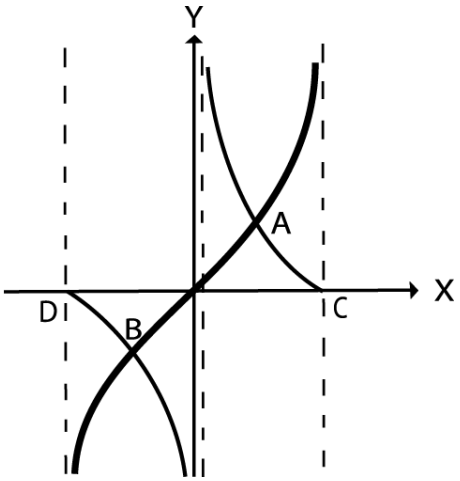
תרגיל אתגר 1 - חקירת פונקציה טריגונומטרית

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת טריגו.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ ו: $g(x)=\frac{x}{\cos x}$ בתחום: $-m\le x\le m$ המוגבל כמתואר בשרטוט על ידי הנקודות C ו-D על ציר ה-x.



א. קבע איזה מהגרפים, העבה או הדק, מתאים לפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר m.

ג. הסעיף הבא מתייחס <u>לכל תחום ההגדרה</u> של שתי הפונקציות ולא רק לתחום הנתון בתרגיל:
הוכח ששתי הפונקציות, מקבלות ערכי קיצון עבור אותם ערכי x. נמק.

ד. שני הגרפים נחתכים בנקודות A ו-B כמתואר בשרטוט.
מצא את שיעורי ה-y של הנקודות A ו-B.

ה. חשב את הזווית בין הישר המשיק לגרף הדק בנקודה C לבין הישר המשיק לגרף העבה בראשית הצירים.

ו. מצא כמה פתרונות יש למשוואה: $f'(x)=g'(x)$ בתחום: $-m\le x\le m$.

ז. הגדירו פונקציה חדשה: $h(x)=f(x)+g(x)$. בתחום: $-m\le x\le m$ יש לגרף הפונקציה $h(x)$ רק שתי נקודות קיצון, ששיעורי ה-x שלהן זהים לשיעור ה-x של הנקודות A ו-B. דרך נקודות קיצון אלו עוברים שני ישרים המקבילים לציר ה-x. חשב את המרחק בין שני ישרים אלו.

תשובות:

א. הגרף הדק מתאים לפונקציה $f(x)$. **ב.** $m=\frac{\pi}{2}$. **ד.** $y_A=1,\ y_B=-1$. **ה.** 102.5^0.

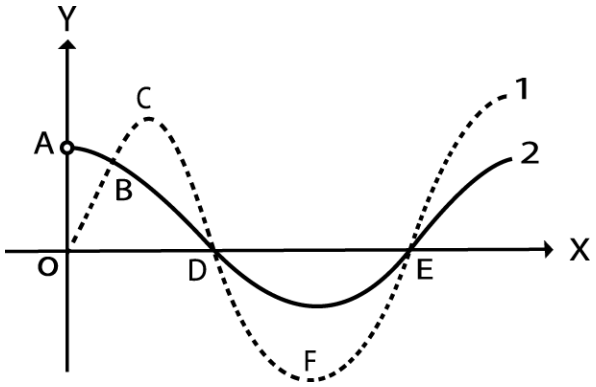
ו. אין פתרון. **ז.** 4 יח' אורך.

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 2 - חקירת פונקציה טריגונומטרית

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת טריגו.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונים הגרפים של שתי הפונקציות: $f(x)=x\cdot\sin x$ ו: $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ בתחום: $0\le x\le 3\pi$.



א. קבע איזה מהגרפים, 1 או 2, מתאים לפונקציה $f(x)$. נמק.
(הגרפים <u>אינם</u> משורטטים במלוא התחום הנתון בשאלה).

ב. מצא עבור אילו ערכי x בתחום <u>הנתון בשאלה</u>, הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת.

ג. מצא את שיעורי הנקודות B, D ו-E, בהן נחתכים הגרפים.

ד. הנקודות C ו-F, הן נקודות קיצון של גרף הפונקציה 1 כמתואר בשרטוט. בתחום המופיע בציור, גרף הנגזרת $f'(x)$ שלילי רק בתחום $2.029<x<4.913$.
חשב את היחס בין שטחי המשולשים ΔCDE ו- ΔDEF.

