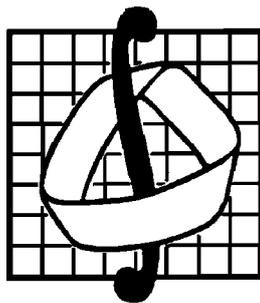


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет**



В.А.Самсонов, Я.В.Татарин

**БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ
В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ**

Москва 2007 год

Самсонов В.А., Татаринов Я.В.
Бифуркационные диаграммы в модельных задачах.
Учебное пособие к спецкурсам. – М.: Изд. МГУ, 2007 – 56с.

В пособии излагаются приемы построения бифуркационных диаграмм при исследовании механических систем с одной степенью свободы. Предназначено для студентов и аспирантов механических специальностей.

@ Самсонов В.А., Татаринов Я.В., 2007 г.
@ Механико-математический факультет МГУ, 2007 г.

Предисловие

В пособии излагаются приемы построения бифуркационных диаграмм при исследовании механических систем с одной степенью свободы. На избранных задачах из сборников [17,18] демонстрируются подходы и сведения из спецкурса Я.В.Татарина "Перестройки и катастрофы в классической динамике" (1986-87 уч.год), основанные в первую очередь на работе С.Смейла [23] и [24]. Следует упомянуть, что бифуркационная диаграмма на плоскости интегралов в конкретной задаче была построена Ю.М.Окуневым [13,14] в 1971г.

В некоторых системах происходит перестройка многообразия положений, на что недавно указал В.А.Самсонов [19].

Использование геометрических представлений для исследования задач механики ежегодно обсуждается на семинаре для студентов 4-го курса кафедры теоретической механики и мехатроники. Этот семинар возник в 1978 как практическое сопровождение спецкурса "Теория устойчивости движения" (лекторы - академик В.В.Румянцев, профессор А.В.Карапетян). Семинаром руководили профессор В.Н.Рубановский (1941-2002) и профессор В.А.Самсонов. В 2000-м году к руководству подключился профессор В.М.Морозов.

Изложенный материал представляет собой, в основном, результат преддипломной практики выпускников мехмата 1988 года, студентов кафедры теоретической механики А.М.Абдрахманова, И.В.Александрова, С.Л.Дудодадова, В.В.Журавлевой, С.Т.Садэтова, проходившей под руководством авторов пособия. Все они впоследствии ярко проявили себя. Здесь мы укажем только их первые крупные публикации:

- Абдрахманов А.М. Интегрируемые бильярды. Вестник МГУ. Сер. матем.,механ.,1990, N6, 28--33.
- Александров И.В. Топологический анализ гамильтоновой системы с некоммутативным полным набором интегралов. Вестник МГУ. Сер. матем.,механ.,1990, N3, 13--15.
- Дудодадов С.Л. Периодические решения вблизи резонансного равновесия консервативных систем. Вестник МГУ. Сер. матем.,механ.,1993, N4, 87--89.
- Ксантос Ле. "Осколки". Издательство "Тривант", 2004 г., 128с.
- Садэтов С.Т. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа. Вестник МГУ. Сер. матем.,механ.,1990, N3, 56--62.

В пособие вошла также дипломная работа А.А.Михалева (2005). За оформление работы в системе TeX, включая иллюстрации, авторы благодарят М.Подзолко, а за окончательное оформление оригинал-макета - А.Михалева.

Бифуркационные диаграммы.

МНОГООБРАЗИЕ ПОЛОЖЕНИЙ

Конфигурационное пространство (многообразие положений) системы материальных точек с голономными связями есть множество всех её возможных положений. Оно определяется связями (ограничениями), наложенными на систему, которые, вообще говоря, могут явно либо неявно зависеть от различных параметров (геометрических, физических и пр.) На практике параметры часто подбираются неким образом для оптимизации системы, но при различных значениях параметров могут оказаться различными наложенные связи, и, как следствие, различными многообразия положений.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, состоящую из двух частей, соединяемых голономной связью, зависящей от параметра l . Пусть x - обобщённая координата одной из частей, y - другой. Допустим, что уравнение связи выглядит следующим образом:

$$f(x, y, l) = 0, \quad (1)$$

где f - достаточно гладкая функция от своих переменных.

Пусть точка (x_0, y_0, l_0) удовлетворяет (1), т. е.:

$$f(x_0, y_0, l_0) = 0$$

Тогда в окрестности этой точки уравнение возможных перемещений

имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, l_0) \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, l_0) \delta y = 0$$

В случае $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ в точке (x_0, y_0, l_0) направление

возможных перемещений в окрестности этой точки определяется однозначно как направление касательного вектора к одномерному многообразию. При этом одну из координат можно взять в качестве обобщённой для всей системы.

В случае $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, l_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, l_0) = 0$ для определения направлений возможных перемещений в окрестности этой

точки, как и для определения свойств множества положений, необходим дополнительный анализ.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y, l) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, l) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, l) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Возможны два случая общего положения:

а) система (2) не имеет решений (что мы уже рассмотрели выше);

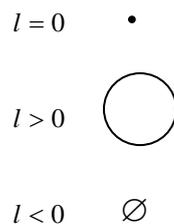
б) система (2) имеет изолированное решение, которое назовём критическим, т.е. x_0, y_0 - критическое (особое) положение системы, а l_0 - критическое значение параметра.

Рассмотрим случай б). Без ограничения общности будем считать, что $(0,0,0)$ - изолированное решение системы (2). Для уточнения свойств множества возможных положений системы разложим функцию f в окрестности нуля в ряд Тейлора:

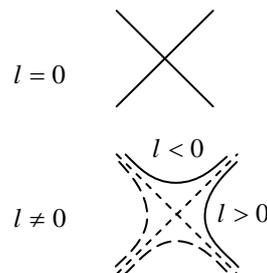
$$0 = f(x, y, l) = \frac{\partial f}{\partial l}(0)l + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)y^2 + O(x^3 + y^3 + l^2)$$

В случае общего положения в зависимости от знаков производных после поворота и масштабирования координат уравнение (1) в окрестности нуля примет один из двух следующих “грубых” видов:

1) $x^2 + y^2 = l$



2) $x^2 - y^2 = l$



В случае 1) при $l > 0$ связь задаёт одномерное многообразие, вырождающееся при $l = 0$ в точку. При $l < 0$ система не имеет

смысла, поэтому критическое значение $l = 0$ оказывается граничным значением параметра.

В случае 2) система не только существует как при $l < 0$, так и при $l > 0$, но имеет и в том и в другом случаях одномерное многообразие положений. При $l = 0$ множество положений обладает самопересечением, т.е. возможные перемещения имеют два различных направления.

Таким образом, показана возможность перестройки конфигурационного пространства механической системы, при которой система обладает следующими свойствами:

- в окрестности особой точки при критическом значении параметра невозможно ввести лагранжевы координаты;
- в окрестности особой точки бывает трудно (и даже невозможно) корректно определить траектории “критической” системы с помощью предельного перехода по параметру.

В любой механической системе существуют какие-либо параметры, поэтому при широком исследовании задачи необходимо учитывать наличие критических положений системы и возможность перестройки её конфигурационного пространства.

Теорема Лагранжа:

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ

1. Те положения консервативной системы, в которых потенциальная энергия, являются положениями равновесия.
2. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение устойчиво.

Таким образом, задача определения положения равновесия сводится к нахождению условного экстремума на пространстве положений, при этом характер положения равновесия (устойчиво оно или нет) определяется характером соответствующего экстремума потенциальной энергии.

КРИВЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что система консервативна, $\Pi = \Pi(q, l)$, где l – параметр системы, q – обобщенная координата. Из теоремы Лагранжа (1.) следует, что положения равновесия системы ищутся из уравнения:

$$\Pi'_q(q, l) = 0, \quad (3)$$

при этом характер равновесия согласно теореме Лагранжа (2.) определяется знаком второй производной:

$$\begin{aligned} \Pi''_{qq}(q, l) > 0 & \text{ — устойчивое} \\ \Pi''_{qq}(q, l) < 0 & \text{ — неустойчивое} \end{aligned} \quad (4)$$

График решения (3) $q_i^* = q_i^*(l)$ на плоскости $R^2 \{q, l\}$ носит название *кривой равновесия*. Число корней уравнения (3) при различных значениях параметра l может быть неодинаково, и, следовательно число кривых равновесия тоже различно. Это в общем случае означает, что иногда невозможно продолжение решения $q_i^* = q_i^*(l)$ по параметру и возникновение явления *бифуркации*, т.е. ветвления кривых равновесия. Если в некоторой точке (q^*, l) сходятся две кривые, то в ней не только $\Pi'_q(q^*, l) = 0$, но и $\Pi''_{qq}(q^*, l) = 0$. Такие точки называются *вырожденные*. Они характеризуются по тому, сколько кривых сходятся в точке (соответственно, сколько первых производных функции Π обращаются в ноль). Невырожденные точки согласно (4) могут быть двух типов, и, следовательно, кривые равновесия (поскольку каждая из них состоит из невырожденных точек одного типа) делятся на две группы, характеризующие соответственно максимум или минимум потенциальной энергии. При каждом значении параметра l зная характер одного равновесия (тип одной кривой) можно узнать и характер остальных, поскольку невырожденные максимумы и минимумы функции одной переменной, как правило, чередуются. Совокупность кривых равновесия (с указанием их типов) при всех значениях параметра носит название **бифуркационной диаграммой Пуанкаре**.

**ОБЛАСТЬ
ВОЗМОЖНОСТИ
ДВИЖЕНИЯ**

В консервативной системе имеет место интеграл энергии:

$$H(q, \dot{q}, l) = T(q, \dot{q}) + P(q, l) = h,$$

где $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2$ – кинетическая энергия,

$P(q)$ – потенциальная энергия,

q – обобщённая координата,

l – параметр (в общем случае возможно семейство параметров),

h – константа энергии (определяется из начальных условий)

Интеграл энергии при каждом h задаёт уровень энергии $I^h = \{H(q, \dot{q}, l) = h\}$ – гиперплоскость в фазовом пространстве системы.

Поскольку кинетическая энергия неотрицательна, выполнено неравенство:

$$P(q, l) \leq h$$

которое задаёт область возможности движения

$$M^h = \{l \mid P(q, l) < h\}.$$

При этом верно равенство $pr[I^h] = M^h$, где $pr(q, \dot{q}) = q$.

