Математически турнир „Иван Салабашев“, 2017 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. В израза $\dfrac{x+1}{x-1}$ заместваме x с $\dfrac{y+1}{y-1}$. Полученият израз е равен на:

А) $\dfrac{y+1}{y-1}$ **Б)** $\dfrac{y-1}{y+1}$ **В)** y **Г)** $\dfrac{1}{y}$

Отговор: В. Имаме $\dfrac{\dfrac{y+1}{y-1}+1}{\dfrac{y+1}{y-1}-1}=\dfrac{\dfrac{2y}{y-1}}{\dfrac{2}{y-1}}=y.$

2. Нека $x=-10$. Числото $|||x|-x|-|x||-x$ е равно на:

А) -20 **Б)** -10 **В)** 10 **Г)** 20

Отговор: Г. Числото е равно на

$$|||-10|-(-10)|-|-10||-(-10)=||2.10|-|-10||-(-10)=|10|-(-10)=20.$$

3. Пет отсечки имат дължини съответно 1, 3, 5, 7 и 9. Колко различни триъгълници могат да се построят с три от тези отсечки? **А)** 4 **Б)** 3 **В)** 2 **Г)** 1

Отговор: Б. Три отсечки с дължини $a>b>c$ са страни на триъгълник, точно когато $a<b+c$. Следователно единствените възможни триъгълници са тези със страни $(3,5,7)$, $(3,7,9)$ и $(5,7,9)$.

4. Едната страна на правоъгълник е увеличена с 25%. С колко процента трябва да се увеличи другата страна така, че лицето на правоъгълника да се увеличи с 35%?

А) 4% **Б)** 6% **В)** 8% **Г)** 10%

Отговор: В. Нека страните на правоъгълника са a и b и те са увеличени съответно с 25% и x%. Тогава страните на новия правоъгълник са

$$a+\frac{25}{100}a=\frac{5}{4}a, b+\frac{x}{100}b=\frac{100+x}{100}b.$$

Неговото лице е равно на $\dfrac{5}{4}a.\dfrac{100+x}{100}b$ и от условието следва, че

$$\frac{5}{4}a.\frac{100+x}{100}b=ab+\frac{35}{100}ab.$$

След съкращаване на ab и преобразуване получаваме $x=8$.

5. Нека a,b,c са три различни едноцифрени числа. Най-голямата стойност на сумата на корените на уравнението $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$ е равна на:

А) $\dfrac{31}{2}$ **Б)** $\dfrac{33}{2}$ **В)** $\dfrac{35}{2}$ **Г)** $\dfrac{37}{2}$

Отговор: Б. От $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=(x-b)(2x-a-c)$ следва, че корените на уравнението са b и $\dfrac{a+c}{2}$ и тяхната сума е равна на $\dfrac{2b+a+c}{2}$. Нейната най-голяма стойност се получава при $b=9,a=8,c=7$ или $b=9,a=7,c=8$ и е равна на $\dfrac{33}{2}$.

6. Нека a и b са различни реални числа, за които $a + \frac{2}{a} = b + \frac{2}{b}$. Числото ab е равно на:
А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

<u>**Отговор: Б.**</u> От даденото равенство имаме $(a-b)\left(1 - \frac{2}{ab}\right) = 0$. Тъй като $a \neq b$ следва, че $ab = 2$.

7. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = AC = 28$ и $BC = 20$. Нека D, E и F са точки съответно върху страните AB, BC и AC така, че DE и EF са успоредни съответно на AC и AB . Периметърът на четириъгълник $ADEF$ е равен на:
А) 28 **Б)** 56 **В)** 84 **Г)** 112

<u>**Отговор: Б.**</u> Четириъгълник $ADEF$ е успоредник. От $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle DEB$ следва, че $DB = DE$. Тогава $AD + DE = AD + DB = AB = 28$ и периметърът на $ADEF$ е равен на $2(AD + DE) = 56$

8. Едно трицифрено число дава остатъци 1, 3 и 10 при деление съответно на 9, 10 и 11. При деление на 13 това число дава остатък:
А) 1 **Б)** 3 **В)** 5 **Г)** 7

<u>**Отговор: А.**</u> Нека N е даденото число. Тогава $N = 9k + 1 = 10l + 3 = 11m + 10$, където k, l и m са естествени числа. От второто равенство следва, че 10 дели $k + 2$, т.е. $k = 10t - 2$. Тогава $N = 90t - 17 = 11m + 10$ и следва, че 11 дели $2t + 6$, т.е. $t + 3$ и $t = 11s - 3$, където s е естественао число. Следователно $N = 90t - 17 = 990s - 287$ и понеже N е трицифрено число заключаваме, че $s = 1$, т.е. $N = 703$. Това число дава остатък 1 при деление на 13.

9. Нека x и y са естествени числа, за които $3x^2y^2 + y^2 = 12x^2 + 52$. Числото $x^2 + y^2$ е равно на:
А) 10 **Б)** 17 **В)** 20 **Г)** 25

<u>**Отговор: Б.**</u> Даденото равенство записваме във вида $(3x^2+1)(y^2-4) = 3.4^2$. Оттук $3x^2+1 = 4$ и $y^2 - 4 = 3.4$. (Защо?). Следователно $x = 1, y = 4$ и $x^2 + y^2 = 17$.

10. Нека $ABCD$ е квадрат с лице 3, M и N са средите на страните AB и BC и K е пресечната точка на AN и CM. Лицето на четириъгълник $AKCD$ е равно на:
А) $\frac{2}{2}$ **Б)** $\frac{3}{2}$ **В)** $\frac{4}{2}$ **Г)** $\frac{5}{2}$

<u>**Отговор: В.**</u> Нека O е пресечната точка на AC и BD. Тогава O е средата на AC и тъй като K е медицентърът на триъгълник ABC следва,че точките B, K, O, D лежат на една права. Следователно
$$\frac{DK}{KB} = \frac{DO + KO}{KB} = \frac{BK + 2KO}{BK} = 2.$$
Триъгълниците DKC и DBC имат една и съща височина през върха C и следователно
$$\frac{S_{DKC}}{S_{DBC}} = \frac{DK}{DB} = \frac{2}{3}.$$
Тъй като $S_{DBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{3}{2}$ следва, че $S_{DKC} = 1$. Аналогично $S_{DKA} = 1$ и $S_{AKCD} = 2$.

11. Да се намери най-малкото естествено число n такова, че както и да се представи 10^n като произведение на две естествени числа поне едно от тези числа има цифра 0.

<u>**Отговор: 8.**</u> Ако и двете числа се делят на 2 и на 5, то последната им цифра е 0. Следователно трябва да разгледаме случая, когато двете числа са 2^n и 5^n и да намерим най-малкото n, за което поне едно от тях има цифра 0. За 2 това е $n = 10$, а за 5 е $n = 8$ и отговорът е 8.

12. Нека a, b, c са реални числа, за които $a + b + c = 3$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Да се намери произведението на най-малката и най-голямата възможна стойност на c.

Отговор: -3. От $a+b = 3-c, a^2+b^2 = 9-c^2$ и неравенството $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ (еквивалентно на $(a-b)^2 \geq 0$) следва, че $2(9-c^2) \geq (3-c)^2$. От тук $(c-1)^2 \leq 4$, т.е. $-2 \leq c-1 \leq 2$. Следователно най-голямата стойност на c е 3, а най-малката е -1. Те се достигат съответно при $a = b = 0$ и $a = b = 2$.

13. Нека $n = 2017^2 + 2^{2017}$. Да се намери последната цифра на числото $n^2 + 2^n$.

Отговор: 3. Ако $k = 4m + 1$ последната цифра на числото $2^k = 2.16^m$ е 2. В частност, последната цифра на 2^{2017} е 2. Тъй като последната цифра на 2017^2 е 9, то последната цифра на n, а значи и на n^2 е 1. От друга страна n има вида $4m + 1$ и последната цифра на 2^n е 2, т.е. последната цифра на $n^2 + 2^n$ е 3.

14. Нека A е множество от m последователни цели числа със сума $2m$, а B е множество от $2m$ последователни цели числа със сума m. Да се намери m, ако абсолютната стойност на разликата на най-големите елементи на A и B е 100.

Отговор: 203. Нека $A = \{a + 1, \dots, a + m\}, B = \{b + 1, \dots, b + 2m\}$.

Тъй като $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ от условието следва, че

$$ma + \frac{m(m+1)}{2} = 2m, 2mb + \frac{2m(2m+1)}{2} = m \text{ и } |a - b - m| = 100.$$

От първите две равенства получаваме съответно $a = \dfrac{3-m}{2}$ и $b = -m$. Като заместим в третото равенство получаваме $\left|\dfrac{3-m}{2}\right| = 100$ и тъй като m е естествено число следва, че $m = 203$.

15. Да се намери броят на естествените числа от 1 до 1000 включително, които могат да се представят като разлика на квадратите на две неотрицателни цели числа.

Отговор: 750. Числата с исканото свойство имат вида $(x + y)(x - y)$. Всяко нечетно число $2n - 1$ има този вид, защото можем да изберем $x = n, y = n - 1$. Броят на нечетните числа от 1 до 1000 е 500. Да предположим, че $(x + y)(x - y)$ е четно число. Тогава поне едно от числата $x + y$ и $x - y$ е четно число и тъй като разликата им $(x + y) - (x - y) = 2y$ е четно число, следва, че и двете числа са четни, т.е. четното число се дели на 4. Обратно, всяко естествено число от вида $4n$ може да се представи във вида $(x + y)(x - y)$, като вземем $x = n + 1, y = n - 1$. Броят на числата от 1 до 1000, които се делят на 4 е 250. Следователно търсеният брой е $500 + 250 = 750$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.