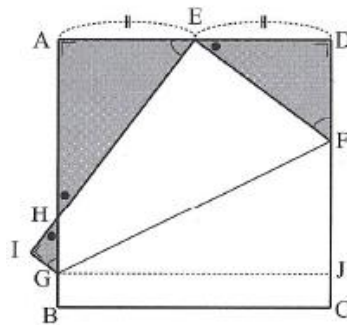
דגש 6:

1. להלן אמירה: "נתונים שני מספרים חיוביים – הסכום של הופכיהם שווה להופכי של סכומם". האם אמירה זו מתקיימת עבור כל זוג מספרים, עבור זוגות מסויימים בלבד, או אינה מתקיימת עבור אף זוג מספרים. נמקו.

2. מצאו שני מספרים טבעיים a ו- b שמקיימים $4a + 4b - ab = 8$

דגש 7:

1. קחו נייר בצורת ריבוע כלשהו. על ידי קיפול, סמנו את אמצע קטע של אחת מצלעותיו. כעת הביאו על ידי קיפול את אחד הקדקודים של הצלע הנגדית (לזו שבה מסומן האמצע) אל נקודת האמצע שסימנתם (כמו שמראה הציור):



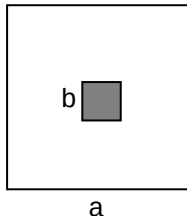
הראו כי בכל אחד משלושת המשולשים המסומנים באפור, היחס בין הצלעות הוא 3:4:5

2. נתונים שני מספרים חיוביים a ו- b . להלן שלשה ביטויים אלגבריים $2a$, $\sqrt{2}(a-b) + 2b$,

$$\sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

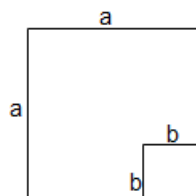
כל אחד מהביטויים הנ"ל מבטא מרחק הליכה אפשרי בין פינות הכיכר

ריבועית (שאורך צלעה a) אשר במרכז ערוגה ריבועית (אשר אורך צלעה b) ואשר אסור לעבור עליה. סמנו על השרטוט כל אחד מהמסלולים וציינו איזה הוא הקצר מביניהם.



3. א. חשבו את הערך של הביטוי $a^2 - b^2$ על פי המשוואה הבאה:

$$(a \neq b) \quad \frac{a-b}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{3}{b-a} = a+b$$



ב. שטחו של המשושה שלפניכם הוא 32 סמ"ר.

א. איזה מבין הערכים הבאים יכול להיות הערך של a :

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

5.5, $\sqrt{32}$, 7. נמקו

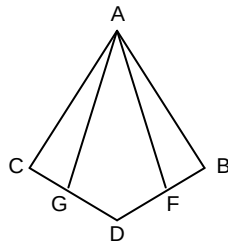
II. מה יכולים להיות הערכים של a, ו-b אם ידוע שהם מספרים

טבעיים?

תחום גאומטרי

2. דלתון ומשולש שווה שוקיים

1. הסבירו מדוע כל ריבוע הוא דלתון.
2. את המשפט: "האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה" צריך לדעת לנסח באופן הבא:
אם מרובע הוא דלתון (כלומר אם יש לו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו), **אזי** האלכסונים שלו מאונכים זה לזה.



3. את המשפט בדוגמה 2 יש לדעת לנסח באופן הבא.
נתון: מרובע ABCD, $AD=AB$ וגם $DC=BC$
צ"ל: $AC \perp BD$

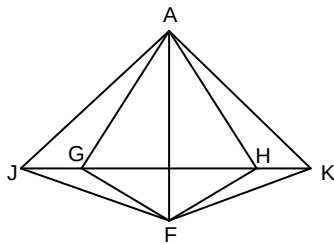
4. המרובע ABDC הוא דלתון. ($BD=CD$, $AC=AB$)
F נקודה על הצלע BD, ו-G נקודה על הצלע CD.
נתון: $BF = CG$
צריך להוכיח: המרובע AGDF הוא דלתון.
לפניכם הוכחה.

