

第1問

$$[1] \quad 9a^2 - 6a + 1 = \underline{(3a-1)^2}$$

$$A = \sqrt{(3a-1)^2} + |a+2|$$

$$\textcircled{1} \quad a > \frac{1}{3} \text{ のとき } 3a-1 > 0 \text{ なのて } \sqrt{(3a-1)^2} = 3a-1$$

$$\text{また } a+2 > 0 \text{ なのて } |a+2| = a+2$$

$$\text{よて } A = 3a-1 + a+2 = \underline{4a+1}$$

$$\textcircled{2} \quad -2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき } 3a-1 \leq 0 \text{ なのて } \sqrt{(3a-1)^2} = -(3a-1) \text{ ①と同様に}$$

$$|a+2| = a+2 \text{ よて } A = -(3a-1) + a+2 = \underline{-2a+3}$$

$$\textcircled{3} \quad a < -2 \text{ のとき } -4a-1$$

$$A = 2a+13 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{1} \text{ のとき } 4a+1 = 2a+13$$

$$2a = 12$$

$$a = 6$$

$$a > \frac{1}{3} \text{ を満たす}$$

$$\textcircled{2} \text{ のとき } -2a+3 = 2a+13$$

$$-4a = 10$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

$$-2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ を満たさない}$$

$$\textcircled{3} \text{ のとき } -4a-1 = 2a+13$$

$$-6a = 14$$

$$a = -\frac{7}{3}$$

$$a < -2 \text{ を満たす}$$

$$\underline{a = 6, -\frac{7}{3}}$$

(2) (1) $\bar{p}$: $m \times n$ の少なくとも一方が偶数である かつ m が奇数なら n は偶数 ① m が偶数なら n はどちらでもよい ② //

(2) $p \Rightarrow q$ の真偽 $m \times n$ がともに奇数なら $3mn$ は奇数の積となるので、奇数になる 真

$q \Rightarrow p$ の真偽 $3mn$ が奇数なら、 m も n も奇数でなくてはならない よて 真 必要十分条件 ①

$p \Rightarrow r$ の真偽 $m \times n$ がともに奇数なら、 $5n$ は奇数なので $m+5n$ は奇数の和となる かつ偶数になる 真

$r = p$ の真偽 $m=2, n=4$ だと $m+5n = 2+5 \cdot 4 = 22$ で偶数 (かつ $m \times n$ も偶数 p を満たさない) 偽

$p \Rightarrow r$ ① $r \Rightarrow p$ ② 十分条件であるが〜 ② //

$\bar{p} \Rightarrow t$ の真偽 $m=2, n=1$ だと 「 $m \times n$ の少なくとも一方が偶数である」 を満たすが $m+5n = 2+5 \cdot 1 = 7$ で奇数 r を満たさない 偽

$t \Rightarrow \bar{p}$ の真偽 $m=1, n=3$ だと $m+5n = 1+5 \cdot 3 = 16$ で t を満たすが、 $m \times n$ どちらも奇数なので $\bar{p}$ を満たさない (p を満たすので) 偽

どちらでもない ③ //

[3] (1) 平方完成する

$$Y = \left(x + \frac{2a-b}{2}\right)^2 - \frac{(2a-b)^2}{4} + a^2 + 1 = \left(x + a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-4a^2 + 4ab - b^2 + 4a^2 + 4}{4}$$

$$= \left\{x - \left(\frac{b}{2} - a\right)\right\}^2 + \frac{4ab + 4 - b^2}{4} = \left\{x - \left(\frac{b}{2} - a\right)\right\}^2 - \frac{b^2}{4} + ab + 1$$

$$\left(\frac{b}{2} - a, -\frac{b^2}{4} + ab + 1\right)$$

(2) $x = -1$, $Y = 6$ を代入

$$6 = (-1)^2 + (2a-b)(-1) + a^2 + 1$$

$$1 - 2a + b + a^2 + 1 - 6 = 0$$

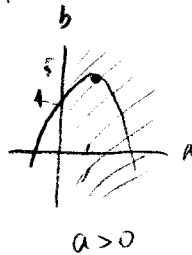
$$b + a^2 - 2a - 4 = 0$$

$$b = -a^2 + 2a + 4$$

$$b = -(a^2 - 2a)^2 + 4$$

$$b = -\{(a-1)^2 - 1\} + 4$$

$$b = -(a-1)^2 + 5$$



最大値 5 となる $a = 1$

$a = 1$, $b = 5$ のとき, G の式は

$$Y = x^2 - 3x + 2$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

x 軸方向 $\frac{3}{2}$ y 軸方向 $-\frac{1}{4}$

第2問 (1) 余弦定理より $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2}$
 $= \frac{9+4-16}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{-3}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$

