Определяем центр окружности по трем точкам

Определение центра отверстия с помощью щупа краеискателя происходит следующим образом. Щуп передвигаясь в трех различных направлениях с любого места находящегося внутри отверстия «щупает» 3 различные точки касания края отверстия. Далее все просто, как известно из школьного курса геометрии, вокруг любых трех точек можно описать окружность и при том только одну. Нам необходимо найти координаты центра данной окружности.

Рассмотрим общий вариант.

Пусть известны координаты трех точек которые «нащупал» щуп

$$\begin{cases} p_1(x_1, y_1) \\ p_2(x_2, y_2) \\ p_3(x_2, y_2) \end{cases}$$

Окружность задана уравнением:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, где $p(a,b)$ - точка центра окружности

Запишем уравнение для координат трех известных точек:

$$\begin{cases} (x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2 \\ (x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2 \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

Далее решаем данную систему уравнений относительно неизвестных координат центра окружности a и b.

$$\begin{cases} (x_1-a)^2+(y_1-b)^2=(x_2-a)^2+(y_2-b)^2 \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2-2x_1a+\cancel{a^2}+y_1^2-2y_1b+\cancel{b^2}=x_2^2-2x_2a+\cancel{a^2}+y_2^2-2y_2b+\cancel{b^2} \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1a-2y_1b+2x_2a+2y_2b=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2 \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1a+2y_1b-2x_2a-2y_2b=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2 \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1a+y_1b-x_2a-y_2b=\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2} \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2} \\ (x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2} \\ a(x_2-x_3)+b(y_2-y_3)=\dfrac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}-b(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)} \\ a(x_2-x_3)+b(y_2-y_3)=\dfrac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}-b(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}(x_2-x_3)+b(y_2-y_3)=\dfrac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}-b(y_1-y_2)\right]\dfrac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}+b(y_2-y_3)=\dfrac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2} \end{cases}$$

$$b(y_2-y_3)-b(y_1-y_2)\frac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}=\frac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}\frac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}$$

$$b\left[(y_2-y_3)-(y_1-y_2)\frac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}\right]=\frac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}\frac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}$$

$$b=\frac{\dfrac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2}-\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}\dfrac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}}{\left[(y_2-y_3)-(y_1-y_2)\dfrac{(x_2-x_3)}{(x_1-x_2)}\right]}$$

$$b=\frac{\dfrac{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}-y_3^{\ 2}}{2}(x_1-x_2)-\dfrac{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{2}(x_2-x_3)}{\left[(y_2-y_3)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)(x_2-x_3)\right]}$$

В итоге координаты точки центра окружности будут равны:

$$b=\frac{\left(x_2{}^2+y_2{}^2-x_3{}^2-y_3{}^2\right)\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1{}^2+y_1{}^2-x_2{}^2-y_2{}^2\right)\left(x_2-x_3\right)}{2\cdot\left[\left(y_2-y_3\right)\left(x_1-x_2\right)-\left(y_1-y_2\right)\left(x_2-x_3\right)\right]}$$

$$a=\frac{\dfrac{x_1{}^2+y_1{}^2-x_2{}^2-y_2{}^2}{2}-b\left(y_1-y_2\right)}{\left(x_1-x_2\right)}$$

Радиус окружности будет равен:

$$r=\sqrt{\left(x_1-a\right)^2+\left(y_1-b\right)^2}$$

Поскольку щуп имеет некоторую толщину, то для определения реального радиуса окружности необходимо к расчетному радиусу r – прибавить радиус щупа и эта сумма будет равна реальному радиусу отверстия.

Рассмотрим частный вариант (упрощенный)

Упрощенный вариант, когда точки 1,2,3 являются точками определения координат щупом по осям X и Y (точки 1 и 2 находятся на одной прямой по оси X), т.е. будут наложены дополнительные условия на координаты точек:

$$\begin{cases} p_1\left(x_1,y_1\right) \\ p_2\left(x_2,y_1\right) \\ p_3\left(x_3,y_3\right) \end{cases}$$

Окружность задана уравнением:

$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$, где $p\left(a,b\right)$ - точка центра окружности

Запишем уравнение для координат трех известных точек:

$$\begin{cases} \left(x_1-a\right)^2+\left(y_1-b\right)^2=r^2 \\ \left(x_2-a\right)^2+\left(y_1-b\right)^2=r^2 \\ \left(x_3-a\right)^2+\left(y_3-b\right)^2=r^2 \end{cases}$$

Рашем систему уравнений относительно a и b

$$\begin{cases} \left(x_1-a\right)^2-\left(x_2-a\right)^2=0 \\ \left(x_3-a\right)^2+\left(y_3-b\right)^2=\left(x_2-a\right)^2+\left(y_1-b\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1{}^2-2x_1a+\cancel{a^2}-x_2{}^2+2x_2a-\cancel{a^2}=0 \\ x_3{}^2-2x_3a+\cancel{a^2}+y_3{}^2-2y_3b+\cancel{b^2}=x_2{}^2-2x_2a+\cancel{a^2}+y_1{}^2-2y_1b+\cancel{b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1{}^2-x_2{}^2=2x_1a-2x_2a \\ x_3{}^2-2x_3a+y_3{}^2-2y_3b=x_2{}^2-2x_2a+y_1{}^2-2y_1b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}}{2(x_1 - x_2)} = a \\ 2y_1 b - 2y_3 b = x_2^{\ 2} - 2x_2 a + y_1^{\ 2} - x_3^{\ 2} + 2x_3 a - y_3^{\ 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}}{2(x_1 - x_2)} \\ b = \dfrac{x_2^{\ 2} - 2x_2 a + y_1^{\ 2} - x_3^{\ 2} + 2x_3 a - y_3^{\ 2}}{2(y_1 - y_3)} \\ r = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} \end{cases}$$

В итоге получаем координаты центра отверстия

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}}{2(x_1 - x_2)} \\ b = \dfrac{x_2^{\ 2} - 2x_2 a + y_1^{\ 2} - x_3^{\ 2} + 2x_3 a - y_3^{\ 2}}{2(y_1 - y_3)} \\ r = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} \end{cases}$$

Поскольку щуп имеет некоторую толщину, то для определения реального радиуса окружности необходимо к расчетному радиусу r – прибавить радиус щупа и эта сумма будет равна реальному радиусу отверстия.

Web: http://SdelaiStanok.ru e-mail: info@sdelaistanok.ru тел: +7 963 648 0000