**КРИВЫЕ
СМЕЙЛА**

Пусть $q_i^* = q_i^*(l)$ – кривая равновесия. В каждой её точке верно равенство: $\dot{q} = 0$, следовательно,

$$T(q_i^*(l), 0) = 0 \text{ и интеграл энергии примет вид:}$$

$$P(q_i^*(l)) = h_i \quad (5)$$

По аналогии с кривыми равновесия графики кривых вида (5) на плоскости $R^2 \{h, l\}$ носят название кривых Смейла. Тип кривой при этом определяется типом соответствующей кривой равновесия, при этом возможно, что двум (или более) различным кривым равновесия будет соответствовать одна кривая Смейла (совпадающие кривые возможны, например, в случае четной функции P). Аналогично возникают понятия *бифуркации* (ветвления) и **бифуркационной диа-**

граммы Смейла – как совокупность кривых Смейла (и их типов) при всех значениях параметра l .

ПАРАМЕТРЫ ПО- ТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Потенциальная энергия в консервативных системах определяется лишь силами, действующими на систему, т.е. имеет вид $P = P(\bar{x}, \bar{y})$, где \bar{x} , \bar{y} – пространственные координаты. Если система состоит из двух частей, имеющих обобщённые координаты x и y , то потенциальная энергия может быть записана как функция от x , y и каких-либо своих параметров (жёсткость пружины, ускорение свободного падения и пр.):

$$P = P(x, y, k)$$

Предположим, как и ранее, что x и y связаны между собой соотношением:

$$f(x, y, l) = 0$$

При наличии возможности ввода обобщённой координаты q для всей системы:

$$\begin{aligned}x &= x(q, l) \\ y &= y(q, l)\end{aligned}$$

потенциальная энергия примет вид:

$$P = P(q, l, k)$$

из которого следует, что все параметры функции P в общем случае могут принадлежать двум различным классам: *собственные* параметры потенциальной энергии, *определяющие силы*, действующие на систему, и параметры, *определяющие связи*, наложенные на систему.

ОКОЛОКРИТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему (уже описанную в начале данного пособия), состоящую из двух частей, имеющих обобщённые координаты x и y . Предположим, что на систему наложена

связь, зависящая от параметра l и имеющая в окрестности точки $O(0,0)$ следующий вид:

$$x^2 - y^2 = l \quad (6)$$

Многообразие положений $S(l)$ при $l \neq 0$ состоит из двух непересекающихся частей $S_{1,2}(l)$, при $l = 0$ $S(0)$ обладает самопересечением в точке O (рис.1). Значение параметра $l = 0$, точку O и соответствующую систему будем далее называть критическими.

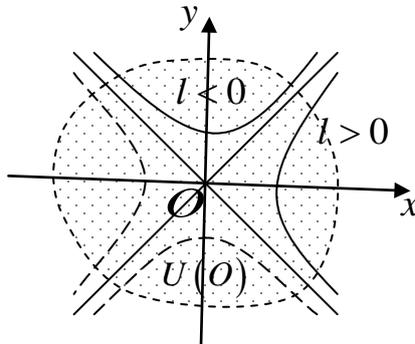


Рис.1

Предположим, что система находится под действием потенциальных сил, т.е. обладает потенциальной энергией $\Pi(x, y)$. Задача определения положений равновесия системы, как известно из теоремы Лагранжа, сводится к поиску условного экстремума функции $\Pi(x, y)$ при условии (6), т.е. на одномерном множестве положений.

В случае “общего положения” критическая точка $x = 0, y = 0$ не является точкой абсолютного экстремума функции $\Pi(x, y)$ и ни одна из пересекающихся на рис.1 прямых не касается линии уровня функции $\Pi(x, y)$, проходящей через точку $x = 0, y = 0$. Отсюда вытекает, что функция $\Pi(x, y)$ монотонно изменяется вдоль каждой из прямых. Следовательно, существуют два луча, по которым она убывает с приближением к точке $x = 0, y = 0$ и два луча, по которым функция Π возрастает. Очевидно, что на одной из

сплошных кривых рис.1 (например, на ветви $l < 0$) существует условный экстремум функции, на симметричной пунктирной тоже существует экстремум противоположного характера. На второй паре кривых (при $l > 0$) экстремумов нет. Это означает, что при $l < 0$ существует положение равновесия механизма, которое при $l \rightarrow 0$ приближается к точке $x = 0$, $y = 0$, при $l = 0$ сливается с положением равновесия (вообще говоря, другого механизма) и при $l > 0$ исчезает.

Потенциальная энергия системы как функция двух переменных не меняет свой вид, но перестройка конфигурационного многообразия влечёт за собой перестройку поведения потенциальной энергии вдоль траекторий системы, и, следовательно, меняется наличие (отсутствие) положений равновесия и их характер.

ЗАДАЧИ

Задачи в работе взяты из книги Рубановского В.Н., Самсонова В.А. “Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах”. Наибольшее внимание в них уделено построению бифуркационных диаграмм Пуанкаре и Смейла.

Все задачи разбиты на несколько групп. Первая группа состоит из трех задач и, в частности, иллюстрирует перестройки ОВД, связанные с некомпактностью пространства положений.

Вторая группа иллюстрирует явление, связанное с существованием у пространства положений границы при некоторых значениях параметров.

Третья группа состоит из задач, пространство положений в которых представляет окружность. При этом в двух задачах возникает негладкость потенциала на пространстве положений. Это явление нашло отражение в поведении бифуркационных кривых.

В последних двух задачах разобраны системы, многообразия положений которых при определенных параметрах обладают самопересечением (критические системы). При этом возникает эволюция положений равновесия, отличная от “классической по Пуанкаре”.

Во все задачи в качестве параметров входят массы, длины, жесткости, ускорение свободного падения и т.д. Везде ниже используется правило, что размерно независимые параметры, которые по смыслу задачи всегда больше нуля, можно положить равными единице (это означает лишь смену единиц измерений).

Обозначения:

R^1 – прямая

S^1 – окружность

L^1 – луч

D^1 – отрезок

D_+^1 – отрезок, выходящий на правую границу пространства положений

D_-^1 – отрезок, выходящий на левую границу

..... бифуркационная кривая, отвечающая максимумам
===== бифуркационная кривая, отвечающая минимумам
————— кривая совпадающих бифуркационных значений, когда имеется две критические точки с одинаковым критиче-

~~~~~  
~~~~~

ским значением (например, у четных функций)
кривая для максимумов, получающаяся на границе
области определения
кривая для минимумов, получающаяся на границе
области определения

Задача 1.

Пусть точка массы m движется по параболе $y = \frac{bx^2}{2}$ в поле силы тяжести g , направленном вдоль оси y . К точке прикреплена пружинка жесткости k , свободная длина которой нуль, подвешенная в точке с координатами (x_0, y_0) . Кроме того, вся плоскость (x, y) вращается вокруг вертикали с угловой скоростью ω . Построить бифуркационные диаграммы.

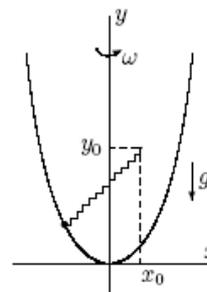


Рис. 1.1

Решение.

Эффективная потенциальная энергия имеет вид

$$V = \frac{kb^2}{8}x^4 + \frac{1}{2}(-m\omega^2 + mgb + k(1 - by_0))x^2 - kx_0x$$

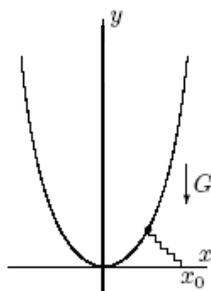


Рис. 1.2

Задача сводится к изображенной на рис. 1.2

введением $G = g + \frac{-m\omega^2 - y_0bk}{mb}$ (G возможно направлена вверх). Так как $m > 0, b > 0, k$ размерно независимы, можно положить $m = 1, b = 1, k = 1$, если $k > 0$ (соответственно $k = -1$, если $k < 0$). Положим $u = G + 1, v = x_0$:

$$V = \frac{x^4}{8} + \frac{u}{2}x^2 - vx$$

Примем u в качестве изменяемого параметра:

1) $v = 0$

$$V' = x\left(\frac{x^2}{2} + u\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-2u}; h_1 = 0, h_{2,3} = -\frac{u^2}{2}$$

Соответственно, диаграммы Пуанкаре и Смейла выглядят так:

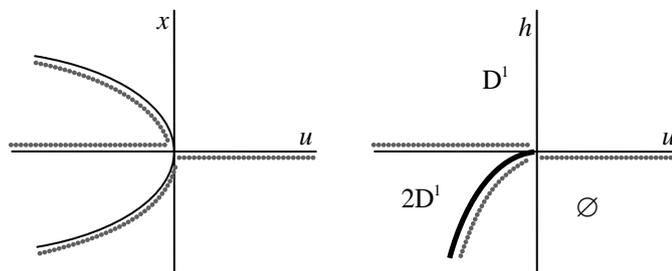


Рис. 1.3

2) $v > 0$

Для получения диаграммы Смейла построим качественно графики $h(x)$ и $x(u)$ (Пуанкаре) при $v > 0$ (рис 1.4.)

$$\begin{cases} V(x) = h \\ V'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = -\frac{x^4}{8} - \frac{vx}{2} \\ u(x) = \frac{v}{x} - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

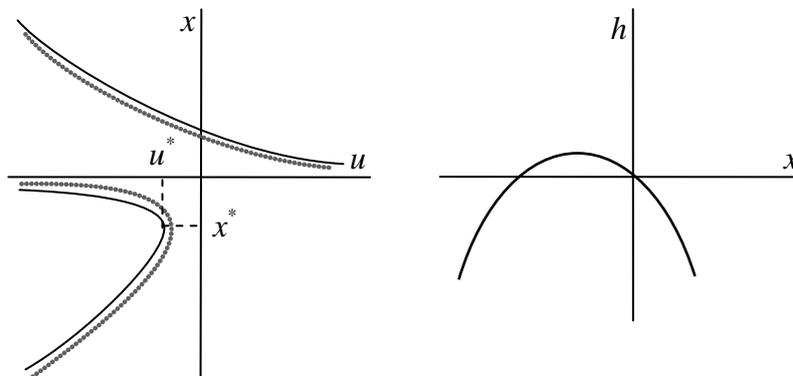


Рис. 1.4. Диаграмма Пуанкаре.

Покажем, что при значении параметра u^* кривая Смейла имеет точку возврата, при остальных значениях параметра не имеет особых точек.

$$\begin{cases} 0 = \frac{du}{dx} = -\frac{v}{x^3} - x \\ 0 = \frac{dh}{dx} = -\frac{x^3}{2} - \frac{v}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = -v, \quad x^* = -\sqrt[3]{v}$$

Производные $\frac{da}{dx}$ и $\frac{dh}{dx}$ при прохождении через x^* меняют знак. Следовательно $x^*(u^*)$ - точка возврата. Функция $h(u)$ монотонно убывает (так как $\frac{dh}{du} = -x^2 \leq 0$), точек перегиба нет:

$$\frac{d^2h}{du^2} = -2x \frac{dx}{du} = \frac{-2x}{\frac{du}{dx}}$$

Покажем, что ветви $x \rightarrow \pm\infty$ не пересекаются, для чего рассмотрим зависимости критических значений функции V от параметра u (рис. 1.5).