$\cos \angle BAC < 0$ より 鈍角 ② //

$\sin \angle BAC > 0$ より
 $\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ //

$\angle BAC + \angle CAD = 180^\circ$ なるため

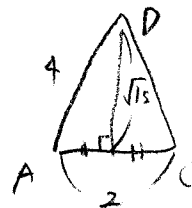
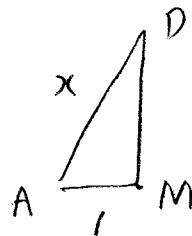
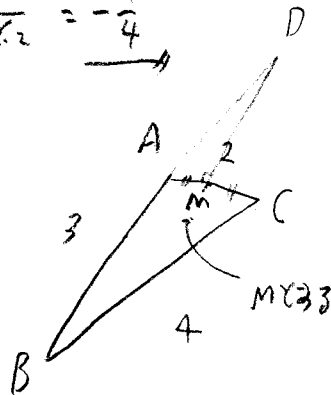
$\cos \angle CAD = \cos (180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle BAC = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ //

$\cos \angle CAD = \frac{1}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow AD = 4$ //

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle BAC \cdot AB \cdot AC$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

$AM = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ より $\Delta ADC = 2 \times \sqrt{15} \times \frac{1}{2}$
 $= \sqrt{15}$

$\Delta DBC = \Delta ABC + \Delta ADC = \frac{3\sqrt{15}}{4} + \sqrt{15} = \frac{7\sqrt{15}}{4}$ //



(2) (1) 2013年の箱ひげ図は、最小値が70と75の間の値であり、70以上75未満の階級に棒グラフが存在するのは③のみ ③ //

(2) (4) 四分位範囲とは箱ひげ図の箱の部分の幅のこと
モジロキョウのは およそ20。15日を超えている。

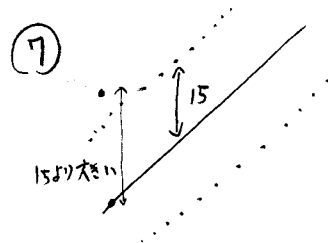


図4より、差が15日より大きい場合が1つだけある

④, ⑦ //

(3) $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均が $\bar{x}$ なので $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow n\bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

よって $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$
平均も $\frac{0}{n} = 0$ ① //

$x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{5} = \frac{1}{5}x_i - \frac{\bar{x}}{5}$ なので、 x' の平均値も $\bar{x}'$ とすれば

$\bar{x}' = \frac{1}{5}\bar{x} - \frac{\bar{x}}{5} = 0$ ① //

x' の標準偏差を s' とすれば $s' = \left| \frac{1}{5} \right| s = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$ ① //

データ全体に同じ変換をほどこしているので、散布図が大きく変わることはない
図4と似ているのは ①と② まずはこの2つに絞られる

x' の平均が0で 標準偏差が1 $\Rightarrow$ 分散は $1^2 = 1$

分散は偏差平方の平均である(定義より)

つまり $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2 = 1$ でも $\bar{x}' = 0$ なので $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i'^2 = 1$

つまり $x_i'^2$ の平均は1ということ。 $x_i'^2$ は1付近の値
したがって x_i' は ± 1 付近の値をとる このとき1を上回ったり -1を
下回ることもある。 ①のように -1から1の範囲におさまることはない よって② //

(1) 赤い袋が選ばれる、7枚3の倍数以外の目が出るのは $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 赤い袋は3個中2個が赤球

$$\text{よて } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

白い袋が選ばれるのは $\frac{1}{3}$ 白い袋は2個中1個が赤球

$$\text{よて } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(2) 1回目白球を取ればよい ① 白い袋から白球 ... $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

② 赤い袋から白球 ... $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

①.②より

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18}$$

(3) ③ 1回目白球で、2回目白球をとる場合 このとき2回目は白い袋からとるので $p \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p$

④ 1回目赤球で、2回目白球をとる場合 このとき2回目は赤い袋からとる。1回目で赤球をとる確率は余事象の関係より $1-p$

$$\text{よて } (1-p) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p$$

$$\text{③.④より } \frac{1}{2}p + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}p\right) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}p + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}$$

$$(2) \text{より } p = \frac{7}{18} \text{ 上記の式に代入 } \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{108} + \frac{36}{108} = \frac{43}{108}$$