ה. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x)=g(x)-f(x)$. מבלי לחקור ישירות את הפונקציה $h(x)$:

1. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של גרף הפונקציה $h(x)$ במסגרת התחום: $0\le x\le 2\pi$.
2. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $h(x)$ עם הצירים בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

תשובות:

א. גרף 1 מתאים לפונקציה $f(x)$. **ב.** $x=0$. **ג.** $B(1,0.841)$, $D(\pi,0)$, $E(2\pi,0)$.

ד. 0.378. **ה. 1)** חיובית: $0<x<1$ או $\pi<x<2\pi$; שלילית: $1<x<\pi$. **2)** $(1,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$.

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 3 - חקירת פונקציה טריגונומטרית

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת טריגו.
רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin\left(\frac{3\pi}{x}\right)$.

א. הוכח: כל נקודות הקיצון של גרף $f(x)$ נמצאות במרחק של יחי אורך אחת מציר ה-x.

ב. את הסעיפים הבאים בצע בתחום $1\le x\le 3$:

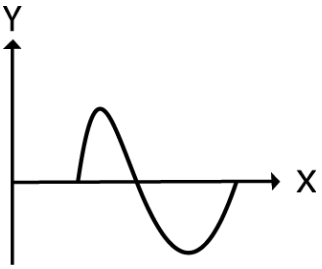
1. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.
2. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$, כולל בקצה התחום, ואת סוגן.
3. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון: $f'(x)=g(x)$. הפונקציה $g(x)$ חיובית לכל x בתחום $2\le x\le 3$.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ לבין ציר ה-x והישרים $x=2$ ו: $x=3$.

ד. מצא עבור אילו ערכי k חותך הישר: $y=\frac{1}{k}$ את גרף הפונקציה $f(x)$ רק פעמיים בתחום $1\le x\le 3$.

ה. הגדירו פונקציה חדשה: $h(x)=|f(x)-m|$ בתחום $1\le x\le 3$. נתון: $0<m$. נתון שגרף הפונקציה $h(x)$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $1\le x\le 3$. מצא את ערכו של הפרמטר m.

פתרונות:



א. הוכחה.

ב. 1) $(1,0),(1.5,0),(3,0)$.

2) $\min(1,0),\max(1.2,1),\min(2,-1),\max(3,0)$.

3) השרטוט משמאל.

ג. 1 יח"ר. **ד.** $k>1$ או $k<-1$. **ה.** $m=2$.

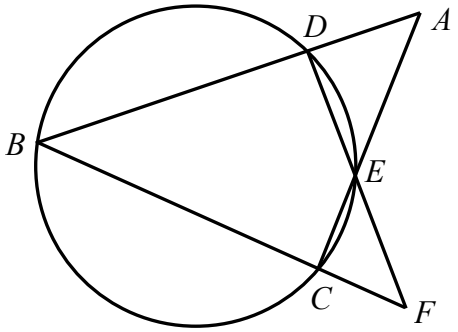
© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

<u>תרגיל אתגר 4 - גיאומטריה</u>

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בגיאומטריה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

התרגיל מיועד לפתרון באמצעות גיאומטריה בלבד וללא שימוש בטריגונומטריה.

(**) המרובע BCED חסום במעגל כמתואר בשרטוט. המשכי המיתרים BD ו-CE נחתכים בנקודה A.
המשכי המיתרים BC ו-DE נחתכים בנקודה F. נתון: $AE = 2CE$, $AD + CE = BD$.



א. חשב את היחס: $\frac{AB}{AC}$.

ב. נתון: במרובע BCED ניתן לחסום מעגל.
הקטע DE קצר ב-2 ס"מ מהקטע AD.
חשב את אורך AD.

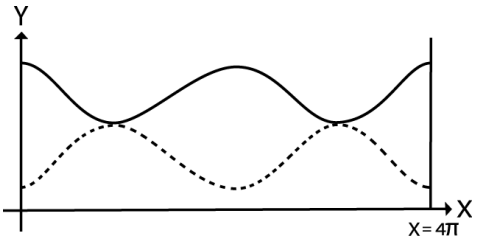
ג. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta CEF}}$.

פתרונות: א. $1\frac{1}{3}$. **ב.** 9 ס"מ. **ג.** $\frac{7}{4}$.

