Ete 2019

Et un peu de Maths

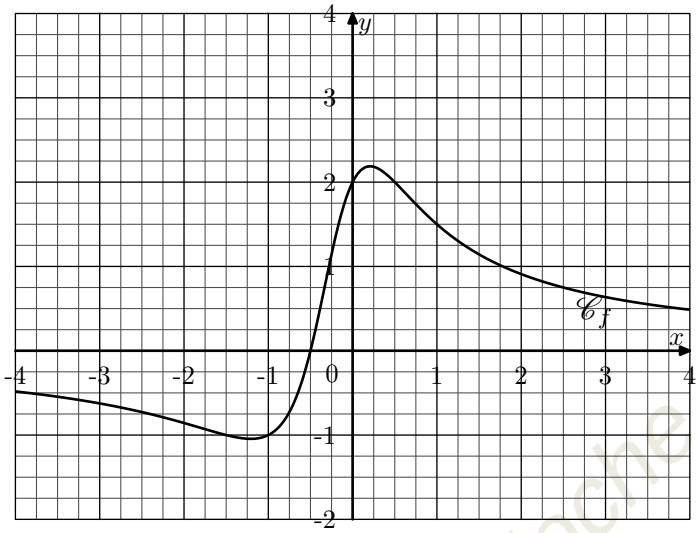
Fonctions affines

Exercice 1

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{4x+2}{2x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d_1) représentative de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

   b. Comment s'appelle la droite (d_1) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. a. Effectuer le tracé de la droite (d_2) représentative de la fonction affine h définie par : $h(x) = 2x + 2$

   b. Comment s'appelle la droite (d_2) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$.

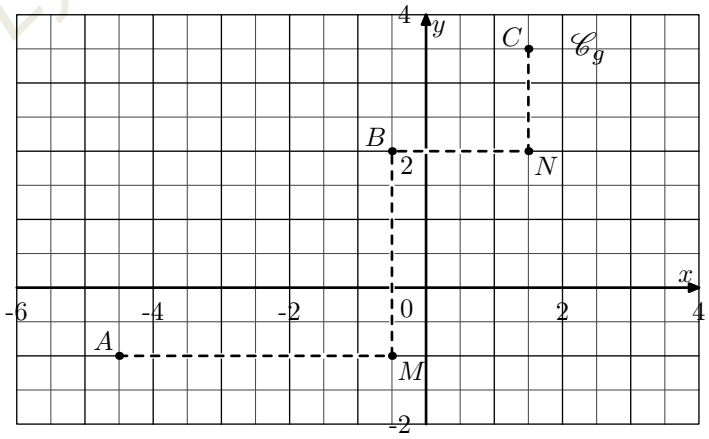
3. a. Effectuer le tracé de la droite (d_3) représentative de la fonction j définie par :
   $j(x) = -x + \frac{5}{2}$

   b. Comment s'appelle la droite (d_3) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2

1. *Etude pratique :*

   Dans le repère ci-dessous, on a représenté la droite représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction affine g.



   a. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

   b. Placer les points M et N de coordonnées respectives :
   $(x_B\,;y_A)$; $(x_C\,;y_B)$.

   c. Donner, sans justification, la nature des triangles AMB et BCN.

   d. Déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques : $\tan\widehat{BAM}$; $\tan\widehat{CBN}$
   Justifier que ces deux valeurs sont égales.

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

2. *Etude théorique :*

Soit m et p deux nombres donnés.
On considère la fonction affine tel que l'image de x soit donnée par la relation :

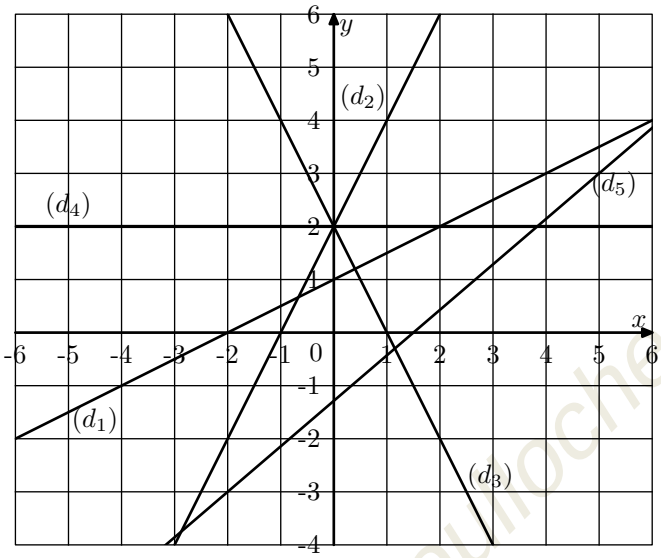
$$f(x) = m \times x + p$$

Montrer que, quelles que soient les valeurs de a et de b, on a toujours l'égalité :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

Exercice 3*

Dans le repère ci-dessous, sont représentées cinq droites :



Les droites (d_1), (d_2), (d_3), (d_4), (d_5) sont respectivement les représentations des fonctions affines f, g, h, j, k.

Déterminer l'expression algébrique de chacune de ces droites.

Exercice 4*

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(2\,;-1)$ et $B(5\,;4)$. Déterminer l'expression de la fonction affine f dont la droite représentative est la droite (AB).

