

关于边际利润函数的讨论(数列的应用)

(课堂教学实录)

2002年5月30日,全国中小学校长素质教育观摩团前往上海南洋模范中学参观。熊晓东为观摩团上了一堂题为“关于边际利润函数的讨论(数列的应用)”的数学课堂教学展示课。

数学教学现代化就是把数学教学置于现代化的生活情境中,把数学知识的传授逐步转化为学生适应现代化生活和适应未来发展需要的数学素养和数学能力的一种教育观念。问题解决和概念理解为核心的数学课程、灵活思考和将数学应用于创新实践为重点的教学思想、热烈活跃课堂讨论的教学形式、先进的多媒体教育技术,将教师如何对教学目标的选择、如何对教师与学生在讨论中角色定位等数学课堂教学各个环节都作了很好的表述。人们明显地感觉到“注重过程和记忆的数学教学”已经落后于时代。

观摩团成员评价说:“前沿的教学理论,成熟、大气的实践展示,这是一堂具有国际水准的数学课堂教学。”

课 题: 关于边际利润函数的讨论(数列的应用)

执教教师: 熊晓东

执教班级: 上海南洋模范中学高二(5)班

执教时间: 2002年5月30日

课堂教学实录:

定义:若有利润函数 $P(x)$, 收入函数为 $R(x)$, 成本函数为 $C(x)$, 那么 $P(x) = R(x) - C(x)$ 。边际利润函数 $MP(x)$ 定义为 $MP(x) = P(x+1) - P(x)$ 。

例一、如果某企业收入函数 $R(x) = 50x$, 成本函数 $C(x) = 30x$, x 是产品数量, $x \in \mathbb{N}$ 。求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$ 的表达式。

解:

$$\left. \begin{array}{l} R(x) = 50x \\ C(x) = 30x \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = R(x) - C(x) = 50x - 30x = 20x$$
$$MP(x) = P(x+1) - P(x) = 20(x+1) - 20x = 20$$

答: 利润函数 $P(x) = 20x (x \in \mathbb{N})$, 边际利润函数 $MP(x) = 20 (x \in \mathbb{N})$ 。

例二、如果某企业收入函数 $R(x) = 50x$, 成本函数 $C(x) = 30x + 2000$ ($30x$ 为可变成本, 2000 为固定成本), x 是产品数量, $x \in \mathbb{N}$ 。

- (1) 求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$ 的表达式;
- (2) 为确保企业不亏损, 产品数量 x 应在什么范围。

解:

$$(1) \left. \begin{array}{l} R(x) = 50x \\ C(x) = 30x + 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = R(x) - C(x) = 50x - (30x + 2000) = 20x - 2000$$

$$MP(x) = P(x+1) - P(x) = [20(x+1) - 2000] - (20x - 2000) = 20$$

- (2) 企业不亏损, 则利润 $P(x) \geq 0$

$$P(x) = 20x - 2000 \geq 0 \Rightarrow x \geq 100$$

答: (1) 利润函数 $P(x) = 20x - 2000 (x \in \mathbb{N})$, 边际利润函数 $MP(x) = 20 (x \in \mathbb{N})$;

- (3) 产量不少于 100 个, 企业就不亏损。

例三、某公司每月最多生产 100 台报警系统装置, 生产 x 台 ($x > 0$) 的收入函数为 $R(x) = 3000x - 20x^2$, 其成本函数为 $C(x) = 500x + 4000$ (单位: 元), 利润是收入与成本之差。

- (1) 求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$;
- (2) 利润函数 $P(x)$ 的最大值与边际利润函数 $MP(x)$ 的关系是什么?

解: (1) $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 3000x - 20x^2 - (500x + 4000)$$

$$= -20x^2 + 2500x - 4000 \quad (x \in [1, 100], x \in \mathbb{N})$$

$MP(x) = P(x+1) - P(x)$

$$= -20(x+1)^2 + 2500(x+1) - 4000 - [-20x^2 + 2500x - 4000]$$

$$= 2480 - 40x \quad (x \in [1, 100], x \in \mathbb{N})$$

$$(2) P(x) = -20\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + 74125$$

当 $x=62$ 或 $x=63$ 时, $P(x)_{\max} = 74120$ 元

当 $x=62$ 时, $MP(62) = P(63) - P(62) = 0$, 当 $x \geq 63$ 时, $MP(x) < 0$

边际利润函数 $MP(62) = 0$, 说明生产第 63 台产品时, 它的利润为零, 所以, 工厂生产 62 台产品与生产 63 台产品总利润是一样的, 是工厂总利润的最大值。

(由以上三例, 我们来填写如下表格)

理解一:

产量	一个产品	两个产品	三个产品	四个产品	五个产品
利润	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$
$P(x+1) - p(x)$ 的意义		第二个产 品的利润	第三个产 品的利润	第四个产 品的利润	第五个产 品的利润

理解二:

在例一中, $P(x)$ 是一个一次函数, $MP(x)$ 是一个常数, 说明每增加一个产品所获得的利润是一个常量, 产品越多, 利润越高。

在例二中, 由于增加了固定成本, 为使企业确保利润, 产量必须不少于 100。

以上两例, 企业生产产品根据市场的特点, 多数为消耗品, 它的需求量很大很大, 例如: 毛巾、牙刷、牙膏, 等等。

在例三中， $MP(x)$ 是一个减函数，这就说明工厂每多生产一个产品，这个产品的利润在逐渐地减小。在出现 $MP(x)=0$ 之前，尽管利润在减小，但是工厂的利润总额是怎么一个情况呢？——在增加。当 $MP(x)=0$ 的时候，工厂的利润总额又是一个什么情况呢？——达到了最大值。这一般表现为耐用品，特殊产品，例如：生产地铁、磁悬浮列车所需要的机床等。

下面，我们来讨论几个问题。

- 1.以例三为主，讨论边际利润函数的意义是什么？
- 2.影响边际利润函数 $MP(x)$ 的因素是什么？
- 3.从市场经济的视角来谈边际利润函数对企业生产决策所起的作用。

总 结

- 1.边际利润函数揭示了事物的实际规律。

虽然 $MP(x)$ 是一个减函数，说明每多生产一台产品，该台产品的利润在逐渐地减少，但是由于 $MP(x)$ 的值是大于零的，因此该台产品的利润还是有的，总利润还是在增加。

当 $MP(x)=0$ 的时候，总利润实际上到达了最大值，因为接下去 $MP(x)$ 就要小于零，说明再多生产一台产品工厂非但没有利润增加反而要贴钱了，这样总利润事实上下降了。

- 2.收入函数 $R(x)$ 不是一个书上可以找到的公式，它是市场经济条件下的一个经验公式。

影响边际利润函数 $MP(x)$ 的因素除了降低成本以外，收入函数是一个重要因素，例如，增加市场的需求量(挖掘市场的潜力，开拓新的市场)。

- 3.为企业制订生产指标提供了量的依据。