הסבירו כל שלב בה:
נראה שני שוויונות: $AG=AF$ וגם $DG=DF$.
כדי להראות את השוויון הראשון נציג שני משולשים החופפים זה לזה: $\triangle ABF \cong \triangle ACG$.
 $AB=AC$ (צלעות סמוכות שוות בדלתון לפי הנתון).
 $\angle B = \angle C$ (בדלתון זוויות הצד שוות זו לזו).
 $BF=CG$ (נתון).

$\Downarrow$
 $\triangle ABF \cong \triangle ACG$ (לפי צלע-זווית-צלע).

$\Downarrow$
 $AF=AG$ (במשולשים חופפים צלעות מתאימות שוות זו לזו).
 $BD=CD$ (צלעות סמוכות בדלתון, לפי הנתון).
 $FD=GD$ (הפרשים של קטעים שווים) ($BD-BF = CD-CG$)

$\Downarrow$
($FD=GD$, $AF=AG$) דלתון AGDF

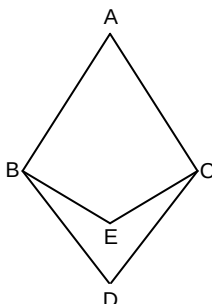


5. דלתון AHFG. J, K נקודות על המשך האלכסון המשני GH משני צדדיו. $HK=GJ$
הוכיחו שהמרובע AKFJ הוא דלתון.
רמז: האלכסון הראשי הוא ציר סימטריה המרמז על קיומם של 4 זוגות של משולשים חופפים, שמתוכם שני זוגות רלוונטיים להוכחה.

6. המרובעים ACEB ו-ACDB הם דלתונים.
($CD=BD$, $CE=BE$, $AC=AB$)

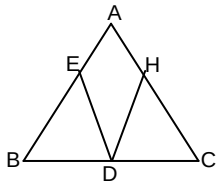
א. הוכיחו ש $\angle ECD = \angle EBD$

ב. הוכיחו שהמרובע DCEB הוא דלתון.

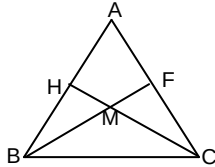


משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה



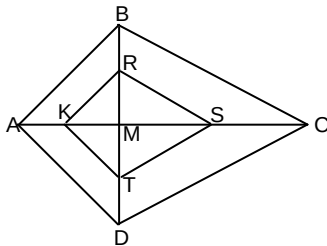
7. $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים, ו- D אמצע הבסיס BC .
 E נקודה על השוק AB ו- H נקודה על השוק AC
 כך ש- $AH=AE$.
 א. הוכיחו כי $DH=DE$
 ב. הוכיחו כי המרובע $AEDH$ הוא דלתון.



8. א. הוכיחו שבמשולש שווה שוקיים ABC התיכונים לשוקיים שווים זה לזה ($BF=CH$).
 ב. נסמן את נקודת חיתוך התיכונים לשוקיים ב- M .
 הראו כי $AHMF$ הוא דלתון.

9. אורכו של האלכסון הראשי בדלתון הוא 28 ס"מ ואורכו של האלכסון המשני הוא 48 ס"מ.
 האלכסון המשני מחלק את האלכסון הראשי ביחס של $5:9$.

- א. מצאו את היקף הדלתון ואת שטחו.
 ב. קבעו כיצד היו משתנים, אם בכלל, שטח הדלתון והיקפו, אילו האלכסון הראשי היה מחולק ביחס של $6:9$ או של $9:9$.

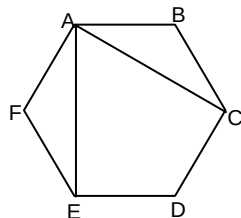


10. M היא נקודת חיתוך האלכסונים בדלתון $ABCD$.
 הנקודות T, S, R, K ממוקמות באמצעי הקטעים המחברים את קדקודי הדלתון עם M .
 הוכיחו כי $KRST$ הוא דלתון.

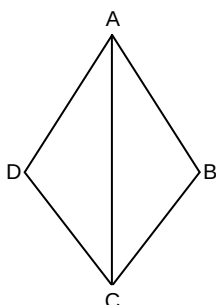
11. $(0,2)$ ו- $(3,0)$ הם שיעורים של שני קדקודים סמוכים של דלתון.

