УДК 515.12 https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/04

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

©***Холтураев Х. Ф.***, *ORCID: 0000-0002-3239-5436, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан, xolsaid_81@mail.ru*

SOME APPLICATIONS IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES SPACE

©***Kholturaev Kh.***, *ORCID: 0000-0002-3239-5436, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan, xolsaid_81@mail.ru*

Аннотация. В работе доказан max–plus вариант теоремы Фубини для идемпотентных вероятностных мер. Также доказана метризуемость компакта, если пространство идемпотентных вероятностных мер, определенных на нем, наследственно нормально.

Abstract. For idempotent probability measures, max–plus variant of Fubini theorem is established. Further, it is proven metrizability of a given compact if the space of idempotent probability measures defined on the compact, is hereditary normal.

Ключевые слова: идемпотентная мера, компактное Хаусдорфово пространство, метризуемость.

Keywords: idempotent measure, compact Hausdorff space, metrizability.

Введение

Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее «классический аналог» — идемпотентная математика, т.е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Для идемпотентных полуполей выполнены все стандартные аксиомы кроме наличия вычитания; вместо этого выполняется свойство идемпотентности сложения; $x + x = x$. Типичным примером является алгебра max–plus, состоящая из вещественных чисел (и символа «минус бесконечность», играющего роль нуля) и имеющая операцию maximum в качестве сложения и обычное сложение в качестве (нового) умножения.

Напомним [1], что множество S называется *полукольцом*, если в нем определены две операции $\oplus$ — сложение и $\odot$ — умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

– сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
– сложение $\oplus$ коммутативно;
– умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \text{ и } (x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

для всех $x, y, z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $1 \in S$, что $1 \odot x = x \odot 1 = x$ для всех $x \in S$. *Нулем* полукольца S называется такой элемент $0 \in S$, что $0 \neq 1$ и $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным полукольцом*, если $x \oplus x = x$ для всех

 Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

$x \in S$. (Идемпотентное) полукольцо S с элементами 0 и 1 называется (*идемпотентным*) *полуполем*, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Изложим *деквантование Маслова*. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – поле вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций сложения и умножения). Рассмотрим отображение $\Phi_h: \mathbb{R} \longrightarrow S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное равенством

$$\Phi_h(x) = h \ln x, \qquad h > 0. \tag{1}$$

Перенесем обычные операции сложения и умножения из $\mathbb{R}$ в S с помощью отображения Φ_h. Пусть

$$u = \Phi_h(x) = h \ln x, v = \Phi_h(y) = h \ln y.$$

Тогда

$$\Phi_h(x+y) = h \ln(x+y) = h \ln\left(e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}}\right),$$
$$\Phi_h(xy) = h \ln(xy) = h \ln x + h \ln y.$$

Положим $u \oplus_h v = \Phi_h(x+y)$ и $u \odot v = \Phi_h(xy)$, т. е. $u \oplus_h v = h \ln\left(e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}}\right)$ и $u \odot v = u + v$. Образ $\Phi_h(0) = -\infty$ обычного нуля 0 является нулем 0 и образ $\Phi_h(1) = 0$ обычной единицы 1 — единицей 1 в S относительно этих операций. Таким образом, S приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbb{R}_+$.

Непосредственная проверка показывает, что $u \oplus_h v \longrightarrow \max\{u, v\}$ при $h \to 0$. Несложно проверить, что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \oplus v = u + v$ с нулевым элементом $0 = -\infty$ и единицей $1 = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$; оно является идемпотентным полуполем. Переход из $\mathbb{R}^{(h)}$ к предельному состоянию $\mathbb{R}_{\max}$ при $h \to 0$ и процедура квантования аналогичны. Здесь параметр h играет роль постоянной Планка. Поэтому полуполе $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}^{(h)}$ рассматривают как «квантовый» объект, а $\mathbb{R}_{\max}$ — как результат его деквантование. Изложенный переход из $\mathbb{R}_+$ к $\mathbb{R}_{\max}$ называется *деквантованием Маслова.*

Идемпотентная математика продвинута весьма далеко (в частности, построен идемпотентный функциональный анализ [1]) и имеет многочисленные приложения (в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления [2–3]).

В настоящей статье рассмотрим функтор I идемпотентных вероятностных мер. В традиционной математике идемпотентной вероятностной мере соответствует вероятностная мера. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики. В частности, такие меры возникают в задачах динамической оптимизации; аналогия между интегрированием Маслова и оптимизацией отмечена также в [3] где утверждается, что использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей. В отличие от случая вероятностных мер, рассмотрению которых посвящена обширная литература [4–5], геометрические и топологические свойства пространств идемпотентных мер практически не исследовано.

