Математически турнир „Иван Салабашев“, 2017 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Кое е най-голямото цяло число, което е по-малко от

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}-\frac{3}{2}-\frac{5}{3}-\frac{7}{5}\ ?$$

А) -6; **Б)** -4; **В)** -3; **Г)** -2.

Отговор: В.

2. Ако $a^2+2ab+4b^2+2^{10}=2^m$, където $a=2^5$ и $b=2^4$, на колко е равно m?

А) 10; **Б)** 11; **В)** 12; **Г)** не може да се определи.

Отговор: В. Тъй като $a^2+2ab=4b^2+2^{10}=2^{11}$, получаваме $2^m=2^{12}$, откъдето $m=12$.

3. Дадени са два правоъгълника $ABCD$ и $BEFD$, като върхът C на първия лежи на страната EF на втория. Известно е, че $AB=12$ и $BC=5$. Да се намери лицето на петоъгълника $ABEFD$

А) 90; **Б)** 100; **В)** 60; **Г)** 84.

Отговор: А. Лицето на $\triangle BCD$ е 30 и то е равно на половината от лицата и на двата правоъгълника. Следователно лицето на петоъгълника е $3.30=90$.

4. Средната възраст на шестима приятели е 13. Ако към тях се добавят още трима, средната възраст на цялата група става 15. Каква е средната възраст на добавените трима?

А) 15; **Б)** 17; **В)** 19; **Г)** 21.

Отговор: В. Ако възрастите на първите 6 са $a_1,a_2,\dots,a_6$, а на добавените a_7,a_8,a_9, от условието следва, че $a_1+a_2+\dots+a_6=6.13$ и $a_1+a_2+\dots+a_9=9.15$. Тогава $a_7+a_8+a_9=9.15-6.13=57$, което означава, че търсената средна възраст е 19.

5. Колко са четирицифрените числа с четни първа (ненулева) и последна цифра, които нямат делител, по-голям от 2000 и по-малък от 2020?

А) 1944; **Б)** 1945; **В)** 1960; **Г)** 1964.

Отговор: А. Четирицифрените числа с четни първа и последна цифра са $4.10.10.5=2000$. От тях трябва да махнем по две за всеки от нечетните делители $2001,2003,\dots,2019$ (общо $10.2=20$) и по четири за всеки от четните делители $2002,2004,\dots,2018$ (общо $9.4=36$). Лесно се вижда, че няма число, което да се премахва и по двата начина. Следователно търсеният брой е $2000-20-36=1944$.

6. Точка E е вътрешна за квадрата $ABCD$ и е такава, че $AB=BE$ и $\sphericalangle DAE=27^\circ$. Правите AC и BE се пресичат в точка F. Да се намери $\sphericalangle BFA$.

А) 81°; **Б)** 80°; **В)** 99°; **Г)** 89°.

Отговор: А. Търсеният ъгъл е външен за $\triangle AFE$. Имаме $\sphericalangle FAE=45^\circ-27^\circ=18^\circ$ и $\sphericalangle AEF=\sphericalangle BAE=90^\circ-27^\circ=63^\circ$. Следователно $\sphericalangle BFA=18^\circ+63^\circ=81^\circ$.

7. С $n!$ се означава произведението $1.2.3.\cdots.n$ (например $4! = 1.2.3.4 = 24$). Кое е най-голямото n, за което $n!$ завършва на точно 100 нули?

А) 405; **Б)** 409; **В)** 410; **Г)** 414.

Отговор: Б. Трябва да намерим най-голямото n, за което степенният показател на 5 в каноничното разлагане на $n!$ е равен на 100. Отчитайки приносите на кратните на 5, но не и на 25, на кратните на 25, но не и на 125 и на кратните на 125 получаваме, че степенен показател 100 се достига за пръв път при $405!$, а следващата степен на 5 ще се появи в $410!$. Следователно търсеното n е 409.

8. В един клас не по-малко от 96.5% и не повече от 97.5% от учениците никога не са получавали двойки. Колко най-малко ученици има в този клас?

А) 20; **Б)** 26; **В)** 28; **Г)** 29.

Отговор: Г. Нека в класа има N ученици. От условието следва, че поне един от тях някога е имал двойка. Следователно $\frac{3.5}{100} \cdot N \geq 1$, откъдето $N \geq \frac{200}{7} = 28\frac{4}{7}$, т.е. $N \geq 29$. Клас с 29 ученици и един двойкаджия изпълнява условието.

9. На един остров живеят рицари, които винаги казват истината, и лъжци, които винаги лъжат. За говорител на острова се кандидатирали жителите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и всеки от тях се изказал, като A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, казал: „Без да броите мен, от останалите кандидати лъжците са с k повече от рицарите“. Колко най-много са кандидатите?

А) 2; **Б)** 3; **В)** 4; **Г)** не може да се определи.

Отговор: Б. Ако измежду кандидатите има x лъжци, то $n-1 = x+(x-k)$, т.е. x е еднозначно определено от k. Това означава, че измежду кандидатите има най-много един рицар. Ако няма рицар, то $n = 1$. Ако $n > 1$ то A_{n-1} е рицар. Тогава $n \leq 3$, защото при $n > 3$ ще следва, че и A_{n-3} също е рицар. Следователно търсената максимална стойност на n е 3 и се достига от кандидати лъжец, рицар, лъжец.

10. Колко са трицифрените естествени числа x, за които съществува естествено число y, такова, че $x^2 + y^2$ се дели на 7.

А) 130; **Б)** 128; **В)** 127; **Г)** 129.

Отговор: Б. Изследване на квадратите на целите числа при деление на 7 показва, че $7|x^2 + y^2 \iff 7|x, 7|y$. Следователно търсените x са точно тези, които се делят на 7 и броят им е 128 $(900 = 128.7 + 4)$.

11. От петцифреното число A са получени две шестцифрени числа P и Q съответно с добавяне на цифрата 1 в началото и в края на A. Оказало се, че $Q = 3P$. Да се намери A.

Отговор: 42857. От условието следва, че $10A + 1 = Q$ и $100000 + A = P$. Тогава $Q = 3P$ дава уравнението $10A + 1 = 300000 + 3A$, откъдето намираме $A = 42857$.

12. В някои от клетките на таблица с размери 20×21 са поставени пулове така, че във всеки правоъгълник с размери 2×3 има точно два пула. Колко пула се съдържат в таблицата?

Отговор: 140. Разглеждането на квадрат 3×3 с център клетка, в която има пул, води до извода, че в такъв квадрат има три пула (и те са разположени по единия диагонал). Лесно се вижда, че в квадрат 3×3 има 3 или 4 пула. При това, ако в квадрат 3×3 има 4 пула, те са в четирите ъглови клетки. Тогава, поне един от четирите квадрата с център тези ъглови клетки е изцяло в таблицата и в този квадрат трите пула са в единия диагонал. Лесно се вижда, че съществува правоъгълник 2×3 с повече от да пула. Тъй като дадената таблица се разбива на 42 квадрата 3×3 и 7 правоъгълника 2×3, общият брой на пуловете в таблицата е $42.3 + 7.2 = 140$.

13. За числото $M \leq 1000$ е известно, че ако изберем по случаен начин число измежду $1, 2, \ldots, 1000$, вероятността избраното число да е делител на M е $\dfrac{1}{100}$. Коя е най-голямата възможна стойност на M?

Отговор: 976. От условието следва, че M има точно 10 естествени делителя. Тогава каноничното разлагане на M е p^9 или $p^4 q$, където p и q са прости числа. В първия случай максималното M е $2^9 = 512$, а във втория – $2^4.61 = 976$, което е и търсеното.

14. В изпъкнал n-ъгълник, $n \geq 4$, са построени всички диагонали. Оказало се, че никои три от тях не се пресичат в една точка и че пресечните точки на диагоналите (без да броим върховете) са 715. Да се намери n.

Отговор: 13. Тъй като всяка пресечна точка на два диагонала определя еднозначно четириъгълника, чийто диагонали са тези два, броят на пресечните точки е $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2}$. Когато n расте, числото $\binom{n}{4}$ също расте. Следователно равенството $\binom{n}{4} = 715$ е възможно само за една стойност на n. Проверка на приличащи на подходящи n дава отговора $n = 13$.

15. Да се намери сумата на всички естествени числа m със следното свойство: съществуват точно 2017 естествени числа n, за които едновременно са изпълнени неравенствата

$$2 \leq \frac{m}{n} \leq 5.$$

Отговор: 20165. Дадените неравенства могат да се запишат във вида $2m \leq 10n \leq 5m$. Това означава, че в множеството $\{2m, 2m+1, \ldots, 5m-1, 5m\}$ има точно 2017 кратни на 10. Тогава $2016 \leq \frac{3m}{10} \leq 2018$, откъдето $m \in \{6720, 6721, \ldots, 6726\}$. Директна проверка показва, че исканото свойство имат $m = 6720$, 6722 и 6723 (например при $m = 6720$ множеството е $\{13440, \ldots, 33600\}$ и в него има $3360-1344+1 = 2017$ кратни на 10, а при $m = 6724$ множеството е $\{13448, \ldots, 33620\}$ и в него има $3362 - 1345 + 1 = 2018$ кратни на 10). Търсената сума е $6720 + 6722 + 6723 = 20165$.