- א. מצאו שיעורים של עוד שתי נקודות שיכולות להיות שני הקדקודים האחרים. כמה דלתונים שונים אפשר למצוא? נמקו.
 ב. האם תיתכנה שתי נקודות כאלה שאינן על הצירים?

•
•



12. מהו סכום הזוויות הפנימיות של דלתון? הוכיחו.
 13. $ABCDEF$ הוא משושה משוכלל. הוכיחו כי $ACDE$ דלתון.



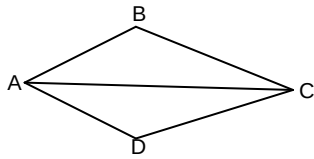
14. במרובע $ABCD$ חוצה האלכסון AC את הזוויות הנגדיות A ו- C .
 הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
 ציינו את השרשרת ההיסקית המובילה מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון:

משרד החינוך

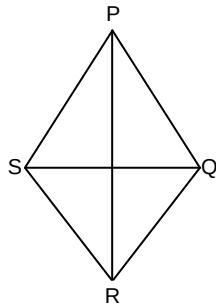
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

- א. מהנתונים נובעת חפיפת המשולשים ABC ו-ADC.
 ב. מרובע שבו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו הוא דלתון.



15. במרובע ABCD נתון כי $AD=AB$, וכי האלכסון AC חוצה את הזווית A. הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
 פרטו את הרשרת היסקית המובילה מהנתונים קיום תנאי ההגדרה של דלתון.

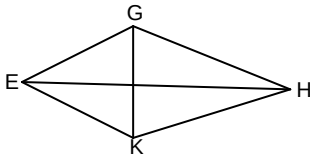


16. האלכסון PR במרובע PQRS מאונך לאלכסון השני וחוצה אותו. הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
 פרטו שתי שרשרות היסקיות המובילות מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון:
 שרשרת א:

- א. מהנתונים נובעת חפיפת המשולשים PHQ ו- PHS (חיתוך האלכסונים).
- ב. נובע כי זוג של צלעות סמוכות שוות זו לזו.
- ג. הליך דומה תקף לגבי המשולשים RHQ ו- RHS.
- ד. זוגות הצלעות הסמוכות השוות זו לזו הם זרים.
- ה. מרובע שבו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו הוא דלתון.

שרשרת ב:

- א. במשולש PSQ התיכון מתלכד עם הגובה ולכן הוא שווה שוקיים.
- ב. במשולש RSQ התיכון מתלכד עם הגובה ולכן גם הוא שווה שוקיים.
- ג. זוגות הצלעות הסמוכות השוות זו לזו הם זרים.
- ד. מרובע שבו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו הוא דלתון.

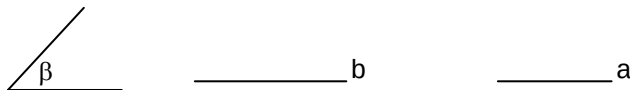


17. האלכסון EH במרובע EGHK חוצה את הזווית E ומאונך לאלכסון האחר. הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
 פרטו שתי שרשרות היסקיות המובילות מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון.

3. בניות בסיסיות

דוגמאות שמעבר לבניות הבסיסיות:

1. הראו כי אפשר לבנות שני משולשים שאינם חופפים כשנתונות שתי צלעות, וזווית שאיננה כלואה ביניהן.
2. נתונים שני קטעים וזווית.



- הדגימו כי הדרישות הבאות אינן מספיקות כדי לאפיין צורה יחידה.
 א. בנו שני דלתונים שונים שבהם אורכי הצלעות הן a ו- b.
 ב. בנו שני דלתונים שונים (דלתון קמור ודלתון קעור) שבהם צלע a, וזווית הראש הן β ו- 2β .
 ג. בנו שני דלתונים שונים שבהם האלכסון הראשי הוא a, והאלכסון המשני הוא b.

