

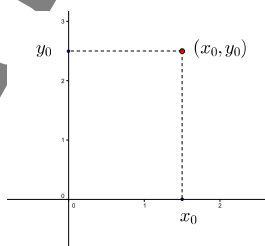
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο ή στον χώρο. Σε αυτό το φυλλάδιο αναφέρουμε τα βασικότερα συστήματα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ και δίνουμε τις κυριότερες ιδιότητες.

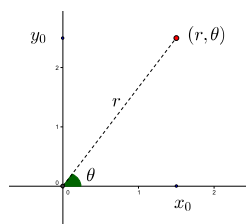
1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$

1.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Γενικά, για να προσδιορίσουμε ένα σημείο πάνω στο επίπεδο χρειαζόμαστε δύο πληροφορίες (συντεταγμένες). Υπάρχουν όμως πολλοί τρόποι για να το κάνουμε αυτό. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι αυτή που χρησιμοποιείται στο σκάκι και στο επιτραπέζιο παιχνίδι ναυμαχία: η θέση προσδιορίζεται από ένα γράμμα (που συμβολίζει τη γραμμή) και έναν αριθμό (για τη στήλη). Η μέθοδος αυτή προκύπτει από το λεγόμενο *Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων*, το οποίο φέρει το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Rene Descartes (1637). Την ίδια εποχή παρόμοιο σύστημα χρησιμοποιούσε και ο Fermat, ενώ αργότερα έγινε γνωστό ότι και ο Nicole Oresme (Γάλλος κληρικός του 14ου αιώνα) χρησιμοποιούσε παρόμοιες κατασκευές. Η ιδέα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων είναι πολύ απλή: χρησιμοποιούμε ένα ζεύγος κάθετων ευθειών (άξονες) και κάθε σημείο προσδιορίζεται από την απόσταση της προβολής του από το σημείο αναφοράς (δηλαδή το σημείο τομής των δύο αξόνων) σε κάθε έναν από τους δύο άξονες (σχήμα 1α). Συνήθως το σημείο αναφοράς ονομάζεται O και οι δύο διαβαθμισμένοι άξονες x και y αντίστοιχα. Επομένως κάθε σημείο προσδιορίζεται από δύο αριθμούς, έναν για τον άξονα x και έναν για τον άξονα y .



(α) Καρτεσιανές Συντεταγμένες

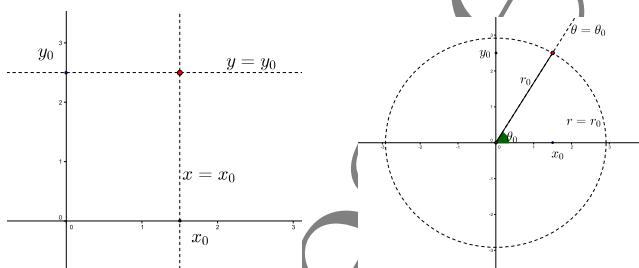


(β) Πολικές Συντεταγμένες

Σχήμα 1: Προσδιορισμός ενός σημείου (α) στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων και (β) στο σύστημα πολικών συντεταγμένων.

Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι (σχήμα 2α):

- Η εξίσωση $x = x_0$ εκφράζει ευθεία παράλληλη στον άξονα των y .
- Η εξίσωση $y = y_0$ εκφράζει ευθεία παράλληλη στον άξονα των x .
- Το σημείο (x_0, y_0) είναι το σημείο τομής των δύο παραπάνω ευθειών.



(α) Καρτεσιανές Συντεταγμένες (β) Πολικές Συντεταγμένες

Σχήμα 2: Βασικές καμπύλες (α) στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων και (β) στο σύστημα πολικών συντεταγμένων.

1.2 Πολικές Συντεταγμένες

Ένα άλλο πολύ χρήσιμο σύστημα είναι οι *Πολικές Συντεταγμένες*. Επίσημα, η υιοθέτηση των πολικών συντεταγμένων έγινε τον 17ο αιώνα από τους Gregoire de Saint-Vincent και Bonaventura (ανεξάρτητα), παρότι οι βασικές αρχές του συστήματος ήταν γνωστές από την αρχαία Ελλάδα. Στις πολικές συντεταγμένες, χρησιμοποιούμε και πάλι τους δύο άξονες, αλλά για να προσδιορίσουμε ένα σημείο χρησιμοποιούμε την απόστασή του, r , από το σημείο αναφοράς, O , καθώς και τη γωνία θ , που σχηματίζει ο άξονας x με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το συγκεκριμένο σημείο με το O (σχήμα 1β). Η συγκεκριμένη γωνία προκύπτει αν περιστρέψουμε τον άξονα x κατά τη θετική φορά προς το ευθύγραμμο τμήμα.