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

Основные результаты

Пусть X — компакт (≡компактное Хаусдорфово пространство), $C(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями и sup -нормой. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам $\varphi\oplus\psi = \max\{\varphi,\psi\}$ и $\varphi\odot\psi = \varphi + \psi$, где $\varphi,\psi \in C(X)$. Напомним, что функционал $\mu: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ называется [6] *идемпотентной вероятностной мерой* на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X − постоянная функция (нормированность);

(ii) $\mu(\lambda\odot\varphi) = \lambda\odot\mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность);

(iii) $\mu(\varphi\oplus\psi) = \mu(\varphi)\oplus\mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность).

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X.

Идемпотентная вероятностная мера непрерывна [11–12]. Действительно, всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *сохраняет порядок,* то есть неравенство $\varphi \le \psi$ влечет $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$, где $\varphi,\ \psi \in C(X)$. Действительно, так как неравенство $\varphi \le \psi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi\oplus\psi = \psi$, то имеем

$$\mu(\varphi) \le \mu(\varphi)\oplus\mu(\psi) = \mu(\varphi\oplus\psi) = \mu(\psi).$$

Кроме того, свойство (ii) в определении означает, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *слабо аддитивна,* т. е. $\mu(\varphi + \lambda_X) = \mu(\varphi) + \lambda$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть теперь $\varphi, \psi \in C(X)$ − функции такие, что $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $-\varepsilon_X < \psi - \varphi < \varepsilon_X$, $\varphi-\varepsilon_X < \psi < \varphi + \varepsilon_X$, $\mu(\varphi) - \varepsilon < \mu(\psi) < \mu(\varphi) + \varepsilon$ т. е. $|\mu(\psi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon$.

Ясно, что $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ − тихоновского произведения числовых прямых. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ относительно индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ в $I(X)$ топологии образуют множества вида

$$\langle\mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon\rangle = \{\nu \in I(X): |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, индуцированная топология и топология поточечной сходимости на $I(X)$ совпадают. Для компакта X топологическое пространство $I(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом [6].

Пусть X, Y — компакты, $f: X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение. Определим отображение $I(f): I(X) \longrightarrow I(Y)$ по формуле $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$. Так как композиция непрерывных отображений непрерывна, то отображение $I(f)$ непрерывно [12]. Таким образом, конструкция I переводит компакты в компакты и непрерывные отображения — в непрерывные, то есть I образует функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Более того, конструкция I является нормальным функтором.

В работе [7] установлено взаимосвязь пространств $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер и $P(X)$ «традиционных» вероятностных мер (т. е. неотрицательных, линейных и нормированных функционалов $\mu: C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$), а также построено пример, показывающий не изоморфность функторов I и P.

Напомним, что функтор $F: Comp \longrightarrow Comp$, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, называется ([8], определение 14) *нормальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. F непрерывен $F(\lim S) = \lim F(S)$,
2. F сохраняет вес $(wX = wF(X))$,
3. F мономорфен (т.е. сохраняет инъективность отображений),
4. F эпиморфен (т.е. сохраняет сюрьективность отображений),
5. F сохраняет пересечения ($F(\bigcap_\alpha X_\alpha) = \bigcap_\alpha(F(X_\alpha))$),
6. F сохраняет прообразы $(F(f^{-1}) = F(f)^{-1})$,
7. F сохраняет точку и пустое множество $(F(1) = 1$, $F(\emptyset) = \emptyset)$.

