Математически турнир „Иван Салабашев“, 2016 г.

Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Да се пресметне $\dfrac{1^2+2^2}{3}+\dfrac{3^2+4^2}{5}$. **А)** $\dfrac{28}{5}$ **Б)** $\dfrac{20}{3}$ **В)** $\dfrac{97}{15}$ **Г)** 6

Отговор: Б. $\dfrac{1^2+2^2}{3}+\dfrac{3^2+4^2}{5}=\dfrac{5}{3}+5=\dfrac{20}{3}$.

2. Коя е последната цифра на 3^{2016}? **А)** 9 **Б)** 7 **В)** 3 **Г)** 1

Отговор: Г. Тъй като $3^4=81$ завършва на 1, последните цифри на 3^n (за естествено число n) се повтарят през 4. Тогава от $2016=4.504$ следва, че търсената цифра е 1. Същото може да се види и от $3^{2016}=81^{504}$.

3. Коя е 2016-тата цифра след десетичната запетая на числото $\dfrac{22}{7}$?

А) 7 **Б)** 5 **В)** 1 **Г)** 8

Отговор: А. Даденото число е безкрайната периодична дроб 3.(142857). Тъй като 2016 се дели на 6, търсената цифра е 7.

4. Иван има 120 кубчета, всяко с по четири стени, на които е написано числото 2, и две стени, на които е написано числото 6. Иван хвърлил кубчетата като зарчета и пресметнал сумата на числата от горните им страни. Колко са възможните стойности на тази сума?

А) 121 **Б)** 120 **В)** 126 **Г)** 240

Отговор: А. Най-малката възможна сума е $120.2=240$, а най-голямата е $120.6=720$. Всички други суми можем да получим мислено, като променяме последователни показанието на по едно зарче от 2 на 6, започвайки от най-малката сума. Следователно търсеният брой е 121 (в началото са променени 0 зарчета, а в края – всичките 120).

5. Квадрат е разделен на два правоъгълника с права линия. Сумата от периметрите на двата правоъгълника е 90 см. Да се намери лицето на квадрата.

А) 256 см^2 **Б)** 270 см^2

В) 225 см^2 **Г)** 180 см^2

Отговор: В. Сумата от периметрите на двата правоъгълника е равна на $6x$, където x е страната на квадрата. Следователно $x=15$ и търсеното лице е 225.

6. Броят на четните естествени числа, които са по-малки от 2016 и дават остатък 4 при деление на 9, е: **А)** 111 **Б)** 112 **В)** 223 **Г)** 224

Отговор: Б. Ако a е четно естествено число, което дава остатък 4 при деление на 9, то $a+5$ е нечетно естествено число, което се дели на 9. Тогава търсеният брой е равен на броя на нечетните естествени числа между 6 и 2021, които се делят на 9. Това са числата $9=1.9$, $27=3.9$, $\ldots$, $2007=223.9$, и техният брой е 112.

7. Броят на минутите, които един ученик отделял за решаване на интересни задачи по математика, били увеличени с 20%, след което с още 30%. С колко процента общо са увеличени тези минути? **А)** 50 **Б)** 56 **В)** 60 **Г)** 100

Отговор: Б. Ако в началото минутите са били m, след първото увеличение те са станали $1,2m$, а след второто – $1,3(1,2m)=1,56m$. Следователно търсеното увеличение в проценти е 56.

8. Колко са точните кубове с три цифри, които имат следното свойство: цифрите им могат да се разместят така, че да се получи просто число? **А)** 5 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: Г. Трицифрените точни кубове са 125, 216, 343, 512 и 729. Всички разmествания в 216 и 729 ще дадат съставни числа (кратни на 9). Тъй като 521 и 433 са прости числа, кубовете 125, 343 и 512 са тези, които имат исканото свойство.

9. Дадени са пет петбуквени думи: КОМАР, КАБЕЛ, ТЕРЕН, ВИДЕО, СТРЕС. На един ход е разрешено е да се избере дума и в нея да се замени буква с друга буква, без да се променя мястото. Колко най-малко хода са необходими, за да се получи от всяка от петте думи една и съща редица от букви (не непременно дума)? **А)** 15 **Б)** 17 **В)** 18 **Г)** 19

Отговор: А. В първа позиция ще е най-икономично да променим три букви така, че петте букви да станат К. Аналогично във втора и пета позиция са ни необходими по 4 замени, в трета – 3, а в четвърта е нужна само една замяна. Следователно търсеният минимален брой е $3 + 2.4 + 3 + 1 = 15$. Можем да получим например редицата КОДЕР.