Exercice 5*

Dans le plan muni d'un repère, on considère la droite (d) représentative de la fonction affine f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

On considère la droite (d') passant par les deux points :

$A(-3\,;0)$; $B(1\,;-2)$

1. Déterminer l'expression de la fonction affine g ayant pour représentation la droite (d').

2. a. Résoudre l'équation suivante : $f(x) = g(x)$

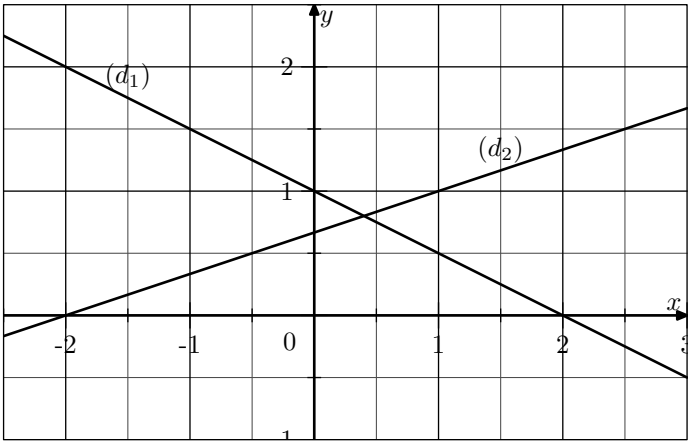
   b. Donner les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Exercice 6*

Dans le repère ci-dessous, sont représentées les deux droites (d_1) et (d_2) représentatives respectivement des fonctions affines f et g :

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC



1. a. Graphiquement, résoudre l'inéquation :
$f(x) \geqslant 0$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$f(x) < 0$.

c. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

2. a. Dresser le tableau de signe de la fonction g.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Exercice 7*

Pour chaque question, plusieurs réponses sont possibles.

On s'intéresse aux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 1 - 2x \quad ; \quad g(x) = 2x + 3$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques respectives dan un repère.

1. L'image de (-3) par f est :

a. 7 b. $\dfrac{5}{2}$ c. -2

2. L'antécédent de (-3) par g est :

a. 3 b. 0 c. -3

3. Le point A de coordonnées $(1\,;-5)$ appartient à :

a. $\mathscr{C}_f$ b. $\mathscr{C}_g$ c. ni $\mathscr{C}_f$, ni $\mathscr{C}_g$

4. Sur $\mathbb{R}$:

a. f est décroissante b. f est croissante

c. g est décroissante d. g est croissante

5. Quel sont le ou les tableaux de signes corrects?

a.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

b.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

c.

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

d.

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

e.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

f.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

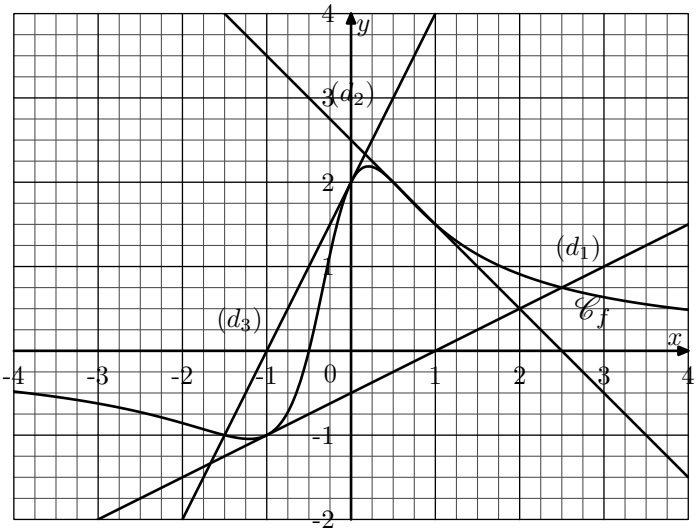
Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Fonctions affines

Correction 1

Voici le tracé des droites :



1. b. La droite (d_1) s'appelle la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

2. b. La droite (d_2) s'appelle la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

3. b. La droite (d_3) s'appelle la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Correction 2

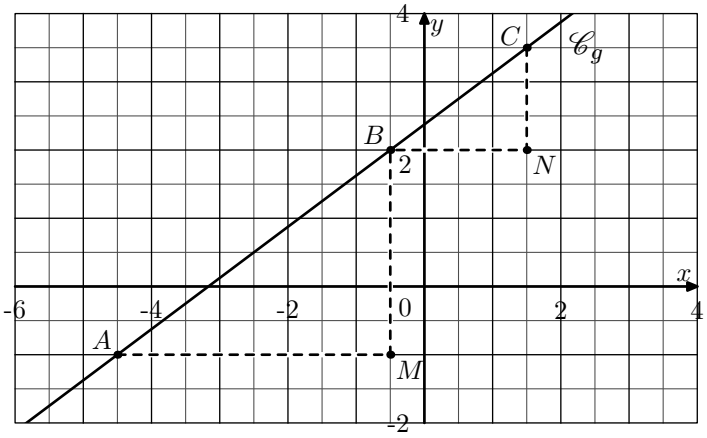
1. a. Voici les coordonnées de ces trois points :
$A(-4{,}5\,;-1)$; $B(-0{,}5\,;2)$; $C(1{,}5\,;3{,}5)$

c. Les triangles AMB et BNC sont deux triangles rectangles respectivement aux points M et N.
Cela vient du fait que nous sommes dans un repère orthonormé, que les droites (AM) et (BN) sont toutes deux parallèles à l'axe des abscisses et que les droites (MB) et (NC) sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées.

d. On a les deux rapports trigonométriques suivants :

- $\tan \widehat{BAM} = \dfrac{BM}{AM} = \dfrac{3}{4}$
- $\tan \widehat{CBN} = \dfrac{CN}{BN} = \dfrac{1{,}5}{2} = \dfrac{3}{4}$

Les droites (AM) et (BN) sont parallèles entre elles alors les deux angles correspondant $\widehat{BAM}$ et $\widehat{CBN}$, relativement à la sécante (AC), sont de mesure égale.