Σημείωση 1.

Μπορούμε να μεταφερθούμε από το σύστημα πολικών συντεταγμένων στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x = r \cos \theta, \quad (1.1)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (1.2)$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ο 1-1 και επί μετασχηματισμός $\vec{T}: [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ με $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Θα προσέξατε ίσως ότι από το σύνολο τιμών αφαιρέθηκε το σημείο αναφοράς O , λόγω του ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος αναπαράστασής του με πολικές συντεταγμένες. Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου, (x, y) μπορούμε να βρούμε τις πολικές συντεταγμένες του ως εξής:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.3)$$

$$\theta = \arctan 2 \left(\frac{y}{x} \right) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{y}{x} \right), & \text{Αν } x > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \pi, & \text{Αν } x < 0 \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + 2\pi, & \text{Αν } x > 0 \text{ και } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{Αν } x = 0, \text{ και } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{Αν } x = 0, \text{ και } y < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

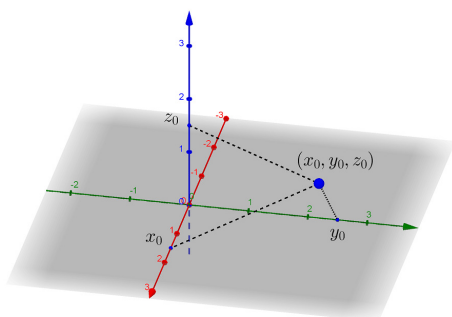
Στην περίπτωση όπου $x = y = 0$, δεν υπάρχει μοναδική αναπαράσταση στο σύστημα πολικών συντεταγμένων. Αυθαίρετα όμως, μπορούμε να θέσουμε το σημείο $r = 0, \theta = 0$. Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι (σχήμα 2β):

- Η εξίσωση $r = r_0$ εκφράζει κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα r_0 . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = r_0^2$.
- Η εξίσωση $\theta = \theta_0$ εκφράζει ημιευθεία με εξίσωση (σε καρτεσιανή μορφή) $y = \tan \theta \cdot x$, για $x \geq 0$, αν $\theta \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$, ή για $x \leq 0$, αν $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Στην περίπτωση όπου $\theta_0 = \pi/2$ ή $\theta_0 = 3\pi/2$ έχουμε τις ευθείες $x = 0$, για $y \geq 0$ και $x = 0$, για $y \leq 0$ αντίστοιχα.
- Το σημείο (r_0, θ_0) είναι το σημείο τομής των δύο παραπάνω καμπυλών.

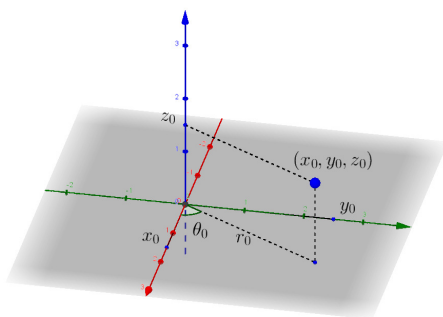
2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

2.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί και το καρτεσιανό σύστημα στις 3 συντεταγμένες. Σε αυτή την περίπτωση χρειαζόμαστε και έναν τρίτο άξονα (z) κάθετο στο επίπεδο των x, y στο σημείο O . Κάθε σημείο στο χώρο προσδιορίζεται από τις αποστάσεις των τριών προβολών του (σε κάθε άξονα) από το O (σχήμα 3α).