תרגיל אתגר 5 - חקירת פונקציה טריגונומטרית

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת טריגו.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

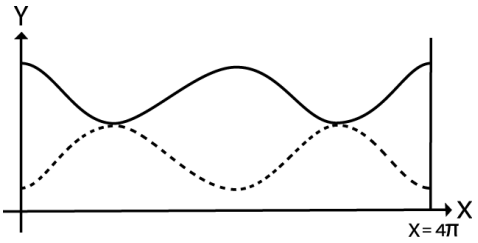
(**) נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=m+3+\cos x$ ו: $g(x)=2m-\cos x$ בתחום: $0\le x\le 4\pi$.
הגרפים משיקים זה לזה בנקודות הקיצון.



א. מצא את ערכו של הפרמטר m וקבע איזה מהגרפים - העליון או התחתון - מתאים לפונקציה $f(x)$.

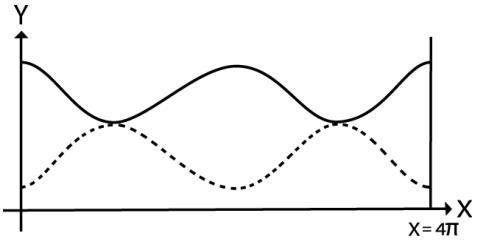
ב. מצא באמצעות הגרפים, עבור ערך x_1 כלשהו, מהו:

1. הערך המקסימלי שיכולה לקבל המנה: $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$. נמק.
2. הערך המינימלי שיכולה לקבל המנה: $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$. נמק.



ג. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

1. <u>מבלי לחקור</u> את הפונקציה $h(x)$ באמצעות גזירה, הוסף למערכת הצירים שמשמאל גם את גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום: $0\le x\le 4\pi$.
2. הישר $y=k^2+1$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)$ בנקודות קיצון הנמצאות על הגרף. מצא את ערכו של הפרמטר k.



ד. מגדירים פונקציה חדשה: $z(x)=f(x)\cdot g(x)$.

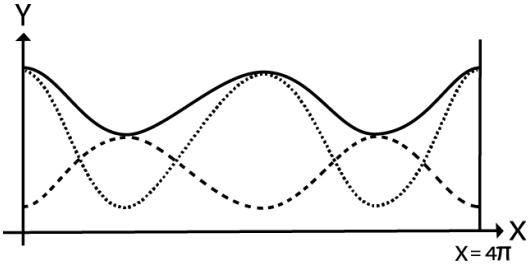
1. <u>מבלי לחקור</u> את הפונקציה $z(x)$ באמצעות גזירה, הוסף למערכת הצירים שמשמאל גם את גרף הפונקציה $z(x)$ בתחום: $0\le x\le 4\pi$.
2. מצא את משוואת הישר העובר דרך כל נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו-$z(x)$.

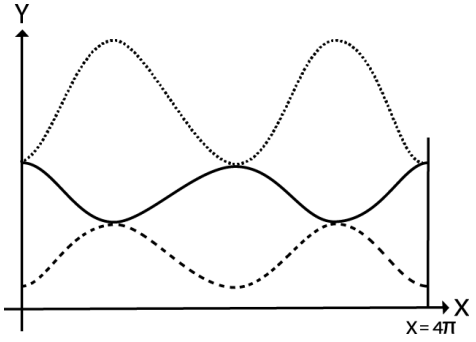
פתרונות:

א. $m=1$. הגרף העליון מתאים לפונקציה $f(x)$.

ב. **1)** 5. **2)** 1.

ג. **1)** בשרטוט למטה. **2)** $k=-2,0,2$. ד. **1)** בשרטוט למטה. **2)** $y=5$.





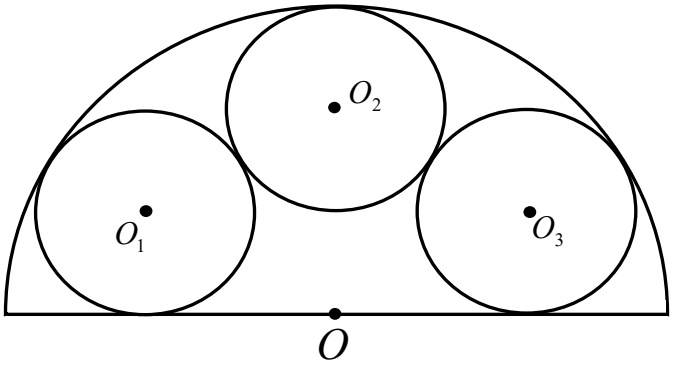
© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 6 - גיאומטריה

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בגיאומטריה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

התרגיל מיועד לפתרון באמצעות גיאומטריה בלבד וללא שימוש בטריגונומטריה.