2. On a la simplification suivante du rapport :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(m\times b+p)-(m\times b+p)}{b-a}$$
$$= \frac{m\times b+p-m\times a-p}{b-a} = \frac{m\times b-m\times a}{b-a}$$
$$= \frac{m\times(b-a)}{b-a} = m$$

Correction 3

- La droite (d_1) passe par les points :
$A(-4\,;-1)$; $B(-2\,;0)$
Le coefficient directeur de la fonction f est :
$$m = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{0-(-1)}{-2-(-4)}$$
$$= \frac{1}{-2+4} = \frac{1}{2}$$
La fonction affine f admet une expression de la forme :
$$f(x) = \frac{1}{2}x+p.$$
Le point A appartient à la droite (d_1), on a la relation :
$$f(-4) = -1$$
$$\frac{1}{2}\times(-4)+p = -1$$
$$-2+p = -1$$
$$p = -1+2$$
$$p = 1$$
On obtient l'expression de la fonction affine f :
$$f(x) = \frac{1}{2}x+1$$

- La fonction affine g admettant la droite (d_2) pour représentation graphique admet une expression de la forme :
$f(x) = p\times x+m$ où p et m sont deux nombres.

La droite (d_2) passe par les points de coordonnées :
$C(1\,;4)$; $D(-1\,;0)$

Le coefficient directeur m a pour valeur :
$$m = \frac{y_D-y_C}{x_D-x_C} = \frac{0-4}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$
Ainsi, la fonction g admet une expression algébrique de la forme :
$$g(x) = 2x+p$$
Le point C appartenant à la droite représentative de la fonction g, ses coordonnées vérifient la relation :
$$g(1) = 4$$
$$2\times1+p = 4$$
$$2+p = 4$$
$$p = 4-2$$
$$p = 2$$
Ainsi, la fonction affine g, dont la droite représentative est (d_2), admet pour expression algébrique :
$$g(x) = 2x+2$$

- *Voici une méthode "originale" de déterminer l'expression algébrique de la fonction h :*

La droite (d_3) passe par les points de coordonnées :
$E(0\,;2)$; $F(2\,;-2)$.

La fonction h étant une fonction affine, elle admet une expression algébrique de la forme :
$h(x) = m\times x+p$ où $m\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{R}$

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Le point E appartenant à la droite représentative de la fonction h, ses coordonnées permettent d'écrire la relation :

$$\begin{aligned} h(0) &= 2 \\ m\times 0 + p &= 2 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

L'expression de la fonction affine h est de la forme :
$h(x) = m\times x + 2$

En utilisant les coordonnées du point F, on a la relation :

$$\begin{aligned} h(2) &= -2 \\ m\times 2 + 2 &= -2 \\ 2m &= -2 - 2 \\ 2m &= -4 \\ m &= \frac{-4}{2} \\ m &= -2 \end{aligned}$$

On obtient l'expression algébrique de la fonction h :
$h(x) = -2x + 2$

- La droite (d_4) est horizontale *(parallèle à l'axe des abscisses)* : elle est constante et passe par le point $(-3\,;2)$. L'expression algébrique de la fonction j est :
$y = 2$

- La droite (d_5) passe par les points de coordonnées :
$G(-2\,;-3)$; $H(5\,;3)$

Le coefficient directeur m de la fonction k a pour valeur :

$$m = \frac{f(x_H) - f(x_G)}{x_H - x_G} = \frac{3-(-3)}{5-(-2)} = \frac{6}{7}$$

Ainsi, la fonction k admet pour expression :
$k(x) = \frac{6}{7}x + p \quad p\in\mathbb{R}$

Le point $G(-2\,;-3)$ appartenant à la droite (d_5), on en déduit la relation :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3 \\ \frac{6}{7}\times(-2) + p &= -3 \\ -\frac{12}{7} + p &= -3 \\ p &= -3 + \frac{12}{7} \\ p &= -\frac{21}{7} + \frac{12}{7} \\ p &= \frac{-21+12}{7} \\ p &= -\frac{9}{7} \end{aligned}$$

L'expression algébrique de la fonction g est :
$g(x) = \frac{6}{7}x - \frac{9}{7}$

Correction 4

Ci-dessous sont présentées deux méthodes de résolution :

- Les points A et B appartenant à la droite représentative de la fonction f, le coefficient directeur de la fonction f a pour valeur :

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{4-(-1)}{5-2} = \frac{5}{3}$$

Ainsi, la fonction f admet une expression de la forme :
$f(x) = \frac{5}{3}x + p \quad$ où $b\in\mathbb{R}$.

Le point A appartenant à la droite représentative de la fonction f, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} f(2) &= -1 \\ \frac{5}{3}\times 2 + p &= -1 \\ \frac{10}{3} + p &= -1 \\ p &= -1 - \frac{10}{3} \\ p &= -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

On obtient l'expression algébrique de la fonction f :
$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$

- La fonction affine f admet une expression de la forme :
$f(x) = m\times x + p \quad$ où $m\in\mathbb{R}$ ou $p\in\mathbb{R}$

Or, les points A et B appartenant à la droite représentative de la fonction affine f, on a les égalités :

$f(2) = -1$	$f(5) = 4$
$m\times 2 + p = -1$	$m\times 5 + p = 4$
$2m + p = -1$	$5m + p = 4$

Ainsi, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 2m + p = -1 \\ 5m + p = 4 \end{cases}$$

Par soustraction des égalités membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 2m - 5m &= -1 - 4 \\ -3m &= -5 \\ m &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

En utilisant la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2m + p &= -1 \\ 2\times\frac{5}{3} + p &= -1 \\ \frac{10}{3} + p &= -1 \\ p &= -1 - \frac{10}{3} \\ p &= -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression algébrique de la fonction f :
$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$