3. הראו כי אי-אפשר לבנות דלתונים שבהם:

- א. האלכסון הראשי מחלק את האלכסון המשני ביחס של 1 : 2.
- ב. הצלעות הן a ו- b, ואחד האלכסונים הוא c, כש- c ארוך מ- a+b.
- ג. הצלעות a ו- b כ"ל, והזוויות בקדקודים הראשיים שוות זו לזו.



4. הראו כי הדרישות הבאות מאפיינות צורה יחידה. הסבירו מדוע.

- א. דלתון שבו נתונות הצלעות a ו- b, ונתון האלכסון הראשי c.
- ב. דלתון קמור שבו נתונות הצלעות a ו- b, והזווית בין שתי הצלעות הקצרות היא זווית במשולש שווה צלעות.



- ג. דלתון קעור שבו נתון האלכסון הראשי a, וזווית הראש הן β ו- 2β .

5. לפניכם שתי תכניות לבניית דלתון קמור שבו צלע a, אלכסון משני b ואלכסון ראשי c. קבעו איזו מהתכניות מבוססת היטב ובאיזו יש פגם. נמקו את התשובה. תוכנית ראשונה:

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

א. שרטטו קטע באורך b . סמנו את קצותיו באותיות B, D . אלה הם שני הקדקודים של הדלתון שבקצות האלכסון המשי.

ב. העבירו אנך אמצעי לקטע. על ישר זה יעבור האלכסון הראשי של הדלתון.

ג. מהנקודה B , חוגו קשת שרדיוסה a . סמנו באות A את נקודת החיתוך שלה עם האלכסון הראשי.

ד. מהנקודה A הקצו על האנך האמצעי קטע c החותך את הקטע BD . סמנו את קצה הקטע באות C .

ה. $ABCD$ הוא הדלתון המבוקש.

תוכנית שנייה:

א. שרטטו קטע באורך c . סמנו את קצותיו באותיות A, C . אלה הם שני הקדקודים של הדלתון שבקצות האלכסון הראשי.

ב. מהנקודה A חוגו מעגל שרדיוסו a . הקדקודים B ו- D יהיו מונחים על מעגל זה.

ג. העבירו אנך לאלכסון AC באורך הקטע b , כך שיחתך עם המעגל בנקודות B ו- D .

ד. $ABCD$ הוא הדלתון המבוקש.

6. לפניכם שלוש תכניות לבניית משולש שווה שוקיים על פי השוק וזווית בסיס.

קבעו אילו מהתכניות מבוססות היטב ובאיזו יש פגם. נמקו את התשובה.

תוכנית ראשונה:

העתיקו את הזווית הנתונה. מקדקוד הזווית הקצו על אחת מהשוקיים של הזווית את הקטע הנתון. מהקצה

השני של הקטע חוגו קשת ברדיוס שאורכו הקטע הנתון. המשיכו את שוק הזווית שעליה לא הקציתם את

הקטע הנתון עד לנקודה בה השוק נחתך עם הקשת. חברו בין קצות הקטעים. התקבל המשולש שווה

השוקיים המבוקש.

תוכנית שנייה:

העתיקו את הזווית הנתונה. מקדקוד הזווית הקצו על אחת מהשוקיים של הזווית את הקטע הנתון. בקצה

הקטע העתיקו את הזווית הנתונה. המשיכו את שוקי הזווית שעליהן לא הקציתם את הקטע הנתון עד

לנקודה בה השוקיים נחתכים זה עם זה. התקבל המשולש שווה השוקיים המבוקש.

תוכנית שלישית:

שרטטו זווית כפולה לזווית הנתונה. שרטטו את הזווית הצמודה לזווית הכפולה. זוהי זווית הראש במשולש.

על כל אחת משוקי הזווית הקצו קטע באורך השוק הנתונה. חברו את שני קצות השוקיים. התקבל

המשולש שווה השוקיים המבוקש.

3. ישרים מקבילים וטרפז

1. בנו טרפז שווה שוקיים בהינתן הבסיס הארוך, הגובה, והשוק.

2. במשולש ABC העבירו ישר מקביל לצלע BC החותך את הצלע AB בנקודה D ואת הצלע AC בנקודה E .