(**) בחצי מעגל שמרכזו O חסומים שלושה מעגלים שמרכזיהם O_1, O_2 ו-O_3 ואורך הרדיוס של כל אחד מהם הוא r (כמתואר בשרטוט).



א. הבע באמצעות r את סכום השטחים הכלואים בין חצי המעגל לבין שלושת המעגלים.

ב. קבע איזה מרובע הוא $OO_1O_2O_3$. נמק.

ג. שטח המעגל ה<u>חסום</u> במרובע $OO_1O_2O_3$ קטן ב-15π יח"ר משטח חצי המעגל שמרכזו O.
חשב את סכום ה<u>היקפים</u> של השטחים הכלואים בין חצי המעגל לבין שלושת המעגלים.

ד. הנקודה O היא מרכז של מעגל שלם נוסף, <u>שאינו מופיע בשרטוט</u>. מעגל זה חותך את שלושת המעגלים הכלואים בשש נקודות שונות (סך הכל). חשב באיזה תחום נמצא שטחו של מעגל זה.

פתרון:

א) $1.5\pi r^2$.

ב) מעוין.

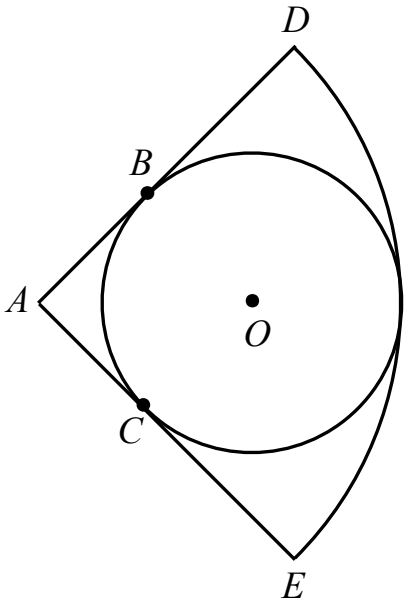
ג) 68.55 ס"מ $= 18\pi + 12$.

ד) $12\pi < S < 36\pi$ או $4\pi < S < 12\pi$ (סמ"ר).

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 7 - טריגונומטריה

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בטריגונומטריה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.



(**) נתונה הגזרה ADE השייכת למעגל שמרכזו בנקודה A ורדיוסו R. בגזרה ADE חסום מעגל שמרכזו בנקודה O המשיק לגזרה בנקודות B ו-C כמתואר בשרטוט. נסמן: $\prec DAE = 2\alpha$.

א. קבע איזה מרובע הוא $ABOC$. נמק.

ב. הבע באמצעות R ו- α את היקף המעגל שמרכזו O.

ג. שטח המעגל <u>החוסם</u> את המרובע $ABOC$ הוא S_1.
שטח המעגל שמרכזו O הוא S_2.
הבע באמצעות α את היחס: $\frac{S_2}{S_1}$.

ד. מצא מהו תחום הערכים האפשריים ליחס: $\frac{S_2}{S_1}$. נמק.

ה. הבע באמצעות R ו- α, במידת הצורך, את אורך הקשת:
1. DE.
2. BC (השמאלית).

ו. נתון: הקשת BC הימנית ארוכה פי שלושה מהקשת BC השמאלית.
הבע באמצעות R את שטח הגזרה ADE.

פתרון:

א. דלתון. **ב.** $\frac{2\pi R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. **ג.** $4\sin^2\alpha$. **ד.** $0<\frac{S_2}{S_1}<4$.

ה. 1) $\frac{\alpha\pi R}{90^0}$. **2)** $\left(\frac{90^0-\alpha}{90^0}\right)\cdot\left(\frac{\pi R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$. **ו.** $\frac{\pi R^2}{4}$.

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 8 - חקירת מנה

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת מנה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{mx^2+x+1}{x^2-3x+2}$.

א. מצא עבור אילו ערכי m, לפונקציה $f(x)$ יהיה (אין קשר בין סעיף א1 לבין סעיף א2):
1. מספר האסימפטוטות האופקיות מקסימלי.
2. מספר האסימפטוטות האנכיות מקסימלי.
3. מספר נקודות החיתוך עם ציר ה-y מקסימלי.