Correction 5

1. Le coefficient directeur de la fonction g a pour valeur :

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{-2-0}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, l'expression de la fonction g est sous la forme :
$g(x) = -\frac{1}{2}x + p \quad$ où $p\in\mathbb{R}$

Le point A appartenant à la droite représentative de la fonction g, on a :

Lycée André Bouniche

(cc) BY-NC

$$f(-3)=0$$
$$-\frac{1}{2}\times(-3)+p=0$$
$$\frac{3}{2}+p=0$$
$$p=-\frac{3}{2}$$

Ainsi, l'équation réduite de la droite (AB) est :
$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

2. (a.) Résolvons l'équation suivante :

$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x=-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{6}x+\frac{3}{6}x=-\frac{9}{6}-\frac{4}{6}$$
$$\frac{5}{6}x=-\frac{13}{6}$$
$$x=-\frac{13}{6}\times\frac{6}{5}$$
$$x=-\frac{13}{5}$$

Cet équation a pour solution : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{13}{5}\right\}$

(b.) L'abscisse des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g sont les solutions de l'équation : $f(x)=g(x)$.
D'après la question, précédente, les deux droites (d) et (d') s'intercepte en un point dont l'abscisse est $-\frac{13}{5}$.
L'ordonnée de ce point d'intersection est :

$$f\left(-\frac{13}{5}\right)=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{13}{5}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{13}{15}+\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{13}{15}+\frac{10}{15}=-\frac{3}{15}=-\frac{1}{5}$$

Le point d'intersection des courbes représentatives de ces deux fonctions a pour coordonnées $\left(-\frac{13}{5}\,;-\frac{1}{5}\right)$.

Correction 6

1. (a.) La fonction f est une fonction affine ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ et sa représentation est une droite.
Graphiquement, on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geqslant 0$:
$\mathcal{S}=]-\infty\,;2]$

(b.) Là où la fonction f ne donne pas des valeurs positives ou nulle, c'est qu'elle est strictement négatives ; on en déduit les solutions de l'inéquation $f(x)<0$:
$\mathcal{S}=]2\,;+\infty[$

(c.) Voici le tableau de signe de la fonction f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. Graphiquement, on observe que la droite (d_2) intercepte l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-2\,;0)$.
On en déduit que l'antécédent du nombre 0 est le nombre -2.

Voici le tableau de signe de la fonction g :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Correction 7

1. Réponse (a.) :
$f(-3)=1-2\times(-3)=1+6=7$

2. Réponse (c.) :
Résolvons l'équation :

$$g(x)=-3$$
$$2x+3=-3$$
$$2x=-3-3$$
$$2x=-6$$
$$x=-3$$

3. Réponse (c.) :

- $f(1)=1-2\times1=1-2=-1$
  Le point A n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- $g(1)=2\times1+3=2+3=5$
  Le point A n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_g$.

4. Réponse (a.) et (d.) :

- Le coefficient directeur de la fonction f vaut -2 : la fonction f est décroissante.
- Le coefficient directeur de la fonction f vaut 2 : la fonction g est croissante.

5. Réponse (c.) et (f.) :

- La fonction f est décroissante et s'annule en 0,5.
- La fonction g est croissante.

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Second degré

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$f : x \longmapsto 9x^2 - 6x - 2$

1. a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Calculer l'image de 1 par la fonction f.
   c. Déterminer les antécédents de -2 par la fonction f.
2. a. Etablir l'égalité : $9x^2-6x-2=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3$
   b. Montrer que f admet un minimum et que celui-ci est atteint en $\frac{1}{3}$

Exercice 2

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :
$f(x) = -x^2 + 9x - 20$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=-(x-5)(x-4)$
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
   $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)>0$
2. a. Etablir l'égalité : $f(x)=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.
   b. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre x réel :
   $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$
   c. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ tel que l'image d'un nombre x est donnée par la relation :
$f(x) = -2x^2 - 8x + 9$.

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=-2\cdot(x+2)^2+17$.
   b. Etablir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$.
2. Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction f.
3. Donner les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$f(x) = 8x^2 - 8x - 6$.

1. a. Etablir l'identité : $f(x) = (4x-6)(2x+1)$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. a. Etablir l'identité : $f(x)=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-8$.
   b. Algébriquement, établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel x : $f(x)\geqslant -8$.
   c. Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, établir le sens de variation de f
3. a. Dressez, sans justification, un tableau de variations de la fonction f.
   b. Donner, sans justification, les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

Exercice 5

Dresser le tableau de variations des fonctions polynômiales du second degré ci-dessous :

a. $f(x) = 3\cdot x^2 - 3\cdot x + 2$ b. $g(x) = -x^2 - 2\cdot x + 3$

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Second degré

Correction 1

1. a. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.

b. L'image de 1 par la fonction f :

$$f(1) = 9\times1^2 - 6\times1 - 2 = 9 - 6 - 2 = 1$$

c. Résolvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \\ 9x^2 - 6x - 2 &= -2 \\ 9x^2 - 6x &= 0 \\ x(9x-6) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & \begin{aligned} 9x - 6 &= 0 \\ 9x &= 6 \\ x &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned} \end{array}$$

L'ensemble des antécédents du nombre -2 par la fonction f vaut :

$$\mathcal{S} = \left\{0\,;\,\frac{2}{3}\right\}$$

2. a. On a le développement :

$$\begin{aligned} 9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 &= 9\left[x^2 - 2\times x\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] - 3 \\ &= 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 3 = 9x^2 - 6x + 1 - 3 \\ &= 9x^2 - 6x - 2 \end{aligned}$$

b. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, on a :