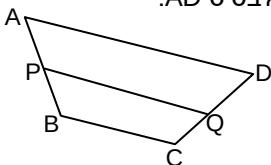
א. הוכיחו כי המרובע $DBCE$ הוא טרפז.

ב. נתון: במשולש ABC זווית A בת 70° וזווית B

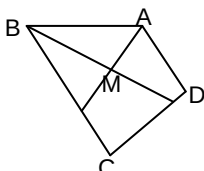
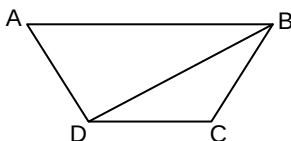
בת 40° . מצאו את כל זוויות הטרפז.

ג. הראו כי בכל טרפז סכום הזוויות הפנימיות הוא 360° .

3. בטרפז $ABCD$ (AD מקביל ל- BC) P על השוק AB , ו- Q על השוק CD כך ש- PQ מקביל לבסיס AD . הראו כי המרובע $PBCQ$ הוא טרפז.



4. בטרפז $ABCD$ (AB מקביל ל- DC) האלכסון BD חוצה את הזווית B . הוכיחו כי משולש BCD הוא משולש שווה שוקיים.

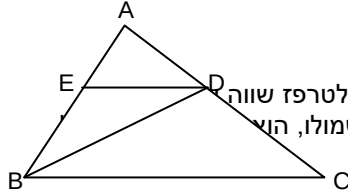


משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים הפיקוח על הוראת המתמטיקה

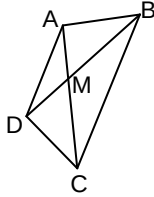
5. בטרפז ABCD (AD מקביל ל-BC) חוצה הזווית B נפגש עם חוצה הזווית A בנקודה M. הוכיחו כי המשולש ABM הוא ישר זווית.

6. במשולש ABC חוצה הזווית B חותך את הצלע AC בנקודה D. E נקודה על הצלע AB המקיימת: $EB=ED$. הוכיחו כי EBCD הוא טרפז.

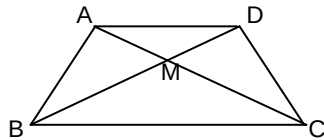


7. א. הוכיחו: אלכסון במחומש משוכלל מחלק אותו למשולש שווה שוקיים ולטרפז שווה. ב. הראו כי הקטע המחבר קדקוד במחומש המשוכלל עם אמצע הצלע שמולו, הווה הטרפז המתאים.

8. בטרפז ABCD (AD מקביל ל-BC) M היא נקודת חיתוך האלכסונים. הראו שמשולש ADM דומה למשולש CBM.

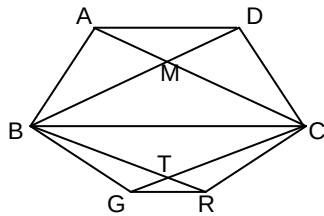


9. הראו כי בטרפז שווה שוקיים האנך האמצעי לבסיס אחד הוא האנך האמצעי גם לבסיס האחר.

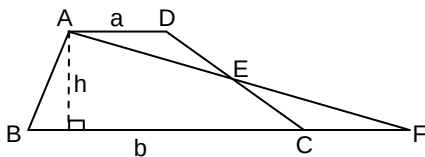


10. בטרפז שווה שוקיים ABCD (AD מקביל ל-BC, $AB=DC$) M היא נקודת חיתוך האלכסונים:

- א. הראו כי המשולשים ADM ו-CBM הם משולשים שווים שוקיים.
ב. הראו כי משולש MDC חופף למשולש MAB.



11. בטרפז שווה שוקיים ABCD (AD מקביל ל-BC, $AB=DC$) M היא נקודת חיתוך האלכסונים. בטרפז שווה שוקיים GBCR (GR מקביל ל-BC, $GB=RC$) T היא נקודת חיתוך האלכסונים. הוכיחו כי המרובע MBTC הוא דלתון.



12. בטרפז ABCD (AD מקביל ל-BC) הנקודה E היא אמצע השוק DC. נסמן: a הוא הבסיס AD, b הוא הבסיס BC, ו-h הוא גובה הטרפז. האריכו את הקטע AE עד לנקודת חיתוכו עם המשך הבסיס BC. F היא נקודת החיתוך.