ב. נתון: האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ היא: $y=-3$. מצא את שיעורי:
1. נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן.
2. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

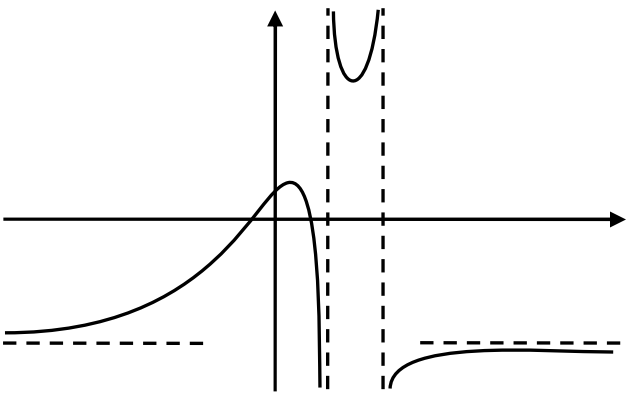
ד. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=x\cdot f(x)$. <u>מבלי לפתור ישירות את אי השוויון</u>, מצא באילו תחומים מתקיים: $g(x)<0$. נמק.

ה. (*) הגדירו פונקציה חדשה: $h(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|-k}$. מצא עבור אילו ערכי k, תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ו. (*) הגדירו פונקציה חדשה: $k(x)=\frac{f(x)}{f(x)-p}$. מצא עבור אילו ערכי p, תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

פתרונות:

א. 1) כל m. **2)** $m\neq -2,-0.75$. **3)** כל m.
ב. 1) $\max(0.5,1)$, $\min(1.25,13)$.
2) $(0.77,0)$, $(0,0.5)$, $(-0.43,0)$.
ג. הציור משמאל.
ד. $x>2$ או $1<x<0.77$ או $0<x<-0.43$.
ה. $k<0$.
ו. $1<p<13$.

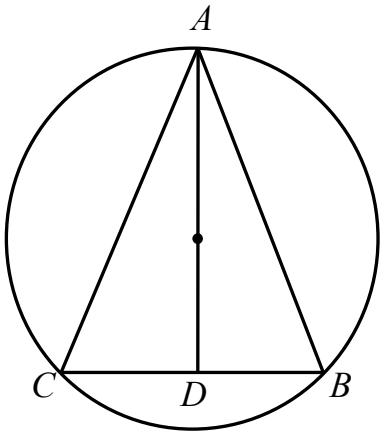


© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 9 - גיאומטריה

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בגיאומטריה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

התרגיל מיועד לפתרון באמצעות גיאומטריה בלבד וללא שימוש בטריגונומטריה.



(**) המשולש שווה השוקיים ΔABC חסום במעגל שמרכזו בנקודה O.
נסמן: $AB = AC = a$, $BC = b$.

א. הבע באמצעות a ו-b את:
1. שטח המעגל.
2. אורך הקטע DO.

ב. נתון שתיכוני המשולש ΔABC נחתכים בנקודה O. חשב את:
1. זוויות המשולש ΔABC.
2. היחס בין שטח המעגל הנתון בשרטוט לבין שטח המעגל החסום במשולש ΔABC.

תשובות: א. 1) $\frac{\pi \cdot a^4}{4a^2 - b^2}$. **2)** $\frac{2a^2 - b^2}{2\sqrt{4a^2 - b^2}}$. **ב.** כולן 60^0. **ג.** 4.

תרגיל אתגר 10 - נוסחת ברנולי

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בהסתברות.
רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) בקבוצת לימוד חמישה תלמידים - חלקם בנים וחלקן בנות. המורה זיו בוחר באקראי תלמיד, קורא לו החוצה ולאחר מכן התלמיד חוזר לתוך הכיתה. זיו עשוי לקרוא לתלמיד מסוים יותר מפעם אחת כי הוא בוחר את התלמידים באקראי בכל פעם מחדש. זיו חוזר על התהליך חמש פעמים ברציפות. ההסתברות להוציא מהכיתה בן בהוצאה יחידה היא p. ההסתברות שסך הכל יוציא החוצה שלושה בנים, גדולה פי 1.5 מההסתברות שסך הכל יוציא החוצה שני בנים.

א. מצא את ערכו של הפרמטר p.

ב. חשב כמה בנות בקבוצת הלימוד.

