Exercice 1 Résoudre une équation

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) L'équation $2x-1=-3(x-2)$ admet pour solution un nombre rationnel positif.

$2x-1=-3x+6 \Leftrightarrow 2x+3x=6+1 \Leftrightarrow 5x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{5}$ VRAI

2) L'équation $(2x+9)(4x-1)=0$ admet pour unique solution le nombre $\frac{1}{4}$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul donc

$(2x+9)(4x-1)=0 \Leftrightarrow 2x+9=0$ ou $4x-1=0$

$\Leftrightarrow 2x=-9$ ou $4x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{-9}{2}$ ou $x=\frac{1}{4}$ donc S = $\left\{\frac{-9}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right\}$ FAUX

OU autre raisonnement : Si $x=\frac{-9}{2}$ alors $2x+9=0$ et $(2x+9)(4x-1)=0$ il y a donc une 2ème solution.

3) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^2-6=0$ est $S=\{\sqrt{6}\}$.

$x^2-6=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{6}=0$ ou $x+\sqrt{6}=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ ou $x=-\sqrt{6}$ donc S = $\{-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{6}\}$ FAUX

OU autre raisonnement : Si $x=-\sqrt{6}$ alors $x^2=(-\sqrt{6})^2=6$ donc $x^2-6=0$, il y a une 2ème solution.

4) L'équation $x^2+1=0$ n'admet aucune solution réelle.

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ or pour $x\in\mathbb{R}$, x^2 est un réel positif donc ne peut pas être égal à -1 VRAI

5) Les nombres – 3 et – 2 sont solutions de l'équation $x^2+x-6=0$.

6) $(-3)^2+(-3)-6=9-3-6=0$ donc – 3 est solution de l'équation $x^2+x-6=0$.

et $(-2)^2+(-2)-6=4-2-6=-4$ donc – 2 n'est pas solution de cette équation FAUX

Exercice 2 Résolution d'équations et d'inéquations

1) $2-6x=0$; $3x+1=0$; $-4x-5=0$; $(3x-9)(-x-4)=0$; $\frac{7x-6}{-x+2}=0$; $\frac{x+4}{5x-2}=3$.

$2-6x=0 \Leftrightarrow -6x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{-2}{-6} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ donc S = $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

$3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{3}$ donc S = $\left\{\frac{-1}{3}\right\}$

$-4x-5=0 \Leftrightarrow -4x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{-4} \Leftrightarrow x=\frac{-5}{4}=-1{,}25$ donc S = $\{1{,}25\}$

$(3x-9)(-x-4)=0 \Leftrightarrow 3x-9=0$ ou $-x-4=0$

$\Leftrightarrow 3x=9$ ou $-x=4$

$\Leftrightarrow x=\frac{9}{3}$ ou $x=\frac{4}{-1}$ donc S = $\{-4\ ;\ 3\}$

$\frac{7x-6}{-x+2}=0 \Leftrightarrow 7x-6=0$ et $-x+2\neq 0 \Leftrightarrow 7x=6$ et $-x\neq -2 \Leftrightarrow x=\frac{6}{7}$ et $x\neq 2$ donc S = $\left\{\frac{6}{7}\right\}$

$\frac{x+4}{5x-2}=3 \Leftrightarrow \frac{x+4}{5x-2}-3=0 \Leftrightarrow \frac{x+4-3(5x-2)}{5x-2}=0 \Leftrightarrow \frac{x+4-15x+6}{5x-2}=0 \Leftrightarrow \frac{-14x+10}{5x-2}=0$

$\Leftrightarrow -14x+10=0$ et $5x-2\neq 0 \Leftrightarrow -14x=-10$ et $5x\neq 2 \Leftrightarrow x=\frac{-10}{-14}$ et $x\neq\frac{2}{5}$ donc S = $\left\{\frac{5}{7}\right\}$

2) $4x-7<0$; $9x+7>0$; $-2x-3\leq 0$; $1-7x\geq 0$.