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 &\geqslant 0 \\ 9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 &\geqslant 0 \\ 9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 &\geqslant -3 \\ f(x) &\geqslant -3 \end{aligned}$$

De plus, l'image de $\frac{1}{3}$ a pour valeur :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 - 3 = 9\times0 - 3 = -3$$

On en déduit que la fonction f admet pour minimum la valeur -3 et que cette valeur est atteinte pour $x = \frac{1}{3}$

Correction 2

1. a. On a l'égalité :

$$\begin{aligned} -(x-5)(x-4) &= -\left(x^2 - 4x - 5x + 20\right) \\ &= -\left(x^2 - 9x + 20\right) = -x^2 + 9x - 20 \end{aligned}$$

b. Résolvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -(x-5)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x - 5 = 0 & x - 4 = 0 \\ x = 5 & x = 4 \end{array}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \{4\,;\,5\}$$

c. De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-(x-5)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} -\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &= -\left(x^2 - 9x + \frac{81}{4}\right) + \frac{1}{4} \\ &= -x^2 + 9x - \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = -x^2 + 9x - \frac{80}{4} \\ &= -x^2 + 9x - 20 \end{aligned}$$

b. Le carré d'un nombre est toujours positif. On en déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{9}{2}\right)^2 &\geqslant 0 \\ -\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 &\leqslant 0 \\ -\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &\leqslant \frac{1}{4} \\ f(x) &\leqslant \frac{1}{4} \end{aligned}$$

c. On remarque la valeur :

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

La fonction f admet pour valeur minimale $\frac{1}{4}$ qui est atteint pour $x = \frac{9}{2}$

Correction 3

1. a. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} -2\cdot(x+2)^2 + 17 &= -2\cdot\left(x^2 + 4\cdot x + 4\right) + 17 \\ &= -2\cdot x^2 - 8\cdot x - 8 + 17 = -2\cdot x^2 - 8\cdot x + 9 \end{aligned}$$

b. Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ tels que $a<b$. On a les comparaisons suivantes :

$$\begin{aligned} a < b &< -2 \\ a + 2 < b + 2 &< 0 \end{aligned}$$

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

$$\begin{aligned} (a+2)^2 &> (b+2)^2 \\ -2\cdot(a+2)^2 &< -2\cdot(b+2)^2 \\ -2\cdot(a+2)^2 + 17 &< -2\cdot(b+2)^2 + 17 \\ f(a) &< f(b) \end{aligned}$$

Deux nombres appartenant à l'ensemble $]-\infty\,;-2]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même ordre : la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-2]$.

2. On a les deux nombres suivants associés à la fonction f :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{-8}{2\times(-2)} = -\dfrac{8}{4} = -2$

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

- $f(-2) = -2\cdot\left[2+(-2)\right]^2 + 17 = -2\times 0^2 + 17 = 17$

Le coefficient du terme du second degré étant négatif, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	17	↘	$-\infty$

3. D'après le tableau de variation, la fonction f admet un maximum valant 17 qui est atteint pour $x=-2$.

Correction 4

1. a. On a le développement :

$$(4x-6)(2x+1) = 8x^2+4x-12x-6$$
$$= 8x^2-8x-6$$

b. A l'aide de la forme développée, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x-6)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 = 8\left[x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)\right] - 8$$
$$= 8\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 8 = 8x^2 - 8x + 2 - 8$$
$$= 8x^2 - 8x - 6$$

b. Un carrée étant toujours positif, on a les comparaisons suivantes :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$
$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$
$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \geqslant -8$$
$$f(x) \geqslant -8$$

De plus : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 = -8$

On en déduit que -8 est la valeur minimale de la fonction f.

c. Soit a et b deux nombres de l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ tels que $a<b$. On a les comparaisons suivantes :

$$a < b < \frac{1}{2}$$
$$a - \frac{1}{2} < b - \frac{1}{2} < 0$$

Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même sens :

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$8\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > 8\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$8\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 > 8\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 - 8$$
$$f(a) > f(b)$$

Deux nombres appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire : la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

3. a. On a les deux valeurs associées à la fonction f :

- $-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 8} = \frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 = 8\times 0 - 8 = -8$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	-8	↗	$+\infty$

b. La fonction f admet un minimum valant -8 qui est atteint pour $x=\frac{1}{2}$.

Correction 5

1. Le coefficient du second degré de ce polynôme est positif ; cette fonction admet un minimum en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$$

La valeur de ce minimum est de :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\times\frac{1}{2} + 2 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\times\frac{1}{2} + 2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = \frac{5}{4}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	$\frac{5}{4}$	↗	$+\infty$

2. Le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif ; cette fonction admet un maximum en :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = -1$$

La valeur de ce maximum est de :

$$g(1) = -1^2 - 2\times(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

Lycée André Boulloche

CC BY-NC

On obtient le tableau de variations suivant :

x	-∞		-1		$+\infty$
Variation de g	-∞	$\nearrow$	4	$\searrow$	-∞

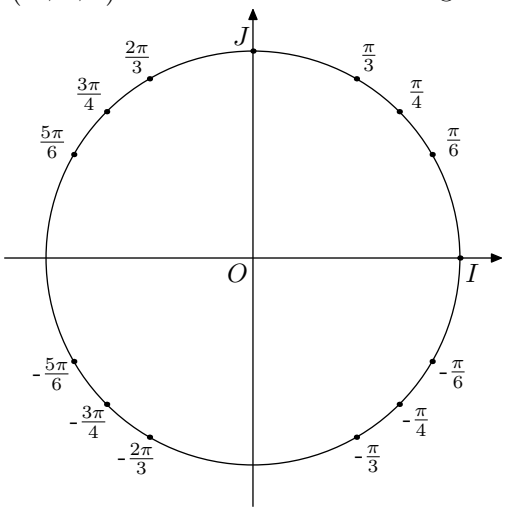
Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Trigonométrie

Exercice 1

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et on considère le cercle trigonométrique ci-dessous :



où sont représentés les points M du cercle trigonométrique dont la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est un angle remarquable.