ג. כאמור, זיו חזר על תהליך ההוצאה האקראית חמש פעמים ברציפות. חשב את ההסתברות ש:

1. רק שניים מהתלמידים שהוצאו היו בנים.
2. לכל הפחות שניים מהתלמידים הם בנים.
3. לכל היותר אחד מהתלמידים שיצאו היתה בת.
4. יצאו לפחות בן אחד ולפחות בת אחת.
5. הראשון שהוצא היה בן, אחריו הוצאו שתי בנות.
6. זיו הוציא בת רק בהוצאה השניה.
7. זיו הוציא בן רק בהוצאה הרביעית.
8. זיו הוציא רק שני בנים, ואחד מהם היה בהוצאה החמישית.
9. זיו הוציא רק שלושה בנים, כאשר הראשון, השלישי והחמישי היו בנים.
10. (המשך של סעיף ג2): ידוע שלכל הפחות שניים מהתלמידים הם בנים. חשב את ההסתברות שרק בת אחת הוצאה מהכיתה.
11. (המשך של סעיף ג3): ידוע שלכל היותר אחד מהתלמידים שיצאו היתה בת. חשב את ההסתברות שכלל לא הוצאה בת.
12. (המשך של סעיף ג4): ידוע שיצאו לפחות בן אחד ולפחות בת אחת. חשב את ההסתברות שיצאה רק בת אחת.

פתרונות:

א. $p = 0.6$.

ב. שתי בנות.

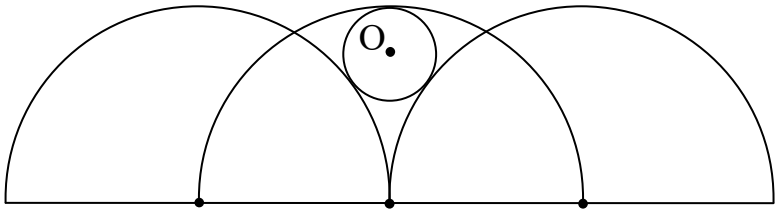
ג. 1) 0.2304 **2)** 0.91296 **3)** 0.33696 **4)** 0.912 **5)** 0.096 **6)** 0.05184 **7)** 0.01536
8) 0.09216 **9)** 0.03456 **10)** 0.2839 **11)** 0.2307 **12)** 0.284

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 11 - גיאומטריה

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בגיאומטריה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

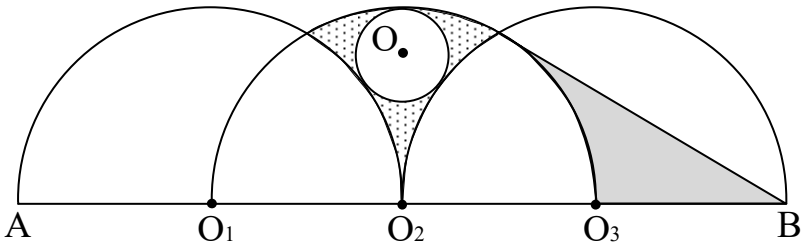
התרגיל מיועד לפתרון באמצעות גיאומטריה בלבד וללא שימוש בטריגונומטריה.



(**) נתונים שלושה חצאי מעגלים בעלי רדיוס שווה שמרכזיהם O_1 , O_2 ו-O_3 נמצאים על הישר AB.
המעגל הקטן שמרכזו O ורדיוסו r כלוא בין הקשתות של שלושת חצאי המעגלים כמתואר בשרטוט.

א. הבע באמצעות r את אורך הרדיוס של חצאי המעגל.

ב. בשרטוט נוסף ישר המחבר בין נקודת החיתוך של הקשתות לבין הנקודה B.
הבע באמצעות r את:
1. השטח האפור.
2. השטח המנוקד.



ג. הבע באמצעות r את היקף הצורה כולה (הקטע AB ושלושת חלקי הקשתות).

תשובות:

א. $4r$.

ב. 1) $8r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=5.48r^2$. **2)** $r^2\left(8\sqrt{3}-\frac{11\pi}{3}\right)=2.34r^2$.

ג. $4r\left(\frac{5\pi}{3}+4\right)=36.94r$

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 12 - שאלת חשיבה המשלבת סדרה חשבונית והסתברות

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בהסתברות ובסדרה חשבונית. רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונה סדרה חשבונית עולה שאיבריה שונים מ-0. ההסתברות לבחור באקראי איבר שלילי מבין כלל איברי הסדרה היא p. ההסתברות לקבל איבר שלילי בשני ניסיונות מתוך חמישה, גדולה פי 2 מההסתברות לקבל איבר שלילי בשלושה ניסיונות מתוך חמישה.