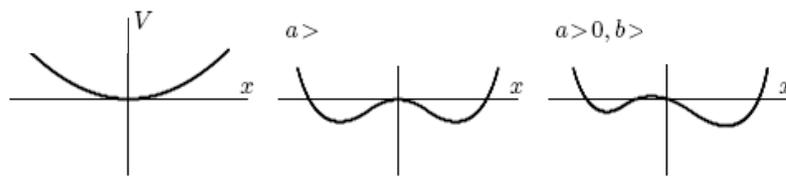


Рис. 1.5.

При $u > 0, v = 0$ минимумы $V = \frac{x^4}{8} + \frac{ux^2}{2} - vx$ совпадают. При $v > 0$ (прибавляем нечетную функцию $-vx$) левый минимум увеличивается, правый уменьшается.

Замечание: аналогично можно доказать непересечение ветвей, получающихся для $V = f_{\text{ч}}(x, a) + v f_{\text{н}}(x, a)$ ($f_{\text{ч}}$ - четная функция, $f_{\text{н}}$ - нечетная), когда v становится отличным от 0.

Теперь построим диаграмму Смейла:

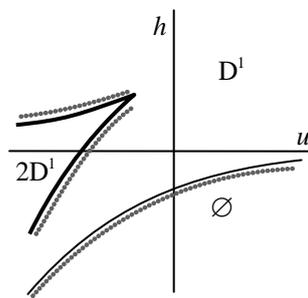


Рис 1.6 Диаграмма Смейла

Задача 2.

Дана механическая система, изображенная на рис. 2.1. Требуется построить бифуркационные диаграммы и определить топологический тип ОВД.

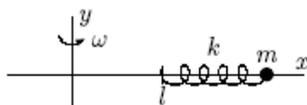


Рис. 2.1.

Решение.

Эффективная потенциальная энергия равна

$$V_{\text{эфф}} = V - T_0 = \frac{1}{2}k(x-l)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $l \neq 0$ и когда $l = 0$.

1) $l \neq 0$. Если $\omega^2 \neq \frac{k}{m}$, то $\frac{\partial V_{\text{эфф}}}{\partial x} = 0$, когда $x_0 = \frac{kl}{k - m\omega^2}$. При

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ положения равновесия отсутствуют ($\frac{\partial V_{\text{эфф}}}{\partial x} = -kl$).

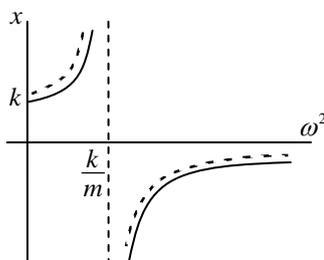


Рис. 2.2. Диаграмма Пуанкаре.

Уравнения для бифуркационных кривых Смейла, соответствующих положениям равновесия (в нашем случае относительным)

$$h = V(x_0) = \frac{1}{2}kl^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - \frac{k}{m}}$$

После вышесказанного легко видеть, что бифуркационная диаграмма Смейла в плоскости $\mathbb{R}^2(h, \omega^2)$ выглядит следующим образом (рис. 2.3).

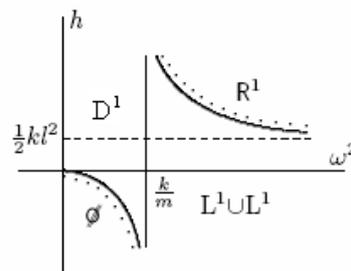


Рис. 2.3.

При $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ОВД диффеоморфна $L^1 = [0; +\infty)$.

2). $l = 0$. В этом случае при любом значении параметров равновесие достигается при $x = 0$. На плоскости $\mathbb{R}^2(h, \omega^2)$ ему соответствует линия $h = 0$. Если $\omega^2 = \frac{k}{m}$, то при любом x мы имеем равновесие, т.к. $V \equiv 0$. Т.о. диаграммы будут следующими (рис. 2.4).

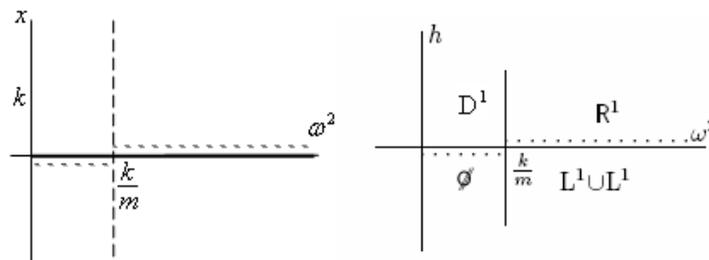


Рис. 2.4.

При $\omega^2 = \frac{k}{m}$, если $h < 0$, то ОВД есть \emptyset , а если $h > 0$, то ОВД $\cong \mathbb{R}^1$.

Задача 3.

В параболу $y = \frac{x^2}{4a}$, которая вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью ω , кладется палочка длины l . Требуется построить бифуркационные диаграммы и определить топологический вид ОВД палочки.

Решение.

Зададим угол Θ – лагранжеву координату для определения положения палочки – следующим образом (рис. 3.1). Очевидно, что конфигурационное пространство нашей задачи

$M = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. После вычислений можно получить следующий вид эффективной потенциальной энергии:

$$v(\Theta, \lambda, \chi) = \frac{mga}{6} (\chi^2 (6 - \lambda) \cos^2 \Theta + 3(2 - \lambda) \operatorname{tg}^2 \Theta),$$

где $\lambda = \frac{4a^2 \omega^2}{g^2}$, $\chi = \frac{l}{4a}$

Построим бифуркационную диаграмму в плоскости параметров $\mathbb{R}^2(\lambda, y)$, обозначив $y = \frac{6h}{mga}$. Стоит заметить, что прямая $\lambda = 0$

будет на нашей плоскости параметров в некотором смысле особой. Эта линия не является бифуркационной, в то же время, если $\lambda > 0$, которое достаточно близко к нулю, мы поменяем знак, то мы попадем в качественно другую ОВД. Этот факт связан с тем, что у потенциальной энергии есть множитель $\frac{mga}{6}$, а чтобы непрерывно поменять знак у λ , надо непрерывно поменять знак a , т.е. в какой-то момент a примет значение, равное нулю, и в этом случае станет неопределенным другой параметр задачи $\frac{-6}{mga}$. Т.е. особенность линии $\lambda = 0$ связана только с вышеприведенным выбором параметров для данной задачи.

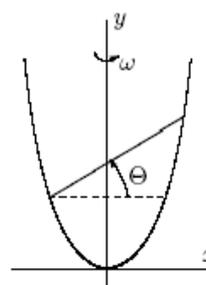


Рис. 3.1.

Теперь укажем уравнения для определения кривых равновесия.

I. $\Theta = 0 \Leftrightarrow y = 6 - \lambda$ – соответствует единственному положению равновесия.

II.

$$\lambda = 6 \left(1 - \frac{2}{3 - \chi^2 \cos^4 \Theta} \right) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3} |\chi| \sqrt{(6 - \lambda)(2 - \lambda)} - 3(2 - \lambda)$$

– соответствует двум симметричным положениям равновесия.

Предварительно построим диаграммы равновесия на плоскости (λ, Θ) (рис. 3.2).

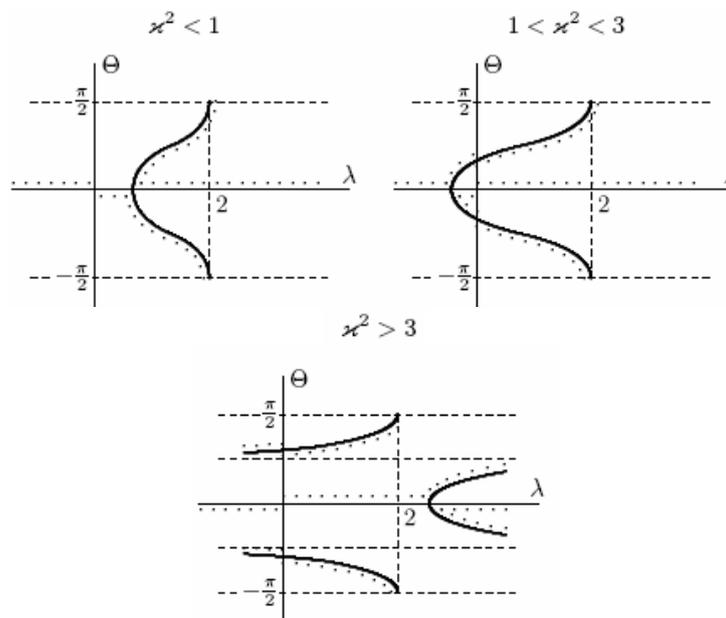


Рис. 3.2.

После этого можем строить бифуркационные диаграммы в плоскости $\mathbb{R}^2(\lambda, y)$ (рис. 3.3).

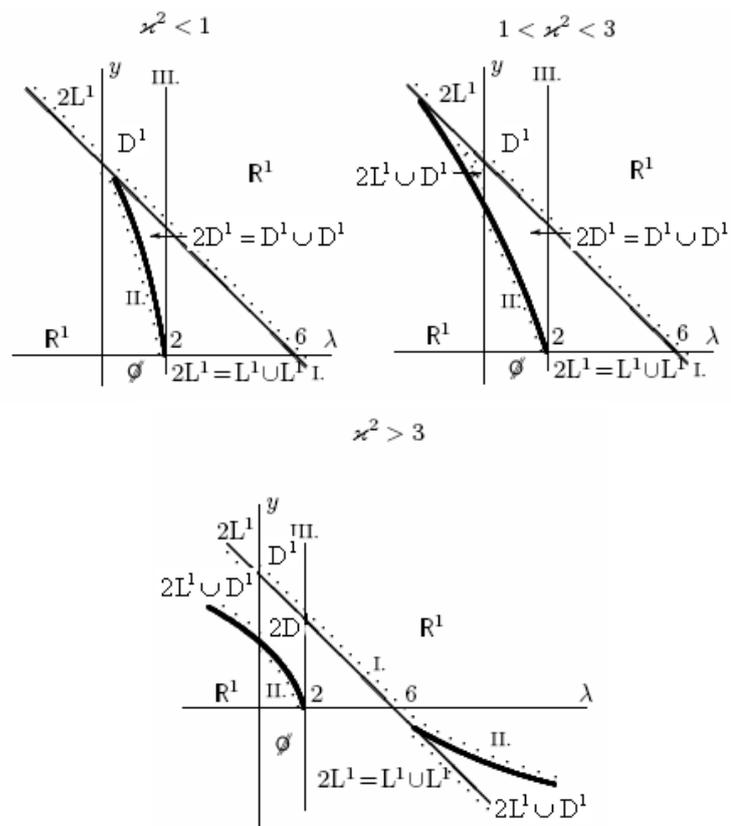


Рис. 3.3.