- א. הוכיחו: משולש ADE חופף למשולש FCE.
ב. בטאו באמצעות a, b, h את שטח המשולש ABF.
ג. בטאו באמצעות a, b, h את שטח הטרפז ABCD.

13. הגובה של טרפז הוא 12 ס"מ, אורך הבסיס הקצר 7 ס"מ, ואורכי שתי השוקיים 13 ס"מ ו-15 ס"מ. מצאו את אורך הבסיס הארוך של הטרפז.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4. מקבילית, ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיה

1. דרך אפשרית לתאר שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרת המקבילית להיות חוצי זוויות סמוכות במקבילית מאונכים זה לזה היא:
 - א. האלכסון במקבילית מחלק אותה לשני משולשים חופפים לכן...
 - ב. הזוויות הנגדיות שוות זו לזו
 - ג. מטעון ב ומכך שסכום הזוויות במרובע הוא 360° נובע ש...
 - ד. סכומן של זוויות סמוכות במקבילית הוא 180° ולכן...
 - ה. סכומן של חצאי זוויות סמוכות במקבילית הוא 90° ולכן...
 - ו. הזווית השלישית במשולש הנוצר משני חוצי הזוויות הסמוכות וצלע המקבילית היא זווית ישרה.
2. מרובע שבו שתי צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית: דרך אפשרית לתאר שרשרת היסקים המובילה משוויון והקבלה של זוג צלעות לתנאי ההגדרה של מקבילית היא:
 - א. העברת אלכסון במרובע הנתון מחלק אותו לשני משולשים חופפים (על פי צלע משותפת, זוג זוויות המתחלפות בין צלעות מקבילות, ואותו זוג צלעות השוות זו לזו לפי הנתון).
 - ב. בשל חפיפת המשולשים, כל הזוויות המתאימות שלהם שוות זו לזו.
 - ג. בין זוג הצלעות הנותר והאלכסון, נוצרו שתי זוויות מתחלפות השוות זו לזו, ולכן זוג הצלעות הללו מקבילות זו לזו.
 - ד. התקבל מרובע שבו יש שני זוגות של צלעות המקבילות זו לזו.
3. יש לדעת להבדיל בין שני המשפטים הבאים על פי מה שנתון ומה שצריך להוכיח:
 - א. האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.
 - ב. מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.
4. יש לדעת להבדיל בין שני הכיוונים של סדרת ההיסקים הבאה כמוכיחים את שני המשפטים שבדוגמא 3. שני הכיוונים מתבססים על התבוננות בשני משולשים הנוצרים מהאלכסונים במרובע אשר להם זוויות קדקודיות (השוות זו לזו).

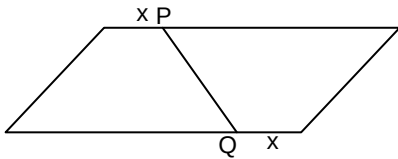
א. הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.	ח. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.	ח. מרובע שבו שני זוגות של צלעות מקבילות הוא מקבילית.
ב. הזוויות בשני המשולשים, שליד צלע המקבילית, מתחלפות בין שתי צלעות מקבילות.	ז. הצלעות המקבילות זו לזו הן גם שוות זו לזו כיוון שהן מתאימות במשולשים חופפים.	ז. באופן דומה, ניתן להראות שגם שני המשולשים האחרים שנוצרים על ידי חצאי האלכסונים חופפים. לכן הצלעות הנותרות אף הן מקבילות זו לזו.
ג. זוויות אלה שוות.	ו. נוצרו שתי זוויות מתחלפות השוות זו לזו, ולכן זוג הצלעות הללו מקבילות זו לזו.	
ד. מהטיעונים הקודמים נובע ששני המשולשים חופפים זה לזה.	ה. הזוויות בשני המשולשים, שליד צלע המקבילית, שוות זו לזו (על סמך חפיפת המשולשים)	
ה. הצלעות המתאימות (החלקים של כל אלכסון) במשולשים הללו שוות זו לזו.	ד. מהטיעונים הקודמים נובע ששני המשולשים חופפים זה לזה.	
ו. כל אלכסון מחולק לשני חלקים שווים בנקודת החיתוך שלהם.	ג. לשני המשולשים זוויות קדקודיות השוות זו לזו.	
	ב. הצלעות המתאימות (החלקים של כל אלכסון) במשולשים הללו שוות זו לזו.	
	א. כל אלכסון מחולק לשני חלקים שווים בנקודת החיתוך שלהם	

משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים

הפיקוח על הוראת המתמטיקה

5. להלן דוגמאות למשפטים שהמשפטים הפוכים להם אינם נכונים:
- א. במקבילית האלכסון מחלק אותה לשני משולשים חופפים, אבל לא כל מרובע שהאלכסון מחלק אותו לשני משולשים חופפים הוא מקבילית (הוא יכול להיות גם דלתון).
- ב. במקבילית חוצי זוויות סמוכות מאונכים זה לזה, אבל לא כל מרובע שבו זוג חוצי זוויות סמוכות מאונכים זה לזה הוא מקבילית (הוא יכול להיות גם טרפז).
6. רצוי להציג לתלמידים יותר ממהלך היסקי אחד להוכחה. להלן שלושה מהלכים שונים להוכחת המשפט: בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
- א. שני הבסיסים בטרפז מקבילים ולכן הגבהים המורדים משני קצות הבסיס הקטן לבסיס הגדול שווים זה לזה. שני המשולשים המתקבלים ליד השוקיים חופפים זה לזה (צלע, צלע וזווית ישרה). לכן זוויות הבסיס שוות זו לזו.
- ב. דרך אחד מקדקודי הטרפז מעבירים מקביל לשוק הנגדית. מתקבלת מקבילית שצלעותיה מונחות על ישרי הבסיסים, על שוק ועל המקביל לשוק. הצלעות הנגדיות במקבילית (השוק והמקבילה לה) שוות זו לזו. מתקבל משולש שווה שוקיים שבו זווית הראש בקדקוד הטרפז שעליו הועבר המקביל לשוק, ושוקי המשולש הם שוק הטרפז והמקביל לשוק האחרת. שתי זוויות הבסיס במשולש שווה השוקיים שוות זו לזו.
- i. אם המקביל הועבר דרך קצה הבסיס הקטן, אז אחת מזוויות הבסיס של המשולש היא גם זווית בטרפז. הזווית השנייה במשולש היא זווית מתאימה בין מקבילים לזווית הבסיס השנייה של הטרפז ולכן שתי זוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו.
- ii. אם המקביל הועבר דרך קצה הבסיס הגדול, אז אחת מזוויות הבסיס של המשולש היא זווית נגדית במקבילית לזווית בסיס בטרפז. הזווית השנייה במשולש היא זווית מתחלפת בין מקבילים לזווית הבסיס השנייה של הטרפז ולכן שתי זוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו.
- ג. מארכים את שוקי הטרפז עד לפגישתם. בשל שוויון כל הזוויות (זווית משותפת וזוויות מתחלפות בין מקבילים) מתקבלים שני משולשים הדומים זה לזה. בגלל פרופורציית הדמיון ובגלל שוויון שוקי הטרפז שני המשולשים הללו הם שווי שוקיים. לכן זוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו.
7. א. הוכיחו בשתי דרכים שונות כי המקבילית הנתונה מחולקת לשני חלקים שווי שטח.
- ב. הראו כי אמצע הקטע PQ הוא מרכז הסימטריה הסיבובית של המקבילית.