א. מצא את p.

ב. בסדרה זו סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים גדול ב-180 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים. נתון: $a_{24} \cdot a_{25} < 0$. מצאו את הפרש הסדרה.

ג. סכום 20 האיברים מהסדרה שהכי קרובים בערכם ל-0 הוא 10. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ד. חשבו את ההסתברות לבחור באקראי מבין כל איברי הסדרה, איבר כלשהו a_n המקיים $|a_n| < 81$.

ה. דניאל החל לסכום את איברי הסדרה ברצף החל מהאיבר הראשון והלאה עד שעצר באיבר מסוים. ידוע שדניאל סכם יותר מ-12 איברים. חשבו את ההסתברות שהסכום שקיבל היה גדול מ-350.

תשובות:

א. $P = \frac{1}{3}$. **ב.** 5. **ג.** $a_1 = -117$. **ד.** $\frac{4}{9}$. **ה.** $\frac{11}{30}$.

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

תרגיל אתגר 13 - אינטגרלים

מטרת תרגיל זה היא תרגול יסודי של סעיפי חשיבה בנושא אינטגרלים המתלווים לחקירת פונקציה. התרגיל אינו מדמה תרגיל בגרות כי אם הזדמנות לפתח את הטכניקה האלגברית, את החשיבה ואת יכולת הניתוח הגרפי של התלמיד. לאחר ביצוע חקירה סטנדרטית בסעיפים א'-ג', מופיעה סדרת סעיפי חשיבה באינטגרלים.

(**) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(x-2\sqrt{x}\right)^3+8$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן (במידה וקיימות כאלה).
3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים (במידה וקיימות כאלה).

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. שרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום: $0.5\le x$.

ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה-x בתחום: $1\le x\le 4$.

ה. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

1. היעזר בסעיפים ב' ו-ג' ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום: $0.5\le x$.
2. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $h(x)$ לבין ציר ה-x בתחום: $1\le x\le 4$.

ו. מגדירים פונקציה חדשה: $p(x)=\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.

1. הוכח: בתחום $4\le x\le 9$ מתקיים: $0\le p(x)$.
2. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $p(x)$ לבין ציר ה-x והישרים $x=4$ ו: $x=9$.

ז. מגדירים פונקציה חדשה: $m(x)=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$.

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $m(x)$.
2. הוכח: בתחום $1\le x\le 4$ מתקיים: $0\le m(x)$.
3. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $m(x)$ בתחום $1\le x\le 4$.
4. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $m(x)$ לבין ציר ה-x בתחום $1\le x\le 4$.

ח. מגדירים פונקציה חדשה: $g(x)=\sqrt{f'(x)+9}$.

1. היעזר בסעיפים ב' ו-ג' ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $1\le x$.
2. השטח הכלוא בין הפונקציה $g(x)$ לבין הישרים $x=4$, $x=9$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x. בתחום: $1\le x\le 4$. חשבו את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

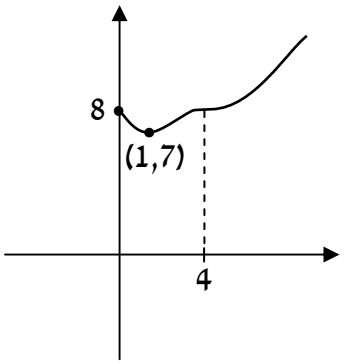
(התשובות בעמוד הבא)

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581

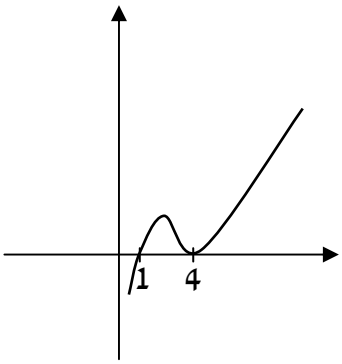
תשובות:

1) א. $x \le 0$. **2.** בקצה התחום : $\max(0,8)$, פנימית : $\min(1,7)$. **3.** $(0,8)$.

ב.