Линия III. $\lambda = 2$ является бифуркационной линией, но не линией равновесий. При изменении λ от $2 + \varepsilon$ к $2 - \varepsilon$ потенциальная энергия претерпевает следующие превращения

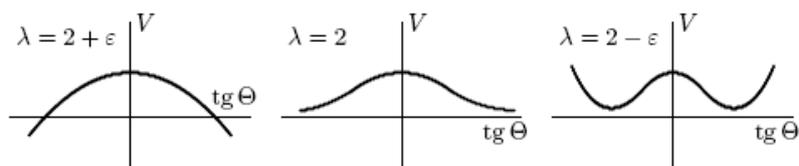


Рис. 3.4.

При $\lambda = 2$ перестройки ОВД таковы:

$$1) h \leq 0 \text{ ОВД} \cong \emptyset;$$

$$2) 0 < \frac{6h}{mga} < 4\chi^2 L \Rightarrow \text{ОВД} \cong \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^1;$$

$$3) \frac{6h}{mga} \geq 4\chi^2 L \Rightarrow \text{ОВД} \Rightarrow \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^1$$

Задача 4.

Палочка AB , концы которой скользят по гиперболе $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, движется в поле силы тяжести (рис. 4.1). Построить бифуркационные диаграммы Пуанкаре и Смейла.

Решение.

Исследование приводит к потенциальной функции:

$$U(v) = \mp \frac{Pb \cos v}{2\Phi(v)} \sqrt{\Phi(v)(4 + l^2\Phi(v))},$$

$$\text{где } \Phi(v) = \frac{\cos^2 v}{a^2} - \frac{\sin^2 v}{b^2} > 0.$$

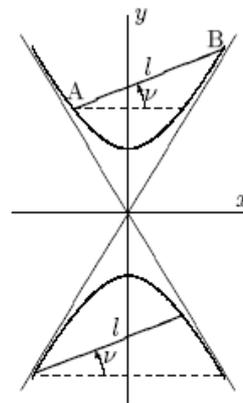


Рис. 4.1.

$$U'(v) = \mp \frac{Pl^2b}{2} \frac{\sin\Phi\left(\frac{4}{b^2l^2} - v\right)}{\Phi(v)\sqrt{\Phi(v)(4 + l^2\Phi(v))}}$$

Т.о. $U' = 0$ для:

1) $v = 0, \forall l$

2) $l \geq l_* = \frac{2a^2}{b}, v = \pm v_1(l) \Rightarrow l = \frac{\frac{2a^2}{b}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\cos^2 v_1 - \frac{a^2}{b^2}}$

Бифуркационные диаграммы даны на рис. 4.2 и рис. 4.3 справа, слева диаграммы равновесия.

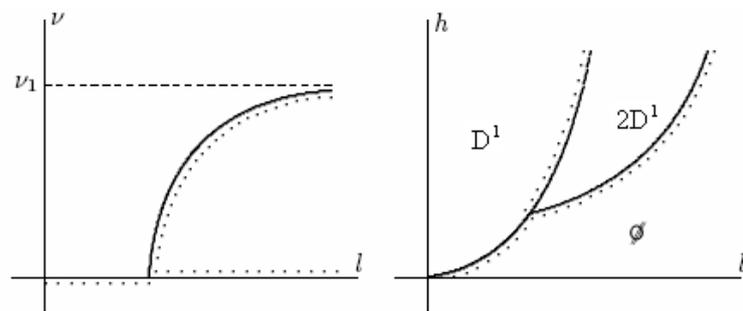


Рис. 4.2. Палочка на верхней половине гиперболы.

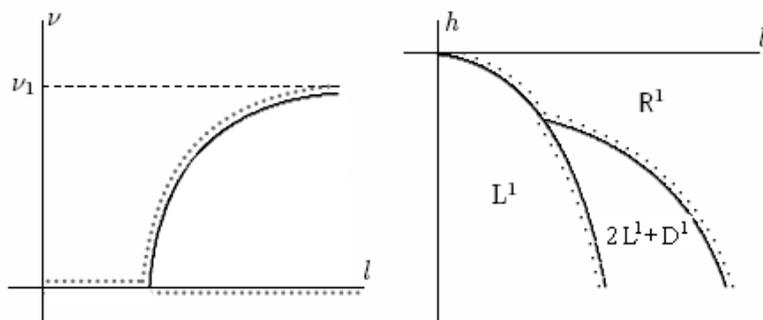


Рис. 4.3. Палочка на нижней половине гиперболы.

Задача 5.

Цепочка длины l и линейной плотности ρ лежит на остром углу α клина (рис 5.1). Плоскость с клином равномерно вращается вокруг перпендикулярной оси с угловой скоростью ω . Клин на плоскости неподвижен, и цепочка движется по клину без трения. Вся система находится в поле силы тяжести g . Построить бифуркационные диаграммы Пуанкаре и Смейла (в качестве параметра принять ω).

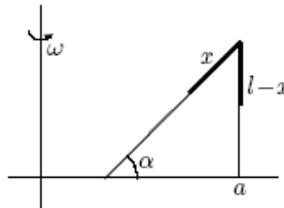


Рис. 5.1.

Решение.

Возьмем в качестве обобщенной координаты x длину части цепочки, лежащей на углу клина, соответственно длина свисающей части равна $(l-x)$

Запишем эффективную потенциальную энергию:

$$V(x) = -\frac{\rho g}{2} \left((l-x)^2 + x^2 \sin \alpha \right) - \frac{\rho \omega^2}{2} \cos \alpha \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \cos \alpha \right)$$

Положим $\rho, g, l = 1$. Это возможно, т. к. они размерно независимы и положительны. Тогда

$$V(x) = -\frac{1}{2} \left((l-x)^2 + x^2 \sin \alpha \right) - \frac{\omega^2}{2} \cos \alpha \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \cos \alpha \right)$$

Нас интересуют критические точки потенциальной энергии на интервале $(0,1)$.

$$V'(x) = x^2 \frac{\omega^2 \cos^2 \alpha}{2} + x(-1 - \sin \alpha - a\omega^2 \cos \alpha) + 1 = 0$$

Заметим, что $V'(0) = 1$ и $V''(0) = -1 - \sin \alpha - a\omega^2 \cos \alpha < 0$. Это означает $V'(1) < 0 \Leftrightarrow V'(x)$ на $(0,1)$ имеет один корень. В свою

очередь $V'(1) < 0 \Leftrightarrow a > \frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$. Т.о. уравнение

$a > \frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\omega^2} \Leftrightarrow V'(x)$ на $(0,1)$ имеет один корень. Наличие двух корней уравнения $V'(x) = 0$ на $(0,1)$ обеспечивает выполнение каждого из следующих трех условий:

$$1) \text{ дискриминант } D > 0 \Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{2}}{\omega} - \frac{1 + \sin \alpha}{\omega^2 \cos \alpha}$$

$$2) V'(1) > 0 \Leftrightarrow a < \frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$$

$$3) V''(1) > 0 \Leftrightarrow a < \cos \alpha - \frac{1 + \sin \alpha}{\omega^2 \cos \alpha}$$

Далее будут построены диаграммы на плоскостях (x, ω) и (h, ω) при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 5.2).

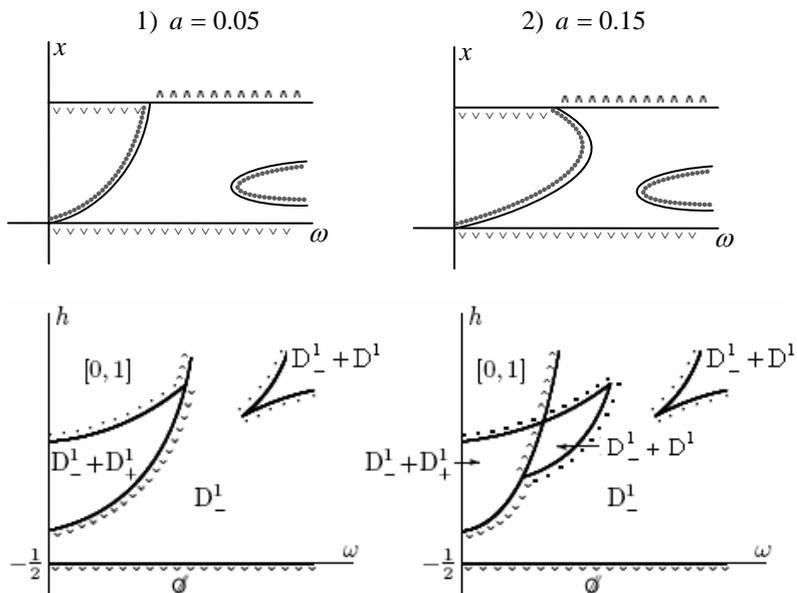


Рис. 5.2. Бифуркационные диаграммы при различных a .

Задача 6.

Тяжелая точка может двигаться без трения по вертикальному проволочному кольцу, которое вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω . Радиус кольца считать равным 1.

1) Построить бифуркационную диаграмму в плоскости $\mathbb{R}^2\left(h, \frac{\omega^2}{g}\right)$, h – постоянная интеграла энергии.

2) Сделать то же самое, считая, что кольцо вращается вокруг оси, параллельной вертикальному диаметру кольца и находящейся от него на расстоянии a (см. рис. 6.1).

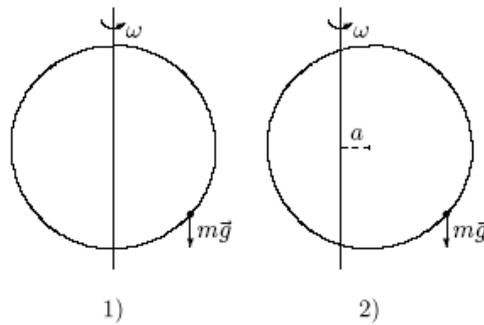


Рис. 6.1.

Решение:

1) Введем систему координат, в которой уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$ и вращение окружности происходит вокруг оси Oy .