$4x-7<0 \Leftrightarrow 4x<7 \Leftrightarrow x<\frac{4}{7}$ donc S = $\left]-\infty;\frac{4}{7}\right[$

$9x+7>0 \Leftrightarrow 9x>-7 \Leftrightarrow x>\frac{-7}{9}$ donc S = $\left]\frac{-7}{9};+\infty\right[$

$-2x-3\leq 0 \Leftrightarrow -2x\leq 3 \Leftrightarrow x\geq\frac{3}{-2} \Leftrightarrow x\geq\frac{-3}{2}$ *donc* S = $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

$1-7x\geq 0 \Leftrightarrow -7x\geq -1 \Leftrightarrow x\leq\frac{-1}{-7} \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{7}$ *donc* S = $\left]-\infty;\frac{1}{7}\right]$

3) $(2x-3)(-x+6)\geq 0$; $\frac{-3x+1}{x+2}\leq 0$; $\frac{x+1}{4x-1}\leq 1$.

Résolution à l'aide d'un tableau de signes

$(2x-3)(-x+6)\geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		6		$+\infty$
$2x-3$		-	0	+		+	
$-x+6$		+		+	0	-	
$(2x-3)(-x+6)$		-	0	+	0	-	

donc S = $\left[\frac{3}{2};6\right]$

$\frac{-3x+1}{x+2}\leq 0$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		+		+	0	-	
$x+2$		-	0	+		+	
$\frac{-3x+1}{x+2}$		-	‖	+	0	-	

donc $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

$\frac{x+1}{4x-1}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{4x-1}-1\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-(4x-1)}{4x-1}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-4x+1}{4x-1}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+2}{4x-1}\leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		+		+	0	-	
$4x-1$		-	0	+		+	
$\frac{-3x+2}{4x-1}$		-	‖	+	0	-	

donc $S=\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$

Exercice 3 Maîtriser les identités remarquables

Compléter les égalités suivantes de sorte qu'elles soient vérifiées pour tout nombre réel x.

1) $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

2) $(2x-4)^2=4x^2-16x+16$

3) $(x-7)^2=x^2-14x+49$

4) $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=x^2-7$

5) $9x^2+3x+\frac{1}{4}=\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2$

6) $(3-10x)(3+10x)=9-100x^2$.

Exercice 4 Développer – Factoriser

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse

1) Une expression factorisée de $x^2+9x-10$ est : *on développe chaque expression factorisée ci-dessous*
   a) $x(x+9)-10$ b) $(x-1)(x+10)$ c) $(x+1)(x-10)$

2) Une expression développée de $(2x+1)(-3x-4)$ est : *on développe l'expression factorisée de départ*
   a) $5x-3$ b) $-6x^2-5x-4$ c) $-6x^2-11x-4$

3) Une expression factorisée de $x^2-(5x+8)^2$ est : *on factorise l'expression de départ de la forme A^2-B^2*

a) $(6x+8)(-4x-8)$ b) $(6x+8)(4x+8)$ c) $-24x^2-80x-64$

$$A = x \text{ et } B=(5x+8) \quad donc \quad x^2-(5x+8)^2=[x+(5x+8)][x-(5x+8)]$$

4) Une expression développée de $3(x+1)^2-3$ est : *on développe l'expression de départ*

a) $3x^2+3x$ b) $3x^2+6x$ c) $3x(x+2)$

5) Une expression égale à $6\left(-x-\frac{5}{6}\right)(x+1)$ est : *on développe l'expression de départ*

a) $-6x^2+11x+\frac{2}{3}$ b) $-6(x^2+2x)$ c) $-6x^2-11x-5$

Exercice 5 Factorisations et développements

1) Développer puis réduire : $A=(3x-5)(x+1)-(x+1)^2$.

$A=(3x-5)(x+1)-(x+1)^2$ Développer

$A=3x\times x+3x\times 1-5\times x-5\times 1-(x^2+2x+1)$

$A=3x^2+3x-5x-5-(x^2+2x+1)$ Commencer à réduire

$A=3x^2-2x-5-x^2-2x-1$

$\boxed{A=2x^2-4x-6}$ Expression développée

2) Factoriser $A=(3x-5)(x+1)-(x+1)^2$.