Расшифруем это определение. Пусть $S = \left\{X_\alpha, P_\alpha^\beta, \mathfrak{U}\right\}$ − обратный спектр компактов $\lim S = \lim\limits_{\leftarrow} S$ − его предел. Согласно теореме Куроша предел обратного спектра непустых компактов F не пуст ([9], теорема 3.13) и является компактом ([9], предложение 3.12). Под воздействием функтора F на компакты X_α и на отображения P_α^β, α, $\beta \in \mathfrak{U}$, $\alpha \prec \beta$, образуется обратный спектр $F(S) = \left\{F(X_\alpha), F\left(P_\alpha^\beta\right); \mathfrak{U}\right\}$. Пусть $\lim F(S)$ − предел этого спектра. Условие 1 требует, чтобы выполнялось равенство $F\,(\lim S) = \lim F(S)$. Для топологического пространства X через wX обозначают его вес, т. е. наименьшую из мощностей баз пространства X. Условие 2 требует, чтобы весы компактов X и $F(X)$ были равны. Мономорфность функтора F (условие 3) позволяет считать $F(A)$ подпространством $F(X)$ для замкнутого $A \subset X$. Отождествление $F(A)$ с подпространством $F(X)$ осуществляется вложением $F(i_A)$, где $i_A: A \longrightarrow X$ — тождественное вложение. Условие 4 требует, что если $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение «на», то $F(f): F(X) \longrightarrow F(Y)$ также было непрерывным «на» отображением. Для мономорфного функтора F условия 5 и 6 расшифровываются так: для любого семейства $\{X_\alpha\}$ замкнутых подмножеств произвольного компакта X выполнено равенство $F(\bigcap_\alpha X_\alpha) = \bigcap_\alpha(F(X_\alpha))$ (условие 5); для любого непрерывного отображения $f: X \longrightarrow Y$ и любого замкнутого B в Y выполнено равенство $F(f^{-1}(B)) = F(f)^{-1}F(B)$ (условия 6). Условие сохранения точки означает, что F переводит одноточечное пространство в одноточечное.

Условие сохранения пересечений позволяет определить для мономорфного функтора F важное понятие носителя. *Носителем* точку $x \in F(X)$ называется ([8], определение 18) такое замкнутое подмножество $\operatorname{supp} x \subset X$, что соотношения $A \supset \operatorname{supp} x$ и $x \in F(X)$ и определяется из соотношения

$$\operatorname{supp} x = \bigcap\{A \subset X: \bar{A} = A, x \in F(A)\},$$

где $\bar{A}$ — замыкание множество

Как уже отметили, что функтор I идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, нормален, то для каждого компакта X и для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp} \mu = \bigcap\{A \subset X: \bar{A} = A, \mu \in I(A)\}.$$

Для компакта X и положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X): |\operatorname{supp} \mu| \leq n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют *идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.*

Пусть $x \in X$ – некоторая точка компакта X. Функционал $\delta_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, определенный по правилу $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$, называется *мерой Дирака*. Каждая мера Дирака является идемпотентной вероятностной мерой, причем $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$. Отметим, что

$$X \cong \delta(X) = \{\delta_x : x \in X\} = \{0 \odot \delta_x : x \in X\} = I_1(X).$$

Каждая идемпотентная вероятностная мера μ с конечным носителем представляется в виде

$$\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \dots \oplus \lambda_n \odot \delta_{x_n}$$

единственным способом (с точностью до перестановка местами), где $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – носитель μ, т. е. $\operatorname{supp} \mu = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Здесь коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям

$$\lambda_i > 0 \equiv -\infty,\ i = 1,2,\dots,n \text{ и } \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n = 1 \equiv 0, \qquad (2)$$

и называется max-plus *барицентрической массой* соответствующих точек x_i, $i = 1,2,\dots,n$. Ясно, что для идемпотентной вероятностной меры μ с конечным носителем включение $x_i \in \operatorname{supp} \mu$ справедливо тогда и только тогда, когда ее max-plus барицентрическая масса $\lambda_i > -\infty$.

Напомним, что подмножество L пространства $C(X)$ называется max-plus-линейным подпространством в $C(X)$, если: 1) $c_X \in L$ для каждого $c \in \mathbb{R}$; 2) $\lambda \odot \varphi \in L$, для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L$ и 3) $\varphi \oplus \psi \in L$, для каждой пары $\varphi, \psi \in L$.

Следующее утверждение можно рассматривать как max-plus вариант теоремы Хана-Банаха.

Лемма 1 [6]. Пусть L – max-plus-линейное подпространство в $C(X)$. Пусть $\mu : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ — функционал, удовлетворяющий условиям нормированности, однородности и аддитивности (с заменой $C(X)$ на L). Для произвольного $\varphi_0 \in C(X) \setminus L$ существует удовлетворяющее условиям нормированности, однородности и аддитивности продолжение отображения μ на минимальное max-plus-линейное подпространство L', содержащее $L \cup \{\varphi_0\}$.