(α) Καρτεσιανές Συντεταγμένες

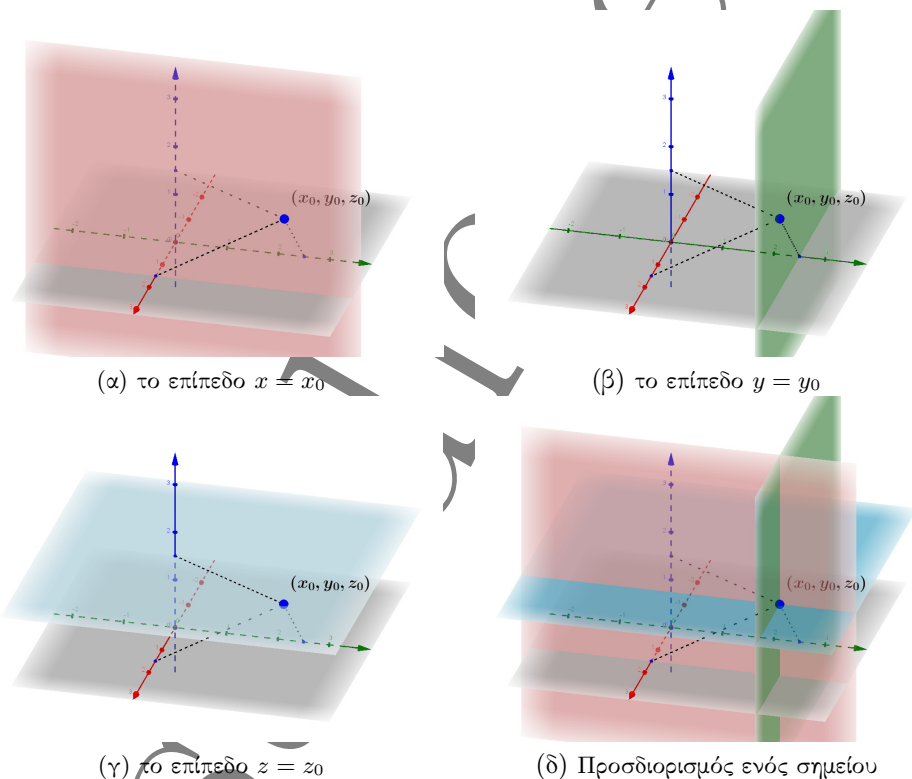


(β) Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Σχήμα 3: Προσδιορισμός ενός σημείου στο χώρο (α) με το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων και (β) με το σύστημα πολικών συντεταγμένων.

Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- Η εξίσωση $x = x_0$ εκφράζει επίπεδο παράλληλο και στον άξονα y και στον άξονα z (σχήμα 4α).
- Η εξίσωση $y = y_0$ εκφράζει επίπεδο παράλληλο και στον άξονα x και στον άξονα z (σχήμα 4β).
- Η εξίσωση $z = z_0$ εκφράζει επίπεδο παράλληλο και στον άξονα x και στον άξονα y (σχήμα 4γ).
- Το σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι το σημείο τομής των τριών παραπάνω επιπέδων (σχήμα 4).



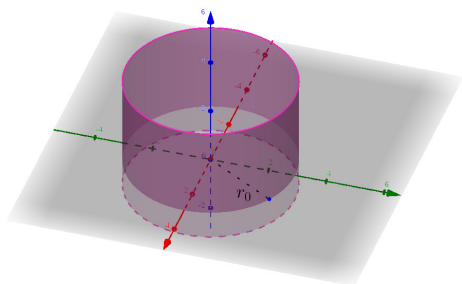
Σχήμα 4: Βασικές επιφάνειες στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων

2.2 Κυλινδρικές Συντεταγμένες

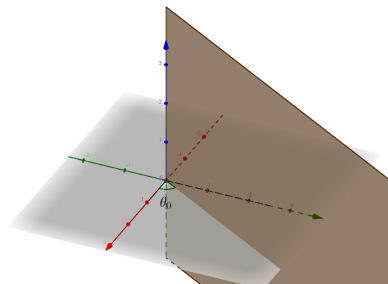
Ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις είναι το λεγόμενο *Κυλινδρικό Σύστημα*. Για να προσδιορίσουμε ένα σημείο μέσω των κυλινδρικών συντεταγμένων κάνουμε τα εξής: α) προβάλλουμε το σημείο στο επίπεδο xy , β) βρίσκουμε τις πολικές συντεταγμένες του νέου σημείου στο σύστημα συντεταγμένων $x - y$, (r_0, θ_0) , και γ) οι κυλινδρικές συντεταγμένες του αρχικού σημείου είναι (r_0, θ_0, z_0) (σχήμα 3β). Στην περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων, εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι (σχήμα 5):

- Η εξίσωση $r = r_0$ εκφράζει επιφάνεια κυλίνδρου. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο κύλινδρος αυτός περιγράφεται από το σύνολο $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r_0^2, z \in \mathbb{R}\}$ (σχήμα 5α).
- Η εξίσωση $\theta = \theta_0$ εκφράζει ημιεπίπεδο (σχήμα 5β).
- Η εξίσωση $z = z_0$ εκφράζει επίπεδο παράλληλο και στον άξονα x και στον άξονα y (σχήμα 5γ).
- Το σημείο (r_0, θ_0, z_0) είναι το σημείο τομής των τριών παραπάνω επιφανειών (σχήμα 5δ).