$A=(3x-5)(x+1)-(x+1)(x+1)$ on remarque que $(x+1)$ est un facteur commun

$A=(x+1)((3x-5)-(x+1))$ on factorise par $(x+1)$

$A=(x+1)(3x-5-x-1)$ on simplifie la 2ème parenthèse

$\boxed{A=(x+1)(2x-6)}$ Expression factorisée

3) Factoriser les expressions suivantes : $B=x^2-49$; $C=x^2-8x+16$; $D=x^2-5x$.

$B=x^2-49$;

$B=x^2-7^2$ on reconnaît une identité remarquable de la forme $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$\boxed{B=(x-7)(x+7)}$.

$C=x^2-8x+16$

$C=x^2-2\times 4\times x+4^2$ on reconnait une identité remarquable de la forme $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$\boxed{C=(x-4)^2}$.

$D=x^2-5x$ on remarque que x est un facteur commun alors on factorise par x.

$\boxed{D=x(x-5)}$

4) Montrer que pour tout réel x, on a : $(4x-1)^2-2x^2=14x^2-8x+1$.

Pour montrer cette égalité, on développe le premier membre

$(4x-1)^2-2x^2=(4x)^2-2\times 4x\times 1+1^2-2x^2$

$=16x^2-8x+1-2x^2$

$=14x^2-8x+1$

Donc $\boxed{(4x-1)^2-2x^2=14x^2-8x+1}$

5) Montrer que pour tout réel x, on a : $(2x-3)^2-(5x+1)^2=(7x-2)(-3x-4)$.
Pour montrer cette égalité, on **factorise le premier membre**. On reconnaît une identité remarquable de la forme $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ où $a=(2x-3)$ et $b=(5x+1)$.

$$(2x-3)^2-(5x+1)^2=(2x-3+(5x+1))(2x-3-(5x+1))$$
$$=(2x-3+5x+1)(2x-3-5x-1)$$
$$=(7x-2)(-3x-4).$$

Donc, $\boxed{(2x-3)^2-(5x+1)^2=(7x-2)(-3x-4).}$

Exercice 6

Compléter par un des signes suivants $>$; $<$; $\geq$; $\leq$ en justifiant votre réponse.

a) Si $a \leq b \leq -1$ alors $a^2 \geq b^2 \geq 1$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0[$

b) Si $a \leq b \leq -1$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{-1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$

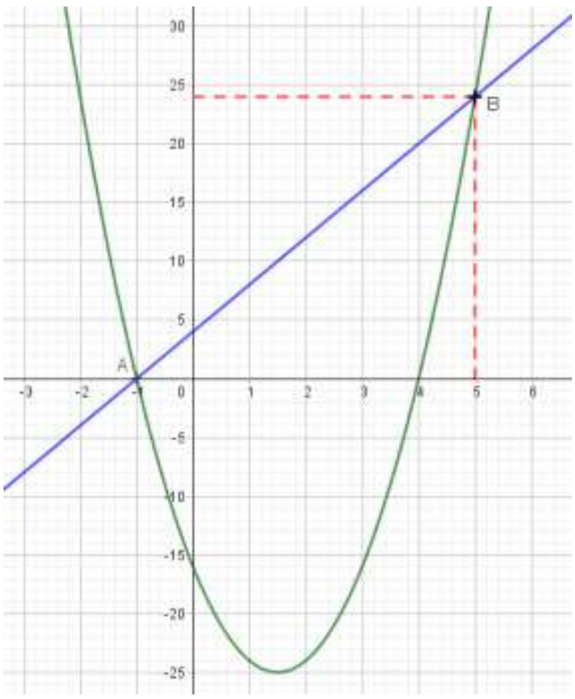
c) Si $a \geq b \geq 2$ alors $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$

d) Si $a \geq b \geq 2$ alors $a^3 \geq b^3 \geq 2^3$ car la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$

e) Si $a > b > 4$ alors $\sqrt{a} > \sqrt{b} > \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $]0;+\infty[$

Exercice 7 Différentes formes d'une même expression et leur utilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-3)^2-25$.



