Математически турнир „Иван Салабашев“, 2016 г.

Решения на задачите от темата за 10–12 клас

Задача 1. Ъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle DAC$ пресичат страните BC и DC на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ в точки E и F. Да се докаже, че медицентърът M на $\triangle BCD$ лежи на EF тогава и само тогава, когато $AC = AB + AD$.

Решение. Имаме, че

$$M \in EF \Leftrightarrow S_{CEF} = S_{CEM} + S_{CFM} = \frac{CE}{CB} S_{CBM} + \frac{CF}{CD} S_{CDM} =$$

$$\left(\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CD}\right)\frac{S_{CBD}}{3} = \left(\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CD}\right)\frac{CB}{CE} \cdot \frac{CD}{CF} \cdot \frac{S_{CEF}}{3} =$$

$$\left(\frac{CB}{CE} + \frac{CD}{CF}\right)\frac{S_{CEF}}{3} = \left(1 + \frac{AB}{AC} + 1 + \frac{AD}{AC}\right)\frac{S_{CEF}}{3}$$

(последното равенство следва от свойството на ъглополовящите) и значи

$$M \in EF \Leftrightarrow AC = AB + AD.$$

Оценяване. По 1 т. за седемте равенства.

Задача 2. Да се докаже, че ако $a, b > 0$ и $a^3 + b^3 \geq 2$, то $a^2 + b^2 \geq a + b$.

Решение. Ако $\lambda^3 = a^3 + b^3$, $a = \lambda c$ и $b = \lambda d$, то $\lambda \geq 1$, $c^3 + d^3 = 2$ и неравенството приема вида $\lambda(c^2 + d^2) \geq c + d$. Значи е достатъчно да докажем неравенството при $\lambda = 1$. Сега можем да считаме, че $a \leq 1 \leq b$. Понеже $(a^2 + a + 1)(a^2 - a) = a(a^3 - 1) = a(1 - b^3) = a(1 - b)(b^2 + b + 1)$, то

$$(a^2 + a + 1)(a^2 + b^2 - a - b) \circeq (b - 1)(b(a^2 + a + 1) - a(b^2 + b + 1)) \triangleq (b - 1)(b - a)(1 - ab).$$

Остава да съобразим, че $ab \leq 1$ от неравенството между СА и СГ.

Оценяване. 2 т. за редукция до $\lambda = 1$, 2 т. за $\circeq$, 2 т. за $\triangleq$ и 1 т. за $ab \leq 1$.

Задача 3. Да се докаже, че всяко естествено число n може да се представи във вида $a^2 + 2b^2 - 11c^2$, където a, b и c са естествени числа.

Решение. Имаме следните представяния на $n = 2^k(2m + 1)$ в четирите възможни случая:
$k = 2l$, $m = 0$: $a = 2^{l+1}$, $b = 2^{l+1}$, $c = 2^l$;
$k = 2l + 1$, $m = 0$: $a = 2^{l+2}$, $b = 9.2^l$, $c = 2^{l+2}$;
$k = 2l$, $m \geq 1$: $a = 2^l(m + 1)$, $b = 7.2^l m$, $c = 3.2^l m$;
$k = 2l + 1$, $m \geq 1$: $a = 3.2^l m$, $b = 2^l(m + 1)$, $c = 2^l m$.

Оценяване. 1 т. за първия случай и по 2 т. за другите три случая.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.