Эффективная потенциальная энергия есть

$$V_{\text{эфф}} = mg \left(y - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2 \right)$$

Выбором единиц измерения физических величин всегда можем считать, что $mg = 1$ (если конечно $m \neq 0$ и $g \neq 0$), что и будем делать в дальнейшем для простоты вычислений. Т. о. наша задача состоит в определении условного экстремума функции

$V_{\text{эфф}} = y - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2$ при наложении связи $x^2 + y^2 = 1$. Итак, надо решить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\omega^2}{g} x = \lambda_1 x \\ 1 = \lambda_1 y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Исключая λ_1 из первых двух уравнений, получим, что выполняются следующие условия

$$\begin{cases} x \left(1 + \frac{\omega^2}{g} y \right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Корни (решения) этой системы есть ни что иное, как пересечение окружности двумя перпендикулярными прямыми. Всего может быть от 2-х до 4-х корней. Перечислим эти корни и соответствующие им бифуркационные линии

$$\begin{aligned} x_1 = 0, y_1 = 1 &\Leftrightarrow h = 1 \\ x_2 = 0, y_2 = -1 &\Leftrightarrow h = -1 \\ \left. \begin{aligned} x_3 = \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4}}, y_3 = -\frac{g}{\omega^2} \\ x_4 = -\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4}}, y_4 = -\frac{g}{\omega^2} \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow h = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{g} + \frac{g}{\omega^2} \right), \quad \frac{\omega^2}{g} \geq 1 \end{aligned}$$

Как известно, окружность можно погрузить в двумерную плоскость так, чтобы потенциальная энергия была просто функцией высоты. Пусть наша окружность задается координатой $\varphi : x = \cos \varphi$,

$$y = \sin \varphi. \text{ Тогда } V_{\text{эфф}} = \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \cos^2 \varphi.$$

Учитывая, что $\left. \frac{dV}{d\varphi} \right|_{\varphi=0,\pi} \neq 0$, осуществим погружение следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{x}(\varphi) = \cos \varphi \\ \tilde{y}(\varphi) \equiv V_{\text{эфф}} = \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \cos \varphi^2 \end{cases}$$

Легко видеть, что $\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 \neq 0$. На следующих рисунках показаны бифуркационная диаграмма (рис. 6.2), расположение корней (равновесий) на окружности при различных $\frac{\omega^2}{g}$, изменение поведения функции высоты в зависимости от $\frac{\omega^2}{g}$ и перестройки ОВД при различных h (рис. 6.3).

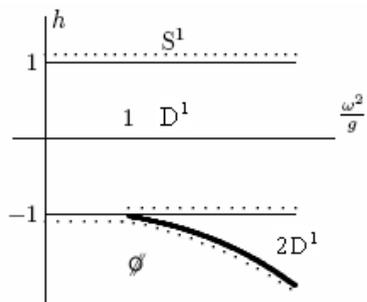


Рис. 6.2.

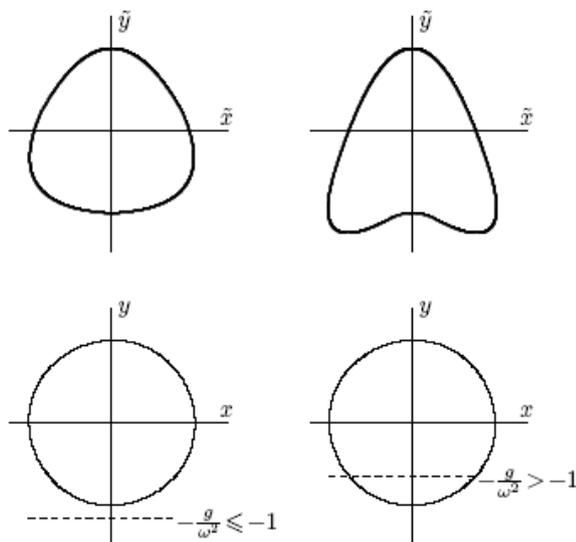


Рис. 6.3.

2) Ось вращения не совпадает с вертикальным диаметром кольца. Тогда нам надо найти экстремумы $V_{\text{эфф}} = y - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2$ при условии $(x-a)^2 + y^2 = 1$. Для определенности считаем $a > 0$. Нам надо решить следующую систему

$$\begin{cases} -\frac{\omega^2}{g} x = \lambda_1 (x-a) \\ 1 = \lambda_1 y \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Исключая λ_1 из первых двух уравнений, получим:

$$\begin{cases} y = \frac{g}{\omega^2} \left(\frac{g}{x} - 1 \right) \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда видно, что равновесия лежат на пересечениях кольца и гиперболы с асимптотами $x = 0$ и $a > 0, y = -\frac{g}{\omega^2}$ (сравни с п. 1). Зна-

чит, число равновесий колеблется от 2-х до 4-х. Снова осуществим погружение. Опять φ циклическая координата, $x = a + \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$,

$$V_{\text{эфф}} = \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} (a + \cos \varphi)^2$$

Т. к. $\left. \frac{dV}{d\varphi} \right|_{\varphi=0,\pi} \neq 0$, то формулы погружения останутся старыми

$$\begin{cases} \tilde{x}(\varphi) = \cos \varphi \\ \tilde{y}(\varphi) \equiv V_{\text{эфф}} = \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} (a + \cos \varphi)^2 \end{cases}$$

Теперь все готово для того, чтобы качественно построить бифуркационную диаграмму. На следующих рисунках показаны изменение поведения функции высоты и расположение положений равновесий на кольце в зависимости от $\frac{\omega^2}{g}$ (рис. 6.5), перестройки

ОВД при разных h в зависимости от $\frac{\omega^2}{g}$, а также построена бифуркационная диаграмма (рис. 6.4).

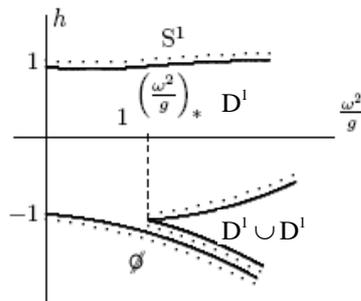


Рис. 6.4.

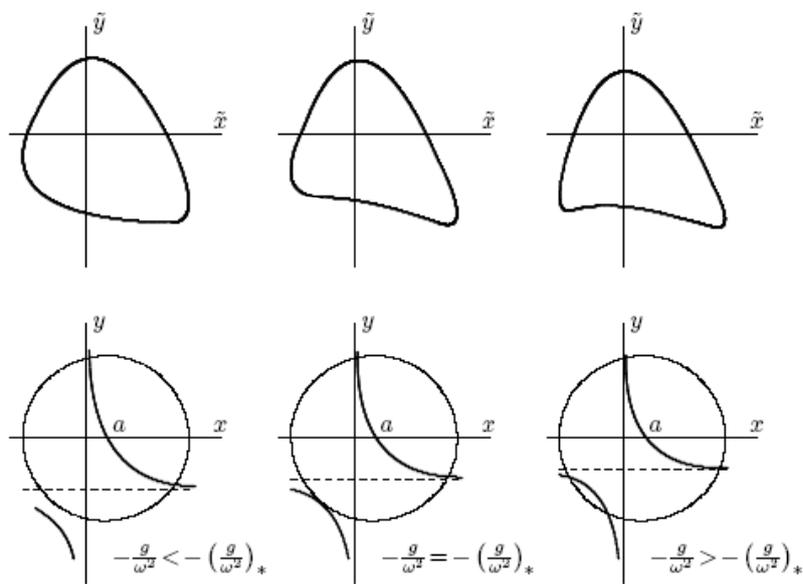


Рис. 6.5. $a < 1$

Проведя некоторые вычисления, можно найти значения $\left(\frac{\omega^2}{g}\right)_*$ в зависимости от a - начала “ласточкина хвоста” на бифуркационной диаграмме. Здесь приводится эта формула без вывода.

$$\left(\frac{\omega^2}{g}\right)_* = \left(1 - a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Из этой формулы видно, что “ласточкин хвост” существует только при $a < 1$ и пропадает при $a = 1$.

Задача 7.

Тяжелый однородный стержень AB длины l и весом P подвешен при помощи малых колечек, укрепленных на концах, на прут, изогнутый в форме гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, фокусы F_1 и F_2 которой расположены на горизонтальной прямой (рис. 7.1). Поле силы тяжести направлено вниз. Построить бифуркационную диаграмму Смейла.

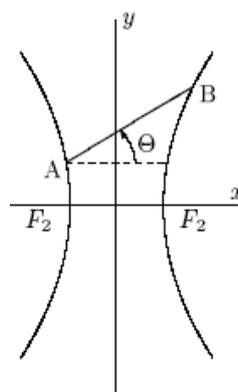


Рис. 7.1.

Решение.

Можно показать, что пространство положений есть гладкое многообразие, диффеоморфное окружности. Заметим, что геометрическое место центров масс стержня при таком движении есть гладкое погружение окружности в \mathbb{R}^2 , которое имеет единственную двойную точку, т. е. “восьмерка” (рис 7.2).

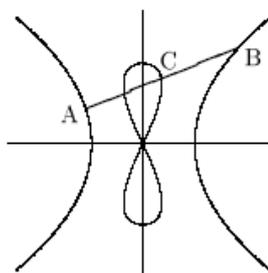


Рис. 7.2.

В качестве “удобной” координаты возьмем Θ – угол между прямыми AB и Ox (рис. 7.1). Она и не является обобщенной координаты всей системы, поскольку каждое значение Θ (за исключением наибольшего и наименьшего) определяет два возможных положения системы. Но для поиска положений равновесия от этой проблемы можно избавиться, считая, что мы имеем дело с двумя разными системами, центры масс которых соответственно находятся не ниже (не выше) оси Ox , для каждой из которых координата Θ является обобщенной.

Потенциальная энергия для обеих систем имеет вид

$$V(\Theta) = \pm \frac{Pb \cos \Theta}{2a\Phi} \sqrt{\Phi(l^2\Phi - 4)},$$

где $\Phi(\Theta) = \frac{\cos^2 \Theta}{a^2} - \frac{\sin^2 \Theta}{b^2}$.

Положения равновесия определяются из уравнения

$$V'(\Theta) = \mp \frac{P}{2ab} \frac{4 + b^2 l^2 \Phi^2}{\Phi \sqrt{\Phi(l^2\Phi - 4)}} \sin \Theta = 0,$$

откуда находим два положения равновесия исходной системы:

- 1) $\Theta = 0, y_1 = y_2 = \frac{b}{2a} \sqrt{b^2 - 4a^2}$ - устойчивое
- 2) $\Theta = 0, y_1 = y_2 = -\frac{b}{2a} \sqrt{b^2 - 4a^2}$ - неустойчивое

Используя соотношение:

$$V(\Theta = 0) = \pm \frac{Pb^2 a^2}{2} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 4}$$

построим бифуркационную диаграмму Смейла (рис. 7.3).