Установим max-plus-варианта теоремы Фубини. Для этой цели рассмотрим следующее подмножество в $C(X \times Y)$:

$$C_0 = \{\oplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i : \varphi_i \in C(X) \text{ и } \psi_i \in C(Y),\ i = 1,2,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что C_0 – max-plus-линейное подпространство в $C(X \times Y)$. Для всякой пары $(\mu, \nu) \in I(X) \times I(Y)$ положим

$$(\mu \tilde{\otimes} \nu)(\oplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i) = \oplus_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i) \oplus \nu(\psi_i)$$

Предложение 1. $\mu \tilde{\otimes} \nu$ является идемпотентной вероятностной мерой на C_0.

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

Доказательство. Каждое $c \in \mathbb{R}$ можно представить как $c_{X\times Y} = a_X \odot b_Y$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a + b = c$. Поэтому $\left(\mu\widetilde{\otimes}\nu\right)(c_{X\times Y}) = (\mu\otimes\nu)(a_X\odot b_Y) = \mu(a)\odot\nu(b) = a\odot b = c$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ и $\oplus_{i=1}^{n}\varphi_i \odot \psi_i \in C_0$. Тогда

$$(\mu\widetilde{\otimes}\nu)(\lambda\odot\oplus_{i=1}^{n}\varphi_i \odot \psi_i) = (\mu\widetilde{\otimes}\nu)(\oplus_{i=1}^{n}(\lambda\odot\varphi_i)\odot\psi_i) = \oplus_{i=1}^{n}\mu(\lambda\odot\varphi_i)\odot\nu(\psi_i) =$$
$$= \oplus_{i=1}^{n}\lambda\odot\mu(\varphi_i)\odot\nu(\psi_i) = \lambda\odot\oplus_{i=1}^{n}\mu(\varphi_i)\odot\nu(\psi_i) = \lambda\odot(\mu\widetilde{\otimes}\nu)(\oplus_{i=1}^{n}\varphi_i\odot\psi_i).$$

Наконец, пусть $\oplus_{i=1}^{n}\varphi_{1i}\odot\psi_{1i} \in C_0$ и $\oplus_{j=1}^{m}\varphi_{2j}\odot\psi_{2j} \in C_0$. Тогда справедливо

$$(\mu\widetilde{\otimes}\nu)(\oplus_{i=1}^{n}\varphi_{1i}\odot\psi_{1i}\oplus\oplus_{j=1}^{m}\varphi_{2j}\odot\psi_{2j}) = (\mu\widetilde{\otimes}\nu)(\oplus\varphi_{kl}\odot\psi_{kl}) = \oplus\mu(\varphi_{kl})\odot\nu(\psi_{kl}) =$$
$$= \oplus_{i=1}^{n}\mu(\varphi_{1i})\odot\nu(\psi_{1i})\oplus\oplus_{j=1}^{m}\mu(\varphi_{2j})\odot\nu(\psi_{2j}) = (\mu\widetilde{\otimes}\nu)(\oplus_{i=1}^{n}\varphi_{1i}\odot\psi_{1i})\oplus(\oplus_{j=1}^{m}\varphi_{2j}\odot\psi_{2j})$$

Предложение 1 доказано.

Так как C_0 — max-plus-линейное подпространство в $C(X\times Y)$, то согласно лемме 1, существует продолжение идемпотентной вероятностной меры $(\mu\widetilde{\otimes}\nu)$ на $C(X\times Y)$. Положим

$$\mu\otimes\nu = \oplus\left\{\xi \in I(X\times Y): \xi|_{C_0} = \mu\widetilde{\otimes}\nu\right\}.$$

Таким образом, нами доказано следующий max-plus-вариант теоремы Фубини.

Теорема 1. Для всякой пары $(\mu,\nu) \in I(X)\times I(Y)$ существует единственная идемпотентная вероятностная мера $\mu\otimes\nu \in I(X\times Y)$ такая, что $(\mu\otimes\nu)(\varphi\odot\psi) = \mu(\varphi)\odot\nu(\psi)$, $\varphi \in C(X)$, $\psi \in C(Y)$.

Приведем одно из приложений пространства идемпотентных вероятностных мер – критерий метризуемости компактов. Для компакта X рассмотрим множество

$$0\odot I(X) = \{\mu \in I(X): \mu = \oplus_{x\in F} 0\odot\delta_x,\ \text{где } F \text{ замкнуто в } X\}.$$

Ясно, что $0\odot I(X)$ замкнуто в $I(X)$. Положим

$$F_n(X) = \{\mu \in F(X): |supp\ \mu| \le n\}, \quad F_{nn}(X) = F_n(X)\backslash F_{n-1}(X),$$

где $F = 0\odot I$ или $F = I$. Множества $F_n(X)$ и $F_{nn}(X)$ рассматриваются как подпространства пространства $I(X)$.