10. Произведението на две естествени числа е 3456, а най-големият им общ делител е 24. Колко най-малко може да бъде по-голямото от тези две числа?

А) 72 **Б)** 48 **В)** 36 **Г)** 96

Отговор: А. Нека числата са $24a$ и $24b$, където a и b, $a > b$, са взаимнопрости естествени числа. Тогава $24^2ab = 3456$, откъдето $ab = 6$. От последното следва, че търсената най-малка стойност на по-голямото от двете числа се получава при $a = 3$ и е равна на $24.3 = 72$

11. Колко са четирицифрените числа с ненулеви четни цифри, които имат следното свойство: както и да се разместят цифрите им, полученото число се дели на 4?

Отговор: 16. В число от разглеждания вид няма как има две цифри 2 и/или 6, защото ще получим число, завършващо на 22, 26, 62 или 66, т.е. неделящо се на 4. Тогава останалите цифри са 4 и 8 и сега е ясно, че не можем да имаме дори и една от цифрите 2 и 6, защото ще получим число, завършващо на 42, 82, 46 или 86. Следователно имаме само цифрите 4 и 8. Лесно се вижда, че всички числа съставени от 4 и 8, имат исканото свойство. Те са $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$ на брой.

12. За дадено двуцифрено число умножаваме цифрите му, после умножаваме цифрите на полученото число и т.н., докато не се получи едноцифрено число. Колко най-много числа (включително даденото двуцифрено и едноцифреното) могат да се получат по този начин от едно двуцифрено число?

Отговор: 5. Числото 77 дава 5 числа (77, 49, 36, 18, 8). До този резултат може да се стигне отзад-напред – записваме последното едноцифрено и построяваме последователно различните възможности. Пълен анализ показва, че не е възможно да се получат повече от 5 числа.

13. Едно естествено число се нарича алтерниращо, ако в десетичния му запис се редуват четни и нечетни цифри (например 2345 и 5236 са алтерниращи, но 1235 не е). Едно алтерниращо число A се нарича суперaлтерниращо, ако $2A$ също е алтерниращо (например 505 е суперaлтерниращо, но 1010 не е). Да се намери най-малкото суперaлтерниращо четирицифрено число.

Отговор: 1616. Ако търсеното число A започва с 1, при умножението $2A$ трябва да има пренос при хилядите, защото последната цифра на $2A$ е четна. Следователно $A \geq 1610$ (втората цифра на A трябва да е четна, а третата – нечетна). Оттук с директна проверка бързо достигаме до отговора 1616.

14. Колко най-много шахматни коня могат да се разположат върху шахматна дъска 8×8 така, че никои два да не се атакуват?

Отговор: 32. Можем да разположим 32 коня на белите полета и условието никои два да не се атакуват ще е изпълнено. От друга страна, не е трудно да се провери директно, че на дъска 4×2 не могат да се поставят повече от 4 коня така, че никое два да не се атакуват. Тъй като голямата дъска 8×8 се разбива на 8 малки 2×4, максималният възможен брой на конете е 32.

15. Ани и Борис имат 49 карти, на които са написани числата $1, 2, \ldots, 49$ (по едно число на карта). Борис изтеглил 21 карти, а Ани – 25 карти, след което всеки пресметнал сумата на числата от изтеглените от него карти. Оказало се, че сумата на Ани е четири пъти по-голяма от сумата на Борис. Кое е най-голямото число, записано върху някоя от трите неизтеглени карти?

Отговор: 25. Минималната възможна сума на Борис е $1+2+\cdots+21 = 21.22/2 = 21.11 = 231$. Това означава, че сумата на Ани е поне $4.231 = 924$. Но максималната възможна сума на Ани $25 + 26 + \cdots + 49 = 25.25 + 1 + 2 + \cdots + 24 = 625 + 24.25/2 = 925$ не отговаря на условието, защото е нечетна. Следователно сумата на Ани е 924, тя е изтеглила картата 24 и всички карти от 26 до 49, а търсеното число е 25.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.