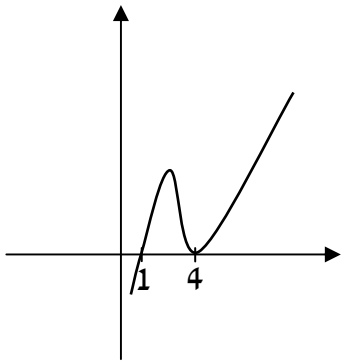


ג.



ד) השטח 1 יח"ר.

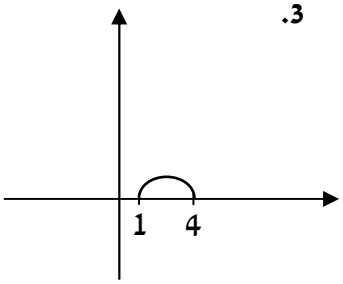
ה) 1.



2. השטח 7.5 יח"ר.

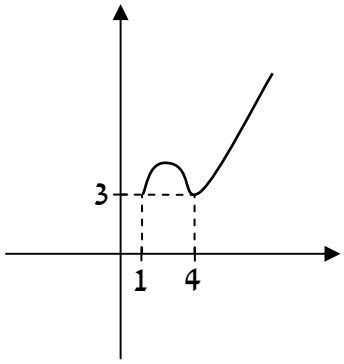
ו) 2. השטח $\frac{27}{280} = 0.096$ יח"ר.

ז) 1. $x > 0$. **3.**



4. השטח $2\sqrt{8} - 2\sqrt{7} = 0.365$ יח"ר.

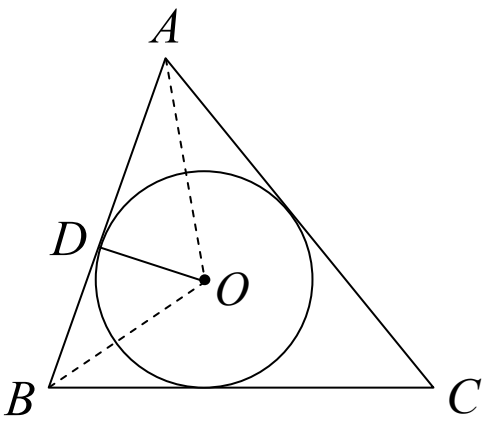
ח) 1.



2. השטח $72\pi = 226.19$ יח' נפח.

תרגיל אתגר 14 - טריגונומטריה

תרגיל זה הוא ברמת קושי <u>גבוהה</u> מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בטריגונומטריה.
רמת קושי זו <u>אינה מאפיינת</u> את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.



(**) מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r חסום במשולש ΔABC
ומשיק לצלע AB בנקודה D. נסמן: $\sphericalangle BOD = \alpha$, $\sphericalangle AOD = \beta$.

א. הוכח: $AB = \frac{r \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

ב. צייר את המעגל <u>החוסם</u> את המשולש ΔABC.
מרכזו של מעגל זה בנקודה O_2 ורדיוסו R.
הוכח: $r = -4R\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)$.

ג. נתון: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{8}{17}$. <u>מבלי למצוא</u> ישירות הזויות α ו- β:

1. קבע איזו מהצלעות - AO או BO - היא ארוכה יותר. נמק.
2. הבע באמצעות r את אורך הצלע AB.
3. הבע באמצעות r את אורך הרדיוס R.

ד. בסעיפים הבאים השתמשו במחשבון ללא הגבלה:

1. הבע באמצעות r את שטח המשולש ΔABO_2.
2. נתון ששטח המשולש ΔABO_2 הוא 4 סמ"ר. מצא את R.
3. (*) חשב את היחס בין אורך הקשת הקצרה $\overset{\frown}{BC}$ לבין אורך הקשת הקצרה $\overset{\frown}{AC}$.
4. (**) חשב את השטח הקטן הכלוא בין הצלע AB לבין המעגל שמרכזו O_2.

(הדרכה: צייר בנפרד את המעגל שמרכזו O_2 ובו את המשולש ΔABO_2 בלבד).

תשובות: ג) 1. $AO = \frac{17}{8}r$ > $BO = \frac{5}{3}r$. **2.** $AB = \frac{77}{24}r = 3.208r$. **3.** $R = 2.09r$.

ד) 1. $2.15r^2$. **2.** 2.85 ס"מ. **3.** $\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{BC}} = 1.313$. **4.** השטח 3.1 סמ"ר.

© כל הזכויות שמורות **לארכימדס - פתרונות למידה** - הכנה לבחינת הבגרות בשאלון 581