Для локально компактного пространства X через αX обозначают одноточечную александровскую компактификацию. Дискретное пространство мощности τ обозначают символом $\mathbb{N}_\tau$.

Предложение 2. Если τ — несчетный кардинал, то пространство $(0\odot I)_{22}(\alpha\mathbb{N}_\tau)$ не нормально.

Доказательство. В силу бесконечности кардинала τ и дискретности множества $\mathbb{N}_\tau$ существуют такие подмножества F_1 и F_2 пространства $\mathbb{N}_\tau$ что F_1 несчетно, F_2 счетно и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Определим подмножества A_1 и A_2 пространства $(0\odot I)_{22}(\alpha\mathbb{N}_\tau)$, полагая

$$A_1 = \left\{0\odot\delta_p\oplus 0\odot\delta_x : x \in F_1\right\},$$

$$A_2 = \{0\odot\delta_p\oplus 0\odot\delta_{x'}: x' \in F_2\},$$

где $p \in \alpha\mathbb{N}_\tau \setminus \mathbb{N}_\tau$. Очевидно, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Пусть $\mu = 0\odot\delta_{x1}\oplus 0\odot\delta_{x2} \in (0 \odot I)_{22}(\alpha\mathbb{N}_\tau)\setminus A_1$. Множество $\langle \mu; \chi_{\{x_1\}}, \chi_{\{x_1\}}; \frac{1}{2} \rangle$, где χ_G – характеристическая функция множества G, является открытой окрестностью меры μ, не пересекающейся с A_1. Следовательно, множество A_1 замкнуто в $(0 \odot I)_{22}(\alpha\mathbb{N}_\tau)$. Аналогично доказывается замкнутость множества A_2.

Для каждой точки $x \in \mathbb{N}_\tau$ положим

$$U_x = \langle 0\odot\delta_p\oplus 0\odot\delta_x: \chi_{\alpha\mathbb{N}_\tau\setminus\{x\}}, \chi_{\{x\}}; \frac{1}{2} \rangle.$$

Легко видеть, что наименьшими по включению окрестностями множеств A_1 и A_2 в $(0 \odot I)_{22}(\alpha\mathbb{N}_\tau)$ являются множества $OA_1 = \bigcup_{x\in F_1} U_x$ где $OA_2 = \bigcup_{x\in F_2} U_x$, соответственно. Для меры $0\odot\delta_a\oplus 0\odot\delta_b\oplus 0\odot\delta_{x_0}$, $a \in F_1$, $b \in F_2$, имеем

$$0\odot\delta_a\oplus 0\odot\delta_b \in \langle 0\odot\delta_p\oplus 0\odot\delta_a: \chi_{\alpha\mathbb{N}_\tau\setminus\{a\}}, \chi_{\{a\}}; \frac{1}{2} \rangle \subset OA_1,$$
$$0\odot\delta_a\oplus 0\odot\delta_b \in \langle 0\odot\delta_p\oplus 0\odot\delta_b: \chi_{\alpha\mathbb{N}_\tau\setminus\{b\}}, \chi_{\{b\}}; \frac{1}{2} \rangle \subset OA_2.$$

Значит, $OA_1 \cap OA_2 \neq \emptyset$. Предложение 2 доказано.

По построению $(0 \odot I)_{nn}(X)$ замкнуто в $I_{nn}(X)$ для каждого $n = 2,3, \dots$. Поэтому так как нормальность наследуется замкнутым подмножествам, то из предложения 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если τ — несчетный кардинал, то пространство $I_{22}(\alpha\mathbb{N}_\tau)$ не нормально.

Следствие 2. Если τ — несчетный кардинал, то пространство $I_{nn}(\alpha\mathbb{N}_\tau)$ не нормально, $n \geq 2$.

Теорема 2. Пусть X — компакт. Если пространство $I_3(X)\setminus X$ наследственно нормально то X метризуем.

Доказательство опирается результатам работы [10].

Следствие 3. Пусть X — тихоновское пространство и $n \geq 3$. Если пространство $I_n(X)\setminus X$ наследственно нормально, то X метризуем.

Список литературы:

1. Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz G. B. Idempotent functional analysis: an algebraic approach // Mathematical Notes. 2001. V. 69. №5-6. P. 696-729.