Donner la valeur exacte des rapports ci-dessous :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ b. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d. $\cos(\pi)$

e. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ f. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ g. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ h. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 2

1. Tracer un cercle trigonométrique et placer les points suivants dont le repérage par leur mesure principale :

   a. $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b. $B\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ c. $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

   d. $D\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e. $E\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ f. $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

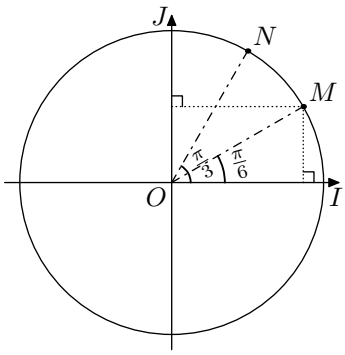
2. Préciser les valeurs du cosinus et du sinus associées à chacun des angles repérant les points précédents.

Exercice 3

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$

1. a. Déterminer les coordonnées cartésienne du point M.

   b. Placer le point M' symétrique du point M par la symétrie d'axe (OJ). Donner les coordonnées cartésiennes du point M'. Puis, donner l'angle repérant le point M' dans le cercle $\mathscr{C}$.



   c. Placer le point M'' symétrique du point M par la symétrie d'axe (OI). Donner les coordonnées cartésiennes du point M''. Puis, donner l'angle repérant le point M'' dans le cercle $\mathscr{C}$.

2. a. Déterminer les coordonnées cartésienne du point N.

   b. Placer le point N' symétrique du point N par la symétrie d'axe (OJ). Donner les coordonnées cartésiennes du point N'. Puis, donner l'angle repérant le point N' dans le cercle $\mathscr{C}$.

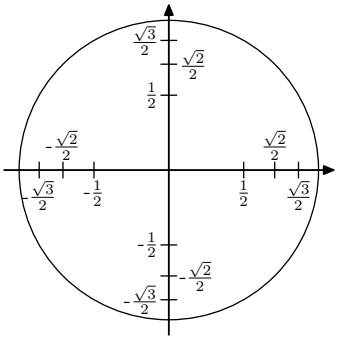
   c. Placer le point N'' symétrique du point N par la symétrie d'axe (OI). Donner les coordonnées cartésiennes du point N''. Puis, donner l'angle repérant le point N'' dans le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 4

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous :



1. a. Sur le cercle trigonométrique, placer les deux points M et M' ayant pour abscisse $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   b. Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre l'équation :

   $$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Dans l'intervalle des mesures principales, résoudre les équations suivantes :

   a. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ c. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

   $$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 5

1. Résoudre dans l'ensemble $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales, les équations suivantes :

   a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

   c. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 6

1. On considère l'équation : (E) : $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$
   Justifier que chaque élément de l'ensemble :

   $$\left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{13\cdot\pi}{6}\,;\,\frac{25\cdot\pi}{6}\,;\,\frac{37\cdot\pi}{6}\right\}$$

   est une solution de l'équation (E).

2. On considère l'équation : (F) : $\cos(2\cdot x) = \dfrac{1}{2}$

   a. Justifier que chaque élément de l'ensemble $\left\{-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right\}$ est une solutions de l'équation (F).

   b. Pour tout entier relatif k $(k\in\mathbb{Z})$, justifier que les nombres $-\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ et $\dfrac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ sont solution de l'équation (F).

   c. En déduire les valeurs des quatre solutions de l'équation (F) appartenant à l'intervalle des mesures principales $\left]-\pi\,;\pi\right]$.

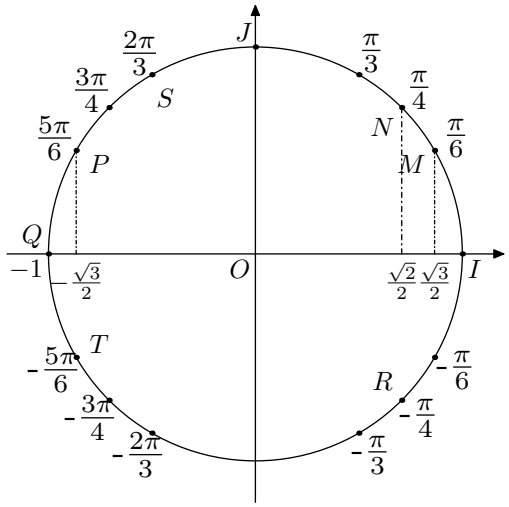
Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

Trigonométrie

Correction 1

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :



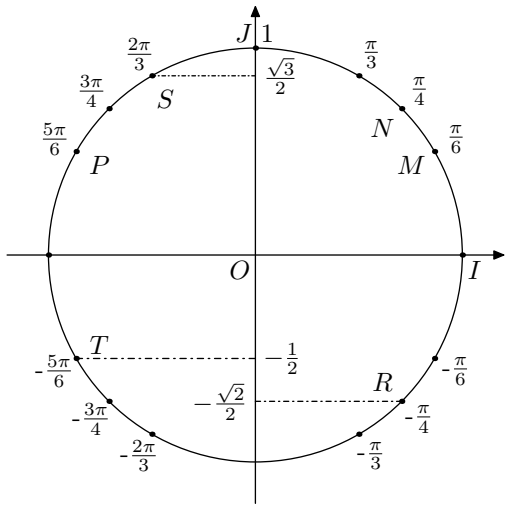
a. Le point M est repéré par l'angle $\frac{\pi}{6}$. L'abscisse du point M a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Le point N est repéré par l'angle $\frac{\pi}{4}$. L'abscisse du point N a pour valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. Le point P est repéré par l'angle $\frac{5\pi}{6}$. L'abscisse du point P a pour valeur $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Le point Q est repéré par l'angle π. L'abscisse du point Q a pour valeur -1.
On en déduit : $\cos(\pi) = -1$