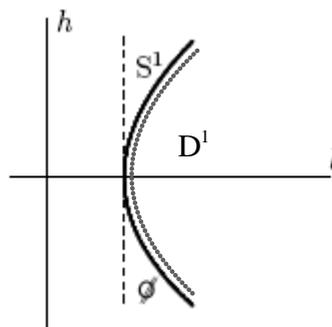


Рис. 7.3.

Вертикальная касательная у бифуркационной кривой Смейла – нетипичное явление. Здесь оно связано с тем, что при $l = 2a$ пространство положений (окружность) вырождается в точку.

Задача 8.

Квадрат со стороной a веса P свободно вращается вокруг своего угла, неподвижно закрепленного в точке O . Соседний угол квадрата соединен нитью с грузом веса Q , нить переброшена через блок, находящийся над точкой O на высоте b . Построить бифуркационные диаграммы.

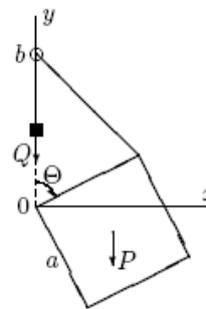


Рис. 8.1.

Решение.

Введем координату Θ , как показано на рис. 8.1. Потенциальная энергия имеет вид

$$V = Q\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \Theta} + \frac{Pa}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \Theta\right)$$

Т.к. g, a, P – размерно независимы и положительны, можно положить $a = g = 1$. В качестве независимого параметра положим вес груза Q , т.е. параметр действующей на систему силы (заметим, что в остальных задачах, рассмотренных в данном пособии, в качестве параметров берутся параметры наложенных связей).

Потенциальная энергия примет вид

$$V = Q\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \Theta} + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \Theta\right),$$

где $Q \geq 0$.

Построим предварительно бифуркационную диаграмму на полуцилиндре $Q \geq 0, \Theta \pmod{2\pi}$

Рассмотрим сначала случай $b = 1$. Тогда

$$V = 2Q \left| \sin \frac{\Theta}{2} \right| + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \Theta\right)$$

теряет гладкость при $\Theta = 0$, и бифуркационная диаграмма кроме нулей производной V' может при некоторых значениях параметра Q содержать $\Theta = 0$. При $b \neq 1$ гладкость не нарушается, так как подкоренное выражение в (8.1) $\geq 1 - b^2$. Т.к.

$$\lim_{\Theta \rightarrow -0} V' = -Q - \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ а } \lim_{\Theta \rightarrow +0} V' = Q - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ то } \Theta = 0 \text{ может быть точ-}$$

кой экстремума для V только тогда, когда $\lim_{\Theta \rightarrow +0} V' \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим $\Theta \in [-\pi; \pi]$, тогда:

$$V' = 0 \text{ при } \operatorname{sign}(\Theta) Q \cos \frac{\Theta}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \Theta\right),$$

$$\text{т.е. } \operatorname{sign}(\Theta) = \operatorname{sign}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \Theta\right)\right).$$

Следовательно $\Theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$. На этом множестве $V' = 0$ представляется в виде графика функции $Q(\Theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \Theta\right)}{\cos \frac{\Theta}{2}} \right|$, гладкой на данном множестве.

Исследуем нули $Q'(\Theta)$ (см. рис. 8.2). В случае $0 < b \neq 1$ функция $Q(\Theta)$ существует и является гладкой на множестве $\left(-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(0; \frac{3\pi}{4}\right]$, аналогично случаю $b = 1$.

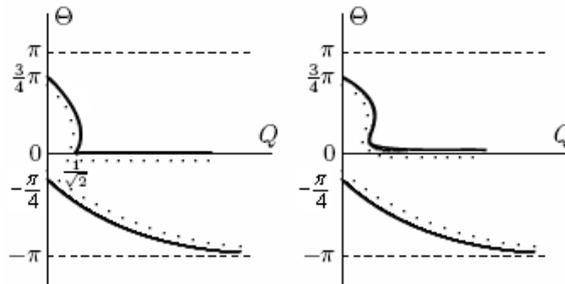


Рис. 8.2. Диаграммы Пуанкаре

Пользуясь рис. 8.2, построим бифуркационную диаграмму на плоскости (Q, h) .

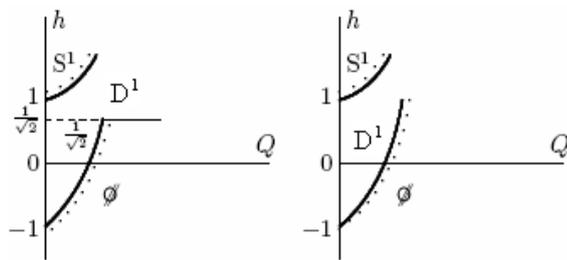


Рис. 8.3. Диаграммы Смейла

Замечание. Особенность, возникающая у функции V при значении $b = 1$ такая же, что и в семействе $V = \sqrt{c^2 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}^1$, $c \in \mathbb{R}^1$ при $c = 0$.

Задача 9.

Пусть точка массы m движется по окружности радиуса R в поле силы тяжести mg и соединена пружиной жесткости k и свободной длины l , подвешенной на высоте a над центром окружности (рис. 9.1). Построить бифуркационные диаграммы.

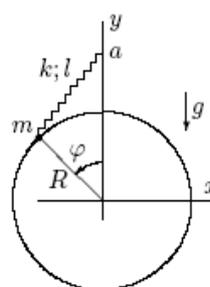


Рис. 9.1.

Решение.

Потенциальная энергия имеет вид

$$V = mgR \cos \varphi + k \left(\sqrt{(a - R \cos \varphi)^2 + (R \sin \varphi)^2} - l \right)^2$$

или, с точностью до константы

$$V = (mg - ak) R \cos \varphi - 2kl \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$$

Заметим, что меняя g и l можно считать $k = 1$ (при $k \neq 0$) – для этого достаточно положить

$$G = g - \frac{2ak}{m}, F = 2kl \left(\frac{\partial(G, F)}{\partial(g, l)} = 2k \neq 0 \right). \text{ Получим}$$

$$V = mGR \cos \varphi - F \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$$

Т. к. параметры $m > 0, R > 0, \sqrt{a^2 + R^2} F$ – размерно независимы, всегда можно считать $m = 1, R = 1, \sqrt{a^2 + R^2} F$ положить равным 1, если $F > 0$; 0, если $F = 0$; либо -1 , если $F < 0$. Заметим, что случай $F < 0$ сводится к случаю $F > 0$ заменой $F \rightarrow -F, G \rightarrow -G, V \rightarrow -V$, переводящей области возможности движения в их дополнения.

$$\text{Итак, исследуем } V = G \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{2a}{1+a^2} \cos \varphi}.$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \cup \varphi = \pi \cup G + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \varphi}} = 0 \quad (\text{мы обозна-}$$

чили $\alpha = \frac{a}{1+a^2}$. Следовательно, бифуркационная диаграмма в пространстве $\mathbb{R}^3(\varphi, a, G)$ есть объединение трех поверхностей:

$$\varphi = 0 \cup \varphi = \pi \cup \left\{ \cos \varphi = \frac{1 - \alpha^2/G^2}{2\alpha} \quad \left| \frac{1 - \alpha^2/G^2}{2\alpha} \right| \leq \alpha G < \right\}.$$

Построим зависимость числа положений равновесия от параметров a, G (рис. 9.2).

Рассмотрим случай $G > 0$ ($G < 0$ сводится к случаю $G > 0$ заменой $\alpha \rightarrow -\alpha, G \rightarrow -G, \varphi \rightarrow -\varphi$, при такой замене ОВД сохраняются). Предварительно построим бифуркационную диаграмму на цилиндре $\{\varphi \bmod 2\pi, a\}$ при $G > 0$ – фиксированном (рис. 9.3) Диаграмма симметрична относительно замены $\varphi \rightarrow -\varphi$ и 2π -периодична по φ , бифуркационные кривые пересекают $\varphi = 0, \varphi = \pi$ трансверсально.

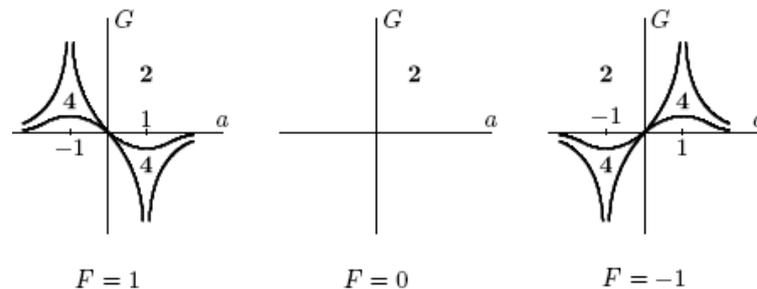


Рис. 9.2.

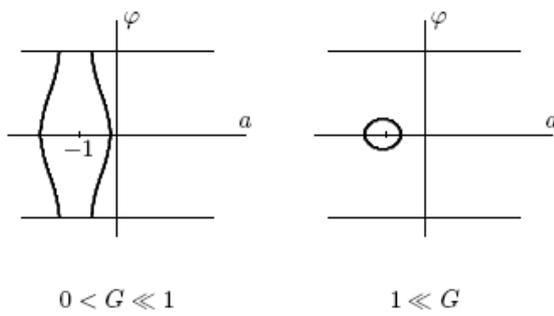


Рис. 9.3. Диаграммы Пуанкаре

Исходя из рис. 9.3, построим бифуркационную диаграмму Смейла на плоскости (h, a) (рис. 9.4 и 9.5).

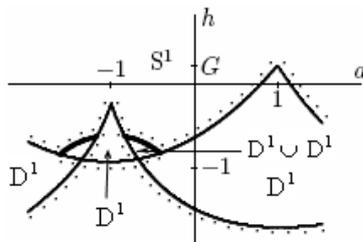


Рис. 9.4. $0 < G \ll 1$

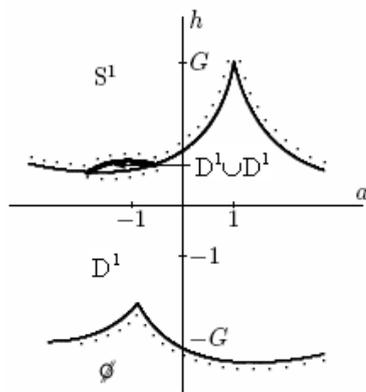


Рис. 9.5. $1 \ll G$

Углы на диаграммах связаны с отмеченной выше потерей гладкости.

Замечание. В случае $a = R$ рис. 9.5 допускает физическую интерпретацию задачи, отличную от рассмотренной, обладающую тем свойством, что потенциальная энергия на фазовом пространстве не теряет гладкости. Физическая модель состоит в том, что при прохождении длины пружины через 0 сила меняется непрерывно и, следовательно, сохраняет направление. При этом фазовое пространство двукратно накрывает окружность, по которой бежит точка: при однократном обходе окружности пружинка разворачивается на 180° .