1) Déterminer la forme développée de $f(x)$.
$f(x)=(2x-3)^2-25$
$f(x)=(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2-25$
$f(x)=4x^2-12x+9-25$
$\boxed{f(x)=4x^2-12x-16}$.

2) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
On reconnaît une identité remarquable de la forme
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ où $a=(2x-3)$ et $b=5$.
Donc,
$f(x)=(2x-3)^2-25$
$f(x)=(2x-3)^2-5^2$
$f(x)=(2x-3-5)(2x-3+5)$
$\boxed{f(x)=(2x-8)(2x+2)}$.

3) Quelle forme de $f(x)$ utiliser pour répondre aux questions suivantes :

a) Calculer l'image de 0 par f. Combien vaut-elle ?
Il faut utiliser la forme **développée** $f(x)=4x^2-12x-16$
$f(0)=4\times 0^2-12\times 0-16=-16$.

b) Déterminer les antécédents de 0 par f. Quels sont-ils ?
Il faut utiliser la forme **factorisée** $f(x)=(2x-8)(2x+2)$

Pour déterminer les antécédents de 0, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Ce qu'est équivalent à résoudre l'équation produit nul :

$$\begin{aligned}(2x-8)(2x+2) = 0 &\Leftrightarrow 2x-8=0 \ ou \ 2x+2=0\\ &\Leftrightarrow 2x = 8 \ ou \ 2x = -2\\ &\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \ ou \ x = \frac{-2}{2} = -1\end{aligned}$$

Donc, les antécédents de $O \ sont -1 \ et \ 4$.

4) *Lectures graphiques* : on a tracé la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On a aussi tracé une droite (AB) représentative d'une fonction affine notée g définie sur $\mathbb{R}$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$+\infty$

b) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

Les deux courbes représentatives de f et g se coupent en deux points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;0)$ et (5 ; 24). L'ensemble des solutions $S = \{-1\,;5\}$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < g(x)$.

On observe que la courbe représentative de f est strictement en dessous de la courbe représentative de g sur l'intervalle $]-1\,;5[$.

d) Lire le coefficient directeur de la droite (AB) puis déterminer par le calcul son ordonnée à l'origine. Déterminer l'expression de la fonction g.

Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{24-0}{5-(-1)} = \frac{24}{6} = 4$.

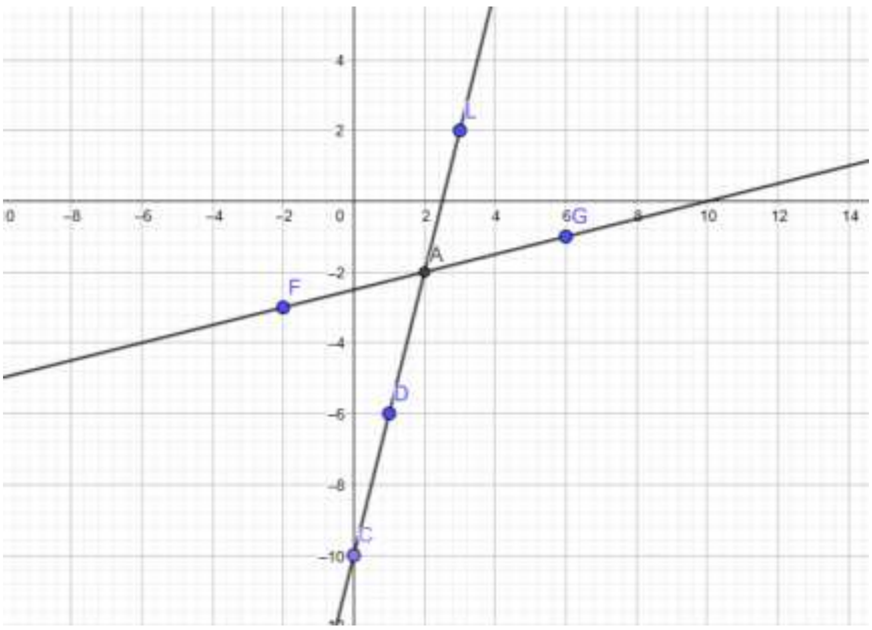
La droite (AB) a pour équation réduite $y = mx + p$ où $m = 4$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine p, sachant que A appartient à la droite (AB) alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :$y_A = 4x_A + p \Leftrightarrow 0 = 4 \times (-1) + p \Leftrightarrow \boxed{p = 4}$

En conclusion, l'expression de la fonction g est $\boxed{g(x) = 4x + 4}$

Exercice 8 Dans un repère orthonormé, on considère les points $F(-2\,;-3)$, $L(3\,;2)$ et $G(6\,;-1)$.