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :



e. Le point R est repéré par l'angle $-\frac{\pi}{4}$. L'ordonnée du point R a pour valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

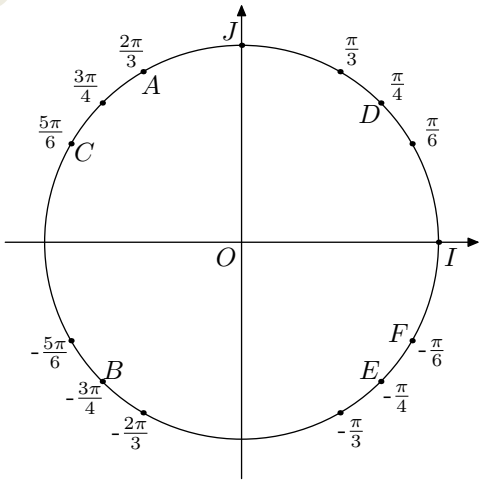
f. Le point S est repéré par l'angle $\frac{2\cdot\pi}{3}$. L'ordonnée du point S a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g. Le point T est repéré par l'angle $-\frac{5\pi}{6}$. L'ordonnée du point T a pour valeur $-\frac{1}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

h. Le point J est repéré par l'angle $\frac{\pi}{2}$. L'ordonnée du point J a pour valeur 1.
On en déduit : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Correction 2

1. Voici les six points représentés sur le cercle trigonométrique :



2. Par lecture graphique, voici les valeurs des cosinus et des sinus associées à chacun de ces six angles :

a. $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

d. $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Correction 3

1. a. Le point M a pour coordonnées : $M\left(\cos\frac{\pi}{6} ; \sin\frac{\pi}{6}\right)$.
D'après les valeurs trigonométriques des angles remar

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

quables :

$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

b. Par la symétrie axiale d'axe (OJ), le point M' a pour coordonnées :

$$M'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

La figure ci-dessous montre que l'angle repérant le point M' est le supplémentaire de $\frac{\pi}{6}$:

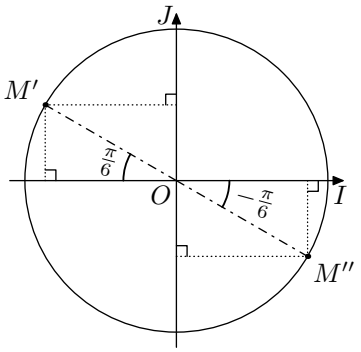
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

c. Par la symétrie axiale d'axe (OI), le point M'' a pour coordonnées :

$$M''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$$

La figure ci-dessous montre que l'angle repérant le point N' est :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}\right)=-\frac{\pi}{6}$$



2. a. Repérer par l'angle $\frac{\pi}{3}$ repérant le point N :

$$N\left(\cos\frac{\pi}{3}\,;\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b. Le point N' a pour coordonnées : $N'\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

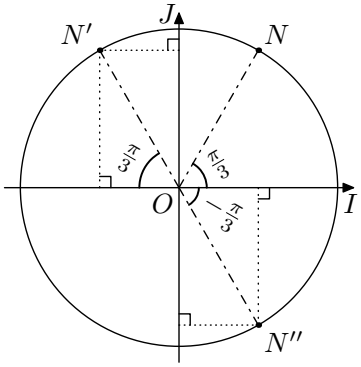
L'angle repérant le point N' a pour angle :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

c. Le point N'' a pour coordonnées : $N''\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

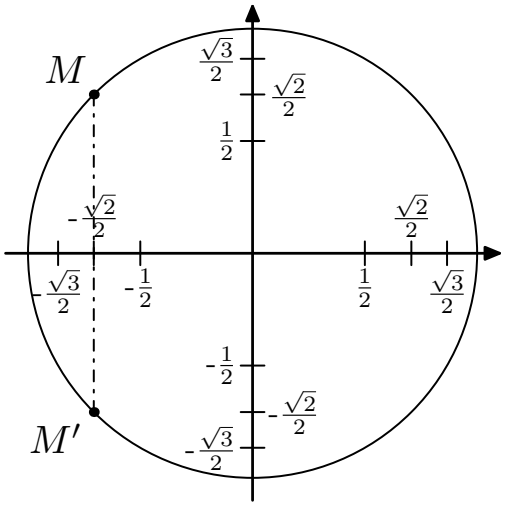
L'angle repérant le point N'' a pour angle :

$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON'}\right)=-\frac{\pi}{3}$$



Correction 4

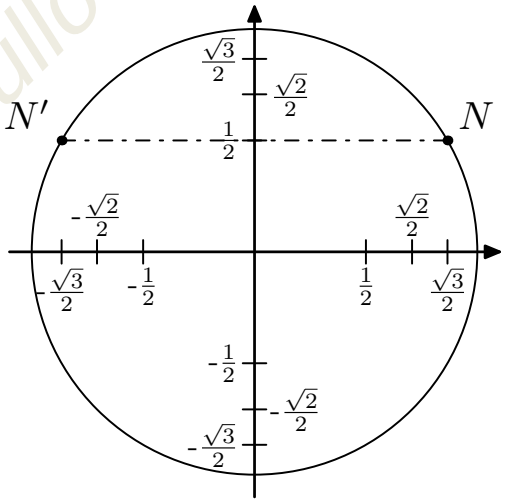
1. a. Voici sur le cercle trigonométrique, les deux points M et M' ayant pour abscisse la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$:



b. Les deux points M et M' sont repérés sur le cercle trigonométrique par des angles orientés de mesures respectives $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