Задача 10.

В двухзвенном механизме, изображенном на рис 10.1, звено OA закреплено в неподвижном шарнире в точке O , звено DC связано с OA шарниром A и его положение определяется шарнирной направляющей, помещенной в неподвижную точку B . $|OA| = r$, $|OB| = l$. Массы стержней OA и CD равны t и M соответственно, A' и B' – центры их масс, при этом $|OA'| = x$, $|AB'| = y$, $B' \in AC$. Система находится в поле силы тяжести g , направленном под углом α к положительному направлению оси Ox .

Описать перестройку пространства положений и положений равновесия системы при изменении l/r .

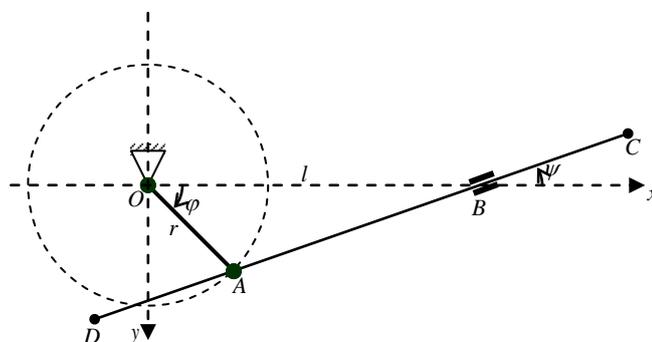


Рис. 10.1.

Решение.

Положение стержней OA и CD определим углами φ и ψ (рис. 10.1). Конфигурационное многообразие S определяется из уравнения связи:

$$r \sin(\psi + \varphi) = l \sin \psi, \quad k = \frac{l}{r}$$

Изобразим S на плоскости (ψ, φ) , точнее, на квадрате $(-\pi < \psi \leq \pi, -\pi < \varphi \leq \pi)$ (рис.10.2).

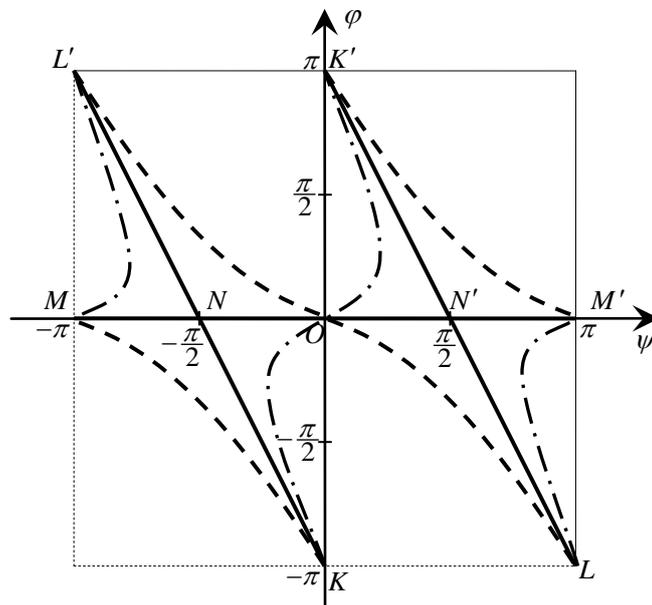


Рис. 10.2

При $k > 1$ многообразие S состоит из кривых KOK' и $LM' \cup ML'$, при $0 < k < 1$ – из кривых LOL' и $KM \cup MK'$. Налицо кардинальное изменение формы S при “прохождении” параметром k значения $k^* = 1$, при котором S состоит из трёх отрезков: $\varphi = 0$, $\varphi + 2\psi = \pi$, $\varphi + 2\psi = -\pi$, пересекающихся в точках N и N' , причём два последних являются продолжением друг друга в силу 2π -периодичности системы по φ и по ψ . Т.о. $S(k) = S_1(k) \cup S_2(k)$, где $S_1(k) \cap S_2(k) = \emptyset$ при $k \neq k^*$

Выбор обобщённой лагранжевой обобщённой координаты q . Как при $k > 1$, так и при $0 < k < 1$ следует принять $q = \varphi$. При $k = 1$, очевидно, обобщённой координаты нет.

Положения равновесия. Потенциальная энергия системы равна:

$$\begin{aligned} \Pi &= mgx \cos(\varphi - \alpha) + Mgr \cos(\varphi - \alpha) + Mgy \cos(\psi + \alpha) = \\ &= g(mx + Mr) \cos(\varphi - \alpha) + Mgy \cos(\psi + \alpha) \end{aligned}$$

Если принять $u = g(mx + Mr)$, $v = Mgy$, то:

$$\Pi = u \cos(\varphi - \alpha) + v \cos(\psi + \alpha)$$

В особой точке $N' \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right)$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right) = u \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \left(\frac{\pi}{2}; 0 \right) = -v \cos \alpha$$

Рассмотрим случай $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$. Тогда в некоторой окрестности

$U(N')$ выполнено $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} > 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} < 0$, и, следовательно, $\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{a}} < 0$, где

$\bar{a} = \{-a_\psi, a_\varphi\}$; $a_\varphi, a_\psi \geq 0$ – вектор, лежащий в плоскости (ψ, φ) . При

k , “близком” к $k^* = 1$, траектории системы будут проходить через $U(N')$ и, следовательно, при $k > 1$ в окрестности $U(N')$ у потенциальной энергии существует локальный минимум (он достигается на ветви OK') и локальный максимум (он достигается на ветви LM'). При $k < 1$, как и при $k = 1$ в окрестности $U(N')$ потенциальная энергия монотонна вдоль траекторий системы. Таким образом, при “переходе” через критическое значение параметра $k^* = 1$ минимум потенциальной энергии одной ветви конфигурационного многообразия “сливается” с максимумом другой ветви, при этом оба исчезают.

Несмотря на некоторые особенности, перестройка конфигурационного пространства и бифуркация положений равновесия происходит аналогично перестройке, описанной в теоретической части данного пособия.

Бифуркационные диаграммы. Предположим, что ускорение силы тяжести направлено вниз вдоль оси Oy ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), стержень OA – невесомый, $|AD|=0$. Построим диаграммы для случая, когда φ пробегает всю окружность, и в положении $\varphi = 0$ точка A находится

ближе точки B . При этом возникают ограничения на параметры: $r < l$, $2y > r + l$. Положив, как и ранее, $M = g = y = 1$.

Потенциальная энергия имеет вид

$$P = r \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos \varphi}} \right)$$

Явно найти критические точки P не представляется возможным. Но заметим, что потенциал - это высота центра масс звена CD . Проследим, какую кривую описывает центр масс в случае $\frac{r}{l} = \varepsilon \ll 1$.

Получим

$$y_c = r \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos \varphi}} \right) = r \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{l \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2} + 2 \frac{r}{l} \cos \varphi}} \right) \approx$$

$$\approx r \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{2} (\varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi) \right) \right) \approx r \sin \varphi - \varepsilon \sin \varphi$$

Аналогично, $x_c \approx -r \cos \varphi + 1$

Т.е. при $\frac{r}{l} = \varepsilon \ll 1$ центр масс описывает гладкую регулярную кривую, близкую к окружности. Визуально нетрудно проследить изменение кривой, описываемой центром тяжести при других различных соотношениях параметров:

- а) $1 + r < l$ 
- б) $1 + r = l$ 
- в) $1 + r > l > 1 - r$ 
- г) $l = 1 - r$ 
- д) $l < 1 - r$ 

Фиксируем l . Построим бифуркационную диаграммы, приняв r в качестве параметра.

1) $l > \frac{3}{2}$. При этом V имеет две критические точки.

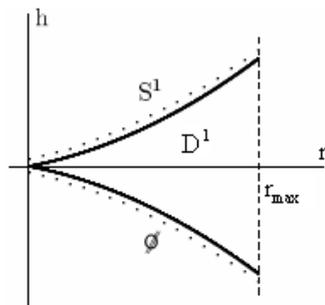


Рис. 10.3.

2) $\frac{3}{2} > l > 1$ (рис. 9.4.).

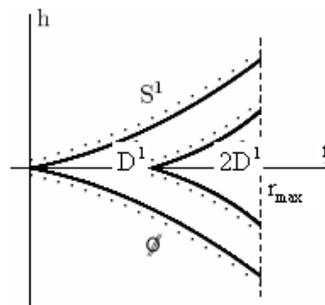


Рис. 10.4.

3) $1 > d > \frac{1}{2}$. Здесь диаграмма та же, что и в предыдущем случае, вот только кривые поменялись местами.

4) $\frac{1}{2} > d$. Диаграмма идентична рис. 9.3.

С убыванием h картина меняется в обратном направлении.

Задача 11.

В эллипсе, задаваемом уравнениями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b > a$, на колесках скользит стержень MN длиной l и массой t (рис. 11.1). Система находится в поле силы тяжести с ускорением g , направленным вниз. Описать перестройку пространства положений и положений равновесия системы при изменении l .

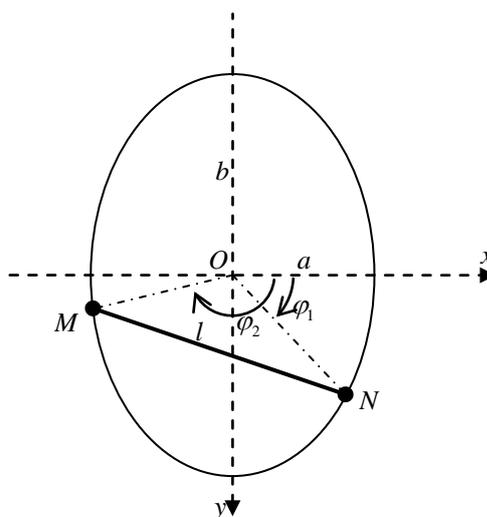


Рис. 11.1

Разберем эту задачу поподробнее. Зададим положение точек N и M углами φ_1 и φ_2 между лучами ON и OM с положительным направлением оси Ox . Обсуждаемая система голономна, так как величины φ_1 и φ_2 связаны геометрическим соотношением:

$$l^2 = a^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)^2 + b^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2$$

$$k^2 = (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)^2 + q^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2; \quad k = \frac{l}{a}, q = \frac{b}{a}$$

Пространство положений. Примем в качестве изменяемого параметра системы длину стержня, т.е. величину k . Изобразим конфигурационное многообразие S системы на плоскости (φ_1, φ_2) , точ-

нее, в полосе U : $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ при различных значениях параметра k (рис.11.2). Положим, для примера, $q = \sqrt{2}$ (все другие случаи $q > 1$ ($b > a$) топологически эквивалентны). Под кривыми будем подразумевать и их 2π -периодическое продолжение в полосе U .