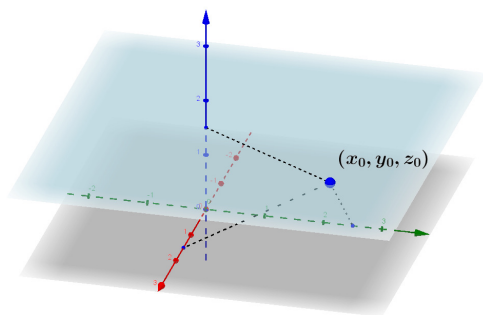
Είναι προφανές ότι μπορούμε να μεταφερθούμε από το σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων και αντίστροφα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.1)-(1.2) και (1.3)-(1.4).



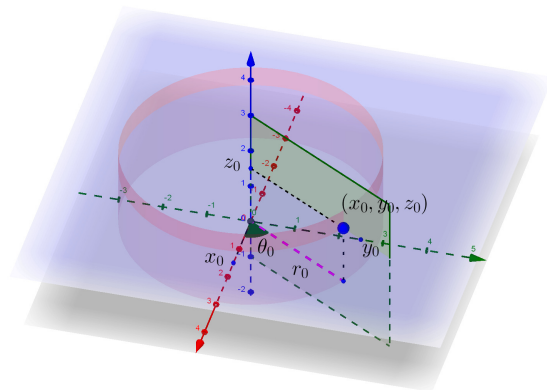
(α) Ο κύλινδρος $r = r_0$



(β) Το ημιεπίπεδο $\theta = \theta_0$



(γ) Το επίπεδο $z = z_0$



(δ) Προσδιορισμός ενός σημείου

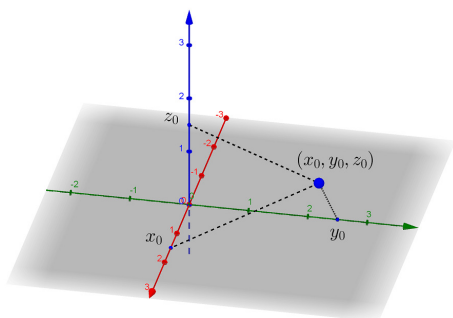
Σχήμα 5: Βασικές επιφάνειες στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων

2.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

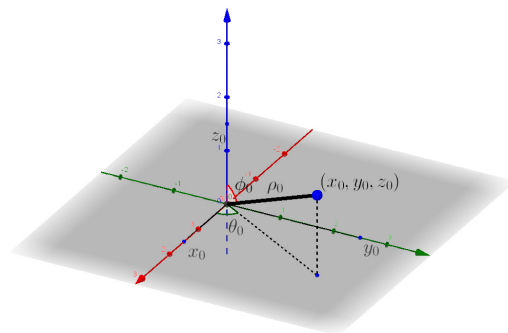
Ένα άλλο σύστημα με πολλές πρακτικές εφαρμογές είναι αυτό των *Σφαιρικών Συντεταγμένων*. Σε αυτή την περίπτωση κάθε σημείο, A , καθορίζεται από: α) Την απόστασή του, $\rho_0 = OA$, από την αρχή των αξόνων, β) τη γωνία, ϕ_0 που σχηματίζει ο άξονας z με το ευθύγραμμο τμήμα OA και γ) τη γωνία, θ_0 , που σχηματίζει η προβολή του OA πάνω στο επίπεδο $x - y$ με τον άξονα x (σχήμα 6β).

Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι (σχήμα 7):

- Η εξίσωση $r = r_0$ εκφράζει επιφάνεια σφαίρας με κέντρο το O και ακτίνα r_0 . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η σφαίρα αυτή περιγράφεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ (σχήμα 7α).
- Η εξίσωση $\theta = \theta_0$ εκφράζει ημιεπίπεδο (σχήμα 7β).
- Η εξίσωση $\phi = \phi_0$ εκφράζει κώνο (σχήμα 7γ).
- Το σημείο (r_0, θ_0, ϕ_0) είναι το σημείο τομής των τριών παραπάνω επιφανειών (σχήμα 7δ).



(α) Καρτεσιανές Συντεταγμένες



(β) Σφαιρικές Συντεταγμένες

Σχήμα 6: Προσδιορισμός ενός σημείου στο χώρο (α) με το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων και (β) με το σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

Σημείωση 2.

Μπορούμε να μεταφερθούμε από το σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad (1.5)$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi \quad (1.6)$$

$$z = \rho \cos \phi. \quad (1.7)$$

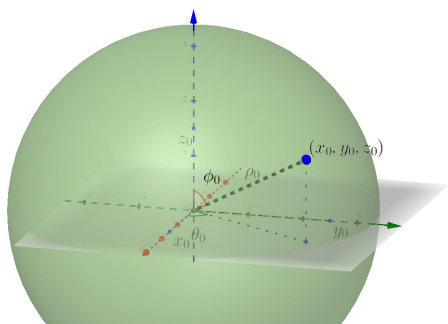
Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ο 1-1 και επί μετασχηματισμός $\vec{T} : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ με $\vec{T}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$. Θα προσέξατε ίσως ότι από το σύνολο τιμών αφαιρέθηκαν τα σημεία του άξονα z , λόγω του ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος αναπαράστασής τους με σφαιρικές συντεταγμένες. Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου, (x, y, z) , μπορούμε να βρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες του ως εξής:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.8)$$

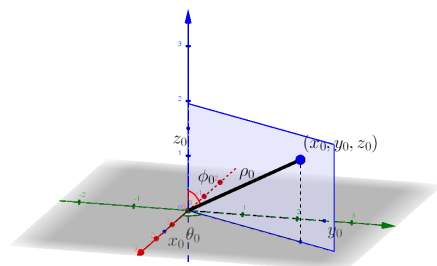
$$\theta = \arctan 2 \left(\frac{y}{x} \right) \quad (1.9)$$

$$\phi = \arccos \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right). \quad (1.10)$$

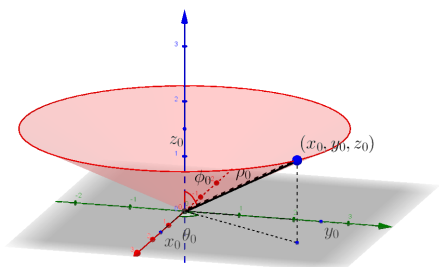
Στην περίπτωση όπου $x = y = 0$, δεν υπάρχει μοναδική αναπαράσταση στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων. Αυθαίρετα όμως, μπορούμε να θέσουμε το σημείο ως $r = |z|$, $\theta = 0$ και $\phi = 0$, αν $z \geq 0$, ή $\phi = \pi$, αν $z < 0$.



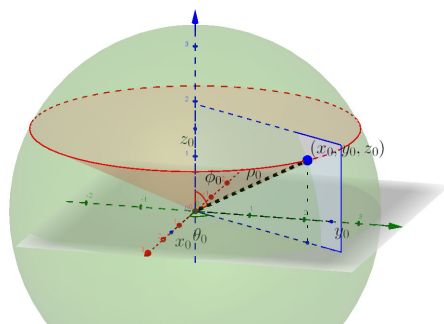
(α) Η σφαίρα $r = r_0$



(β) Το ημιεπίπεδο $\theta = \theta_0$



(γ) Ο κώνος $\phi = \phi_0$



(δ) Προσδιορισμός ενός σημείου

Σχήμα 7: Βασικές επιφάνειες στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων

Σημείωση 3.

Πότε χρησιμοποιούμε κυλινδρικές και πότε σφαιρικές συντεταγμένες· Παρότι δεν μπορεί να δοθεί μια γενική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, μπορούμε να πούμε ότι:

- Κυλινδρικές συντεταγμένες χρησιμοποιούμε όταν στο πρόβλημά μας υπάρχει συμμετρία ως προς τον άξονα z .
- Σφαιρικές συντεταγμένες χρησιμοποιούμε όταν στο πρόβλημά μας υπάρχει κεντρική συμμετρία (ως προς το O).