Ainsi, l'équation $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet pour ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}$

2. a. Graphiquement, les deux solutions sont représentés par les points N et N' :



L'équation de l'énoncé :

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

peut s'exprimer par l'égalité :

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$

On en déduit les deux mesures principales prises par la variable x :

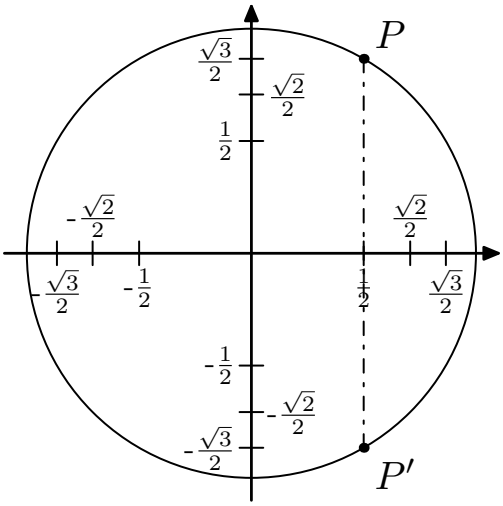
$$x=\frac{\pi}{6}\qquad\Bigg|\qquad x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{6\pi-\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

L'ensemble des solutions de cette équation dans l'intervalle des mesures principales est : $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$

b. Graphiquement, les deux solutions sont représentés par les points P et P' :

Lycée André Boulloche

CC BY-NC



L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

peut s'exprimer par l'égalité :

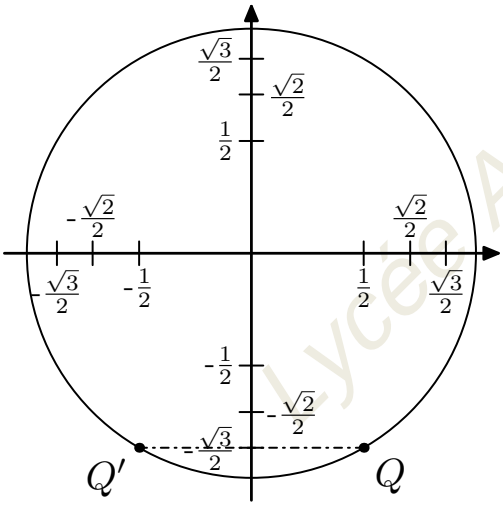
$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

On en déduit les deux mesures principales prises par la variable x :

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \Big| \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

L'ensemble des solutions de cette équation dans l'intervalle des mesures principales est : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right\}$

c. Graphiquement, les deux solutions sont représentés par les points Q et Q' :



L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

peut s'exprimer par l'égalité :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

On en déduit les deux mesures principales prises par la variable x :

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \Big| \quad \begin{aligned} x &= \pi - \left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \pi + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\pi + \pi}{3} \\ &= \frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\right\}$

3. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

peut s'exprimer par l'égalité :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$$

Ainsi, toutes les solutions de l'équation s'expriment sous l'une des deux formes ci-dessous où k est une entier relatif :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Correction 5

1. a. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

On en déduit les deux solutions dans l'intervalle des mesures principales :

$$x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right\}$$

b. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

On en déduit les deux solutions :

$$x = -\frac{\pi}{6} \quad \Big| \quad \begin{aligned} x &= \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ x &= \pi + \frac{\pi}{6} \\ x &= \frac{6\pi + \pi}{6} \\ x &= \frac{7\pi}{6} \\ x &= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right\}$$

c. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions :

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} x &= \pi - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\pi - \pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right\}$$

d. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions de cette équation :

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad x = -\frac{2\pi}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

2. a. L'égalité de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$$

Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b. L'égalité de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} x &= \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cdot k\cdot\pi \\ &= \pi + \frac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \\ &= 2\pi - \frac{3\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} + 2\cdot(k+1)\cdot\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} + 2\cdot k'\cdot\pi \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Correction 6

1. Testons l'équation pour chacune de ces valeurs :

- L'angle $\frac{\pi}{6}$ est un angle remarquable. On a :
  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{13\cdot\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\cdot\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{25\cdot\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 4\cdot\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{37\cdot\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 6\cdot\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Chaque élément de l'ensemble est une solution de l'équation (E).

2. a. Par la connaissance des angles associés :

- $\cos\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

On vient de montrer que chaque élément de cet ensemble sont solutions de l'équation (F).

b.
- Pour tout k entier relatif, on a :
  $\cos\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- Pour tout k entier relatif, on a :
  $\cos\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

c.
- Pour tout entier relatif k, le nombre $-\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$ est solution de l'équation (F). En particulier, pour $k = 1$, l'angle :
  $$-\frac{\pi}{6} + 1\times\pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\cdot\pi}{6}$$
  est un angle de l'intervalle des mesures principales et est une solution de (F).
- Pour tout entier relatif k, le nombre $\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$ est solution de l'équation (F). En particulier, pour $k = -1$, l'angle :
  $$\frac{\pi}{6} + (-1)\times\pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\cdot\pi}{6}$$
  est un angle de l'intervalle des mesures principales et est une solution de (F).

Ainsi, les quatre solutions de l'équation (E) appartenant à l'intervalle des mesures principales sont :

$$\left\{-\frac{5\cdot\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\cdot\pi}{6}\right\}$$

Lycée André Boulloche

(cc) BY-NC