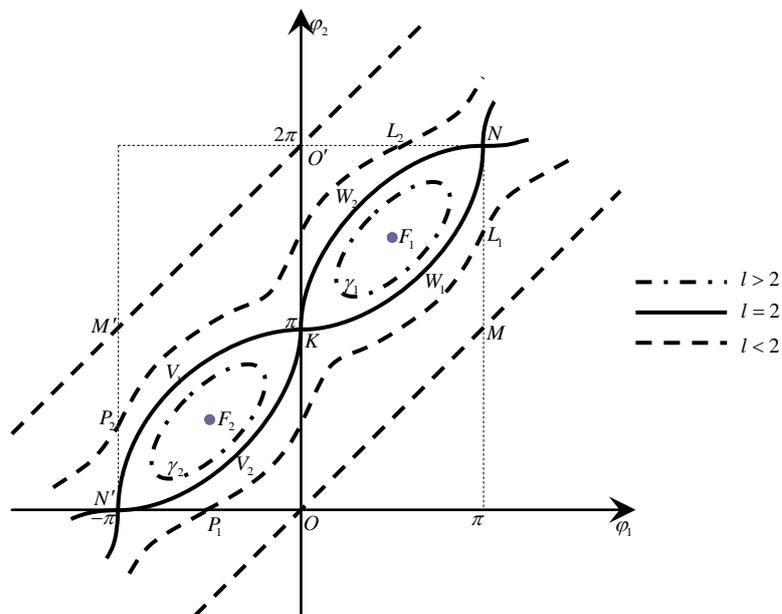


Рис. 11.2 Перестройка пространства положений.

Так как при $k = 0$ обе точки «сливаются» в одну, то многообразие S состоит из прямой OM , которую можно отождествить с прямой $M'O'$. При $k \in (0; 2)$ многообразие S состоит из кривых P_1L_1 и P_2L_2 , которые отвечают различным ориентациям стержня OM ; при $k \in (2; 2q)$ – из замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , вырождающихся в точки F_1 и F_2 при $k = 2q$. При $k > 2q$ ($l > 2b$) и при $k < 0$ ($l < 0$) многообразие S пусто (система не существует). Налицо кардинальное изменение формы S при «прохождении» параметром k значения

$k^* = 2$, при котором S состоит из двух пересекающихся кривых $N'V_1KW_1N$ и $N'V_2KW_2N$.

Выбор обобщённой лагранжевой обобщённой координаты q . При $k < 2$ в качестве обобщённой координаты можно принять как φ_1 , так и φ_2 , поскольку каждая из них может изменяться произвольно. При $k > 2$ ни один из этих углов нельзя «назначить» обобщённой координатой, а в качестве q следует принять натуральный параметр (или ему подобные характеристики) замкнутых кривых $\gamma_{1,2}$. При $k = 2$, очевидно, обобщённой координаты нет.

Траектории «критической» системы. При $k = 2$ имеется ряд критических положений системы : $\varphi_1 = \pi n, \varphi_2 = \pi + \pi n, n \in Z$ (в частности, $K : \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$); система может «покинуть» их по двум совершенно разным траекториям (из точки K – по кривым $N'V_1W_1N$ или $N'V_2W_2N$). Налицо неопределённость выбора траектории, если движение начинается из состояния покоя в одном из этих положений, не являющимся положением равновесия.

Предположим теперь, что движение начинается из некоторого неособого положения и изображающая точка «входит» в критическую точку (для определённости, K) с ненулевой скоростью. Если движение происходило по дуге V_1K , то скорость точки M стержня MN уменьшается до нуля, скорость же точки N возрастает, если же по V_2K , то наоборот. Тогда, очевидно, продолжение движения «через» критическую точку K определяется свойством инерции, т.е. в первом случае по KW_1 , а во втором по KW_2 . Таким образом, для почти всех начальных условий кривые $N'V_1KW_1N$ и $N'V_2KW_2N$ следует считать целыми траекториями критической системы.

Предельные свойства. Рассмотрим случай $k < 2$ и выделим «предельную траекторию» при $k \rightarrow 2 - 0$ (слева). Изображение на рис.2 позволяет принять в качестве «предельной» для траектории P_2L_2 кривую $N'V_1KW_2N$. В то же время в случае $k \rightarrow 2 + 0$ (справа) «предельная траектория» для γ_1 имеет вид замкнутой кривой NW_2KW_1N . Таким образом, «предельная траектория», вообще говоря, не совпадает с траекторией критической (т.е. предельной) системы. Это означает, что попытки изучения траекторий критических

(предельных, вырожденных) систем путём построения предельных переходов в траекториях невырожденных систем могут оказаться некорректными.

Положения равновесия. Предположим, что рассматриваемый механизм находится в однородном поле тяжести с ускорением g , которое направлено вниз по направлению оси Oy . Запишем потенциальную энергию:

$$П = -\frac{mgb}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$$

В критической точке $K(0, \pi)$:

$$П'_{\varphi_1}(0; \pi) = -\frac{mgb}{2}$$

$$П'_{\varphi_2}(0; \pi) = \frac{mgb}{2}$$

В точке K и, следовательно, в некоторой её окрестности $U(K)$ выполнены неравенства $П'_{\varphi_1} < 0$ и $П'_{\varphi_2} > 0$. При k , “близком” к $k^* = 2$, траектории системы будут проходить через $U(K)$ и, следовательно, при $k > 2$ в окрестности $U(K)$ у потенциальной энергии существует локальный минимум (он достигается на ветви P_2L_2) и локальный максимум (он достигается на ветви P_1L_1). При $k < 2$, как и при $k = 2$ в окрестности $U(N')$ потенциальная энергия монотонна вдоль траекторий системы. Таким образом, при “переходе” через критическое значение параметра $k^* = 2$ минимум потенциальной энергии одной ветви конфигурационного многообразия “склеивается” с максимумом другой ветви, при этом оба исчезают. Схематически картина показана на рис. 11.3 (направление стрелок указывает на увеличение потенциальной энергии).

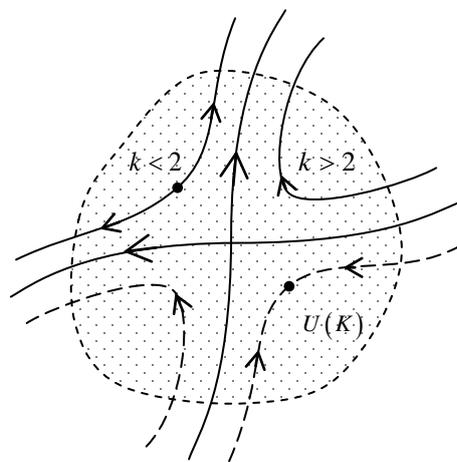


Рис. 11.3

Потенциальная энергия системы как функция двух переменных не меняет свой вид, но перестройка конфигурационного многообразия влечёт за собой перестройку поведения потенциальной энергии вдоль траекторий системы, и, следовательно, меняется наличие (отсутствие) положений равновесия и их характер.

Список литературы

1. Апфель П. Теоретическая механика. Т.1-2. М.: Физматгиз, 1960. 515с.; 487с.
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. В изд.: «Современные проблемы математики. Фунд. направления», т.3. ВИНТИ, 1986.
3. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М., Наука, 1972.
4. Брекер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977, 208 с.
5. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Наука, 1973.
6. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС. 1998. 165~с.
7. Карапетян А.В. К вопросу об устойчивости стационарных движений неавтономных систем. // ПММ. 1980. Т.44 С.418-426
8. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники ВИНТИ, Общая механика, т. 6, 1983.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., ГТТИ, 1950, 771 с.
10. Маркеев А.П. К динамике волчка. МТТ, 1984, N3, 30--38.
11. Мощук Н.К. О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости. ПММ, 1983, 47, N6, 916--923.
12. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: «Мир», 1971, 232 с.
13. Окунев Ю.М. "О некоторых свойствах поступательно-вращательного движения длинной гантели в центральном поле сил". Труды Института механики МГУ. № 10. 1971. 37с
14. Окунев Ю.М. "О поступательно-вращательном движении длинной гантели". Кандидатская диссертация. 1971. 87с.
15. Погосян Т.И. Области возможности движения и интегральные многообразия в задаче Клебша. Механика твердого тела. Респ. межвед. сборник, вып.16, 12-19. Киев, 1984.
16. Румянцев В.В., Карапетян А.В. Устойчивость движений неавтономных систем. Итоги науки ВИНТИ, 1976, «Общая механика», т. 3, с. 5-42.
17. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. "Избранные задачи по теории устойчивости движения" Изд-во МГУ. 1981. 31с.

18. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. "Устойчивость стационарных движений (в примерах и задачах)". Москва. Наука. 1988. 304 с.
19. Самсонов В.А. "Перестройка конфигурационного пространства механических систем и критические системы". ПММ. Т.63. Вып.5, 1999).
20. Самсонов В.А. О квазистационарных движениях механических систем. МТТ, 1978, N1, 32--34.
21. Самсонов В.А. О квазистационарных движениях гироскопа в кардановом подвесе. МТТ, 1979, N4, 18--23.
22. Самсонов В.А. Качественный анализ задачи о движении волчка на плоскости с трением. МТТ, 1981, N5, 29--35.
23. Смейл С. Топология и механика. Успехи матем. наук, 1972, 27, вып.2, 77--133.
24. Татаринев Я.В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вестник МГУ. Сер. матем., механ, 1974, N6, 99--105.
25. Татаринев Я.В. Лекции по классической динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984, 296 с.
26. Татаринев Я.В. Построение компактных инвариантных многообразий, отличных от торов, в одной интегрируемой задаче динамики неголомомных систем. УМН, 1985, 40, вып. 5, с. 216.
27. Татаринев Я.В. Разделяющиеся переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. XXIII, М., 1988, 160--174.
28. Татаринев Я.В. Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торах. МТТ, 1988, N1.
29. Уиттекер А.Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.
30. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. М., изд-во МГУ, 1986.
31. Харламов М.П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела. ДАН СССР, 1983, 273, N6, 1322--1325.
32. Харламов П.В. О разделяющих движениях в случае Лагранжа. Механика твердого тела. Респ. межвед. сборник, вып.11. Киев, 1979.
33. Чаплыгин С.А. Избранные труды по механике и математике. М.: ГИТТЛ, 1954, 567 с.
34. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., 1962, 535 с.

Самсонов В.А., Татаринов Я.В.

Бифуркационные диаграммы в модельных задачах.

М:Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007.

Подписано в печать 15.09.2007
Формат 60 x 90 1/6 Объем 2,5 п.л.
Заказ 15 Тираж 50 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ,
г. Москва , Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 30.02.2001

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета