СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“– СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

2 декември 2017 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

За вярно решение на всяка от задачите се присъждат по 7 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори.
Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 24.12.2017 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

Задача 1. Точка B лежи на едното рамо на остър ъгъл с връх точка A, а точка C се движи върху другото рамо така, че $\triangle ABC$ е остроъгълен. Нека AA_1 и CC_1 са височини в $\triangle ABC$ ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$). Да се докаже, че правата A_1C_1 минава през постоянна точка.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа a и b, за които числото $a^4 + a^2b^2 + b^4$ има само един прост делител.

Задача 3. а) Да се докаже, че ако $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$, то

$$\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

б) Да се намерят всички реални числа $t > 0$, за които неравенството

$$\frac{x}{t+x+xy} + \frac{y}{t+y+yz} + \frac{z}{t+z+zx} \leq \frac{1}{t}$$

е изпълнено за произволни реални числа $x, y, z > 0$.