5. מלבן, ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיו

1. קבעו איזו מבין הטענות הבאות נכונה בכל מקרה, איזו מהן שקרית בכל מקרה איזו מהן עשויה להיות נכונה רק במקרים מסוימים.
- חוצי זוויות סמוכות במלבן מאונכים זה לזה.
- חוצי זוויות נגדיות במלבן מקבילים זה לזה.
- אלכסוני המלבן מאונכים זה לזה.
- אם במלבן הזווית בין אלכסון וצלע היא 60° , אזי האלכסון ושתי צלעות סמוכות של המלבן יוצרים משולש שווה שוקיים.
2. הפריכו באמצעות דוגמה נגדית את הטענות שקבעתם שאינן נכונות בכל מקרה.
3. הוסיפו תנאי או תנאים לטענות שקבעתם שהן עשויות להיות נכונות במקרים מסוימים בלבד, כך שתתקבל טענה שהיא נכונה בכל מקרה. הוכיחו את הטענה.
4. שערו איזו מהטענות הבאות היא נכונה, בדקו את השערתכם והוכיחו את הטענה או הפריכו אותה:
- מרובע שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא מלבן.
- אלכסוני המלבן מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.
- חוצי הזוויות במלבן יוצרים מלבן.
- מקבילית שבה סכום של זוג זוויות נגדיות הוא 180° היא מלבן.
5. מנקודה שעל היקף המלבן מורידים אנך לכל אחד מאלכסוני המלבן. שערו כיצד סכום האורכים של שני האנכים תלוי, אם בכלל, בנקודה שנבחרה. בדקו את השערתכם והוכיחו אותה.

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

6. הוכחה על דרך השלילה

- אפשר להעלות אנך אחד בלבד מנקודה על ישר. (הטענה נוגעת ליחידות. הקיום ידוע כבר).
א. שתי אפשרויות: או שאפשר להעלות אנך יחיד או שאפשר להעלות יותר מאנך אחד.
ב. בירור השאלה מה היה קורה אילו היה אפשר להעלות שני אנכים שונים מנקודה אחת?
ג. התבהרות: היו מתקבלות שתי זוויות ישרות וזרות שמוכלות ממש בזווית שטוחה.
ד. תוצאה זו סותרת את הידוע שסכום של שתי זוויות ישרות הוא זווית שטוחה.
ה. נותרת אפשרות יחידה שהיא: אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

7. מעוין וריבוע

1. קראו את התיאור הבא, ושרטטו תרשים מתאים. לאחר מכן ענו על השאלות.
ABCD מקבילית. N אמצע הצלע AB. E נקודה כלשהי על הצלע CD כך ש- AE מאונך ל- BE.
א. האם ניתן להסיק ש- NBCE הוא מעוין? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע לא.
ב. מוסיפים לשאלה נתון נוסף: $AB=2BC$. האם ניתן להסיק ש- NBCE הוא מעוין? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע לא, ורשמו נתון נוסף חלופי אשר ממנו ניתן יהיה להסיק ש- NBCE הוא מעוין.
2. קראו את התיאור הבא, ושרטטו תרשים מתאים. לאחר מכן ענו על השאלה.
נתון ריבוע ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.
G נקודה על האלכסון BD כך ש AG חוצה זווית DAO.
H נקודה על האלכסון BD כך ש CH חוצה זווית BCO.
הראו שכאשר מסובבים את הריבוע בחצי סיבוב סביב הנקודה O, הנקודה G תהיה מונחת במיקום הקודם של הנקודה H.
הוכיחו כי המרובע AGCH הוא מעוין.
3. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:
א. כל תכונות המעוין תקפות בריבוע, ולכן כל מעוין הוא ריבוע.
ב. כל תכונות המלבן תקפות בריבוע, ולכן כל ריבוע הוא מלבן.
ג. כל תכונות הדלתון תקפות בריבוע, ולכן כל ריבוע הוא דלתון.
ד. כל תכונות הריבוע תקפות במעוין, ולכן כל ריבוע הוא מעוין.
ה. דלתון שהוא גם מקבילית הוא ריבוע.
4. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:
א. מרובע שבו האלכסונים שווים זה לזה ומאונכים זה לזה הוא ריבוע.
ב. מרובע שבו שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו והאלכסונים שווים זה לזה ומאונכים זה לזה הוא ריבוע.
ג. מרובע שבו האלכסונים חוצים את כל זוויותיו הוא מעוין.
ד. מרובע שבו הקטעים המחברים את אמצעי הצלעות יוצרים מעוין הוא מלבן.
ה. מרובע שבו חוצי הזוויות יוצרים מלבן הוא מלבן.