2. Litvinov G. L. The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction // Contemp. 377, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 2005, 1-17; arXiv:abs/math/0501038.

3. Bernhard P. Max-plus algebra and mathematical fear in dynamic optimization // Set-Valued Analysis. 2000. V. 8. №1-2. P. 71-84. https://doi.org/10.1070/IM2010v074n03ABEH002495

4. Fedorchuk V. V. Probability measures in topology // Russian Mathematical Surveys. 1991. V. 46. №1. P. 45-93. https://doi.org/10.1070/RM1991v046n01ABEH002722.

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

5. Fedorchuk V. V. Covariant functors in the category of compacta, absolute retracts, and Q-manifolds // Russian Mathematical Surveys. 1981. V. 36. №3. P. 211-233. https://doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004251.

6. Zarichnyi M. M. Spaces and maps of idempotent measures // Izvestiya: Mathematics. 2010. V. 74. №3. P. 481-499. http://dx.doi.org/10.1070/IM2010v074n03ABEH002495.

7. Заитов А. А., Холтураев Х. Ф. О взаимосвязи функторов *P* вероятностных мер и *I* идемпотентных вероятностных мер // Узбекский математический журнал. 2014. №4. С. 36-45.

8. Shchepin E. V. Functors and uncountable powers of compacta // Russian Mathematical Surveys. 1981. V. 36. №3. P. 1-71. http://dx.doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247.

9. Федорчук В. В. Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9. №4. С. 105-235.

10. Иванов А. В., Кашуба Е. В. О наследственной нормальности пространств вида *F(X)* // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49. №4. С. 813-824.

11. Заитов А. А., Ишметов А. Я. Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер // Математические заметки (принято к печати).

12. Ишметов А. Я. О функторе I_f идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №4. С. 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02.

References:

1. Litvinov, G. L., Maslov, V. P., & Shpiz, G. B. (2001). Idempotent functional analysis: an algebraic approach. *Mathematical Notes*, *69*(5-6), 696-729.

2. Litvinov, G. L. (2005). The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction. *Contemp. 377, Amer.Math.Soc., Providence, RI,* 1-17; arXiv:abs/math/0501038.

3. Bernhard, P. (2000). Max-plus algebra and mathematical fear in dynamic optimization. *Set-Valued Analysis, 8*(1-2), 71-84. https://doi.org/10.1070/IM2010v074n03ABEH002495.

4. Fedorchuk, V. V. (1991). Probability measures in topology. *Russian Mathematical Surveys, 46*(1), 45-93. https://doi.org/10.1070/RM1991v046n01ABEH002722.

5. Fedorchuk, V. V. (1981). Covariant functors in the category of compacta, absolute retracts, and Q-manifolds. *Russian Mathematical Surveys, 36*(3), 211-233. https://doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004251.

6. Zarichnyi, M. M. (2010). Spaces and maps of idempotent measures. *Izvestiya: Mathematics, 74*(3), 481-499. http://dx.doi.org/10.1070/IM2010v074n03ABEH002495.

7. Zaitov, A. A., & Kholturaev, Kh. F. (2014). On interrelation of the functors *P* of probability measures and *I* of idempotent probability measures. *Uzbek Mathematical Journal,* (4). 36-45. (in Russian).

8. Shchepin, E. V. (1981). Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Mathematical Surveys, 36*(3). 1-71. http://dx.doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247.

9. Fedorchuk, V. V. (2003). Fully closed mappings and their applications. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, 9*(4). 105-235.

10. Ivanov, A. V., & Kashuba, E. V. (2008). Hereditary normality of a space of the form *F(X)*. *Siberian Mathematical Journal, 49*(4), 650-659. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0061-5.

11. Zaitov, A. A., & Ishmetov, A. Ya. (2019). Homotopic properties of the space $I_f(X)$ of idempotent probability measures. *Mathematical notes*. (accepted).

12. Ishmetov, A. (2019). Functor I_f of idempotent probability measures. *Bulletin of Science and Practice, 5*(4), 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02.

*Работа поступила
в редакцию 21.02.2019 г.*

*Принята к публикации
26.03.2019 г.*

Ссылка для цитирования:

Холтураев Х. Ф. Некоторые применения пространства идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №4. С. 38-46. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/04.

Cite as (APA):

Kholturaev, Kh. (2019). Some Applications Idempotent Probability Measures Space. *Bulletin of Science and Practice, 5*(4), 38-46. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/04. (in Russian).