1) Faire une figure.



2) Déterminer l'équation réduite de la droite (GF).

La droite (GF) a pour équation réduite $y = mx + p$ où $m = \frac{YG-YF}{XG-XF} = \frac{-1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine p, sachant que G appartient à la droite (GF) alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite : $y_G = \frac{1}{4}x_G + p \Leftrightarrow -1 = \frac{1}{4} \times 6 + p \Leftrightarrow \boxed{p = -\frac{5}{2}}$

En conclusion, l'expression de l'équation réduite de la droite (GF) est $\boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}}$.

3) Tracer la droite Δ d'équation cartésienne : $4x - y - 10 = 0$ et expliquer la méthode utilisée.

Pour tracer une droite, il suffit de connaitre les coordonnées de deux points.
A partir de l'équation cartésienne si on exprime y en fonction de x, on obtient : $y = 4x - 10$.
Ensuite, si on prend $x = 0$ on trouve $y = -10$ donc soit le point $C(0\,;-10)$
Et si on prend $x = 1$ on trouve $y = 4 \times 1 - 10 = -6$ donc soit le point $D(1\,;-6)$.
On trace la droite Δ passant par les deux points $C(0\,;-10)$ et $D(1\,;-6)$.

OU autre méthode

Rappel de cours : La droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

La droite Δ a pour équation cartésienne : $4x - y - 10 = 0$ donc pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 4)$ et passe par le point Z de coordonnées $(0; -10)$ par exemple.

4) Lire les coordonnées du point d'intersection des droites (GF) et Δ.

Les coordonnées du point d'intersection des droites (GF) et Δ sont $(2\,;-2)$.

5) Résoudre par le calcul le système suivant :

$\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = \frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases}$. Que retrouve-t-on ? Est-ce normal ?

Méthode par substitution :

$\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = \frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ 4x - y = 10 \end{cases}$ on exprime y en fonction de x dans la 1ère équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ 4x - (\frac{1}{4}x - \frac{5}{2}) = 10 \end{cases}$ on substitue y dans la 2ème équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ 4x - \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} = 10 \end{cases}$ on simplifie la 2ème équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ \frac{16}{4}x - \frac{1}{4}x = \frac{20}{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$ on regroupe les x dans la 2ème équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ \frac{15}{4}x = \frac{15}{2} \end{cases}$ simplification de la 2ème équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ x = \frac{15}{2} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ résolution de la 2ème équation pour trouver la valeur de x

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \times 2 - \frac{5}{2} = y \\ x = 2 \end{cases}$ on remplace x dans la 1ère équation pour trouver y

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \times 2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ résolution de la 1ère équation pour trouver y

La solution du système est le couple $(x\,;y) = (2\,;-2)$ ce qui correspond aux coordonnées du point d'intersection des droites (GF) et Δ.

Oui, c'est normal car la résolution du système des 2 équations correspondent aux équations des droites (GF) et Δ.

OU Méthode par **combinaison** : **on va éliminer les y**

$\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = \frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x + y = -\frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases}$ on multiplie la 1ère équation par (-1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x + y + 4x - y = -\frac{5}{2} + 10 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$ on additionne membre à membre les deux équations

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{16}{4}x = \frac{15}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases}$ on simplifie la 1ère équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{4}x = \frac{15}{2} \\ 4x - 10 = y \end{cases}$ on simplifie la 1ère équation pour trouver x

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{2} \times \frac{4}{15} = 2 \\ 4 \times 2 - 10 = y \end{cases}$ on remplace x par sa valeur dans la 2ème équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -2 = y \end{cases}$