⑤ 2回目で白球をとる、3回目で白球をとる場合 3回目は白い袋からとるので $\frac{43}{108} \times \frac{1}{2}$

⑥ 2回目で赤球をとる、3回目で白球をとる場合 2回目で赤球をとる確率は

$$1 - \frac{43}{108} = \frac{65}{108} \quad 3回目は赤い袋からとるので $\frac{65}{108} \times \frac{1}{3}$$$

$$\text{⑤.⑥より } \frac{43}{108} \times \frac{1}{2} + \frac{65}{108} \times \frac{1}{3} = \frac{43}{108} \times \frac{3}{6} + \frac{65}{108} \times \frac{2}{6} = \frac{129+130}{648} = \frac{259}{648}$$

$$(4) \text{ 2回目で白球とる確率 } \frac{43}{108} \quad 2回目に白い袋から白球をとる確率 $\frac{1}{2}p = \frac{7}{36} \quad \frac{\frac{7}{36}}{\frac{43}{108}} = \frac{21}{43}$$$

(2回目で白球をとる...A 2回目で白い袋からとる(1回目で白球をとる)...B とすると
 $P(A) = \frac{43}{108}$, $P(A \cap B) = \frac{n}{36}$ なので $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ の公式に代入

1回目で赤球をとる確率 (2)より $1 - \frac{n}{18} = \frac{11}{18}$ すると2回目は赤い袋からとることになる
 るので、そこで赤球をとる確率は $\frac{2}{3}$ 3回目も赤い袋からとることになるので

そこで白球をとる確率は $\frac{1}{3}$

よって、3回目ではじめて白球をとる確率は $\frac{11}{18} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$

(3)より 3回目ではじめて白球をとる確率は $\frac{259}{648}$

$$\text{求める確率は } \frac{\frac{11}{18} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{259}{648}} = \frac{\frac{11}{18} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \times 3612^4}{259} = \frac{88}{259}$$

(3回目ではじめて白球...A 3回目ではじめて白球...B とすると)
 $P(A) = \frac{259}{648}$ $P(A \cap B) = \frac{88}{259}$ である

第4問 (1) ユークリッドの互除法を用いる

$$\begin{array}{lcl} 49 = 23 \cdot 2 + 3 & & 3 = 49 - 23 \cdot 2 \\ 23 = 3 \cdot 7 + 2 & \rightarrow & 2 = 23 - 3 \cdot 7 \rightarrow 1 = 3 - (23 - 3 \cdot 7) \\ 3 = 2 \cdot 1 + 1 & & 1 = 3 - 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 1 &= 3 - 23 + 3 \cdot 7 = 8 \cdot 3 - 23 \rightarrow 1 = 8(49 - 23 \cdot 2) - 23 \\ &= 8 \cdot 49 - 23 \cdot 16 - 23 \\ 49 \cdot 8 - 23 \cdot 17 &= 1 \quad \underline{x=8, y=17} // \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 49x - 23y = 1 \\ -) 49 \cdot 8 - 23 \cdot 17 = 1 \\ \hline 49(x-8) - 23(y-17) = 0 \\ 49x - 23y \text{ は互いに素} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{よって } x-8 \text{ は } 23 \text{ の倍数} \\ x-8 = 23k \text{ (} k \text{ は整数)} \\ 49 \cdot 23k - 23(y-17) = 0 \\ 49k - y + 17 = 0 \\ y = 49k + 17 \end{array} \right\} \quad \underline{x=23k+8, y=49k+17} //$$

(2) $49x - 23y = -1$ の解 x, y の値を求める

(1) より $49 \cdot 8 - 23 \cdot 17 = 1$ なので $49 \cdot (-8) - 23 \cdot (-17) = -1$

よって $x = -8, y = -17$ は (1) を満たす 上記と同様に (1) を解く

$$x = 23l - 8, y = 49l - 17 \quad (l \text{ は整数})$$

$23l - 8$ が自然数で最小になるのは $l=1$ かつ $23-8=15$ のとき

一方 $49x - 23y = 1$ となる x, y で x が最小になるのは上記より 8

$$8 < 15 \quad \text{より} \quad \underline{x=8, y=17} \quad (A, B) = (49 \times 8, 23 \times 17) //$$

A と B の差の絶対値が 2, かつ $49x - 23y = 2 \dots (2)$ か
 $49x - 23y = -2 \dots (3)$ のどちらかを満たせばよい。

(2) について (1) より $49 \cdot 8 - 23 \cdot 17 = 1$ なので $49 \cdot 16 - 23 \cdot 34 = 2$

(2) を解くと $x = 23k + 16, y = 49k + 34$ x が自然数で最小なとき $x=16$

(3) について同様に $49 \cdot (-16) - 23 \cdot (-34) = -2$ なので $x = 23l - 16, y = 49l - 34$

x が自然数で最小なとき $23-16=7$ $7 < 16$ より $x=7, y=15$
 ($l=1$ のとき)

$$(A, B) = (49 \times 7, 23 \times 15) //$$

(3) a と $a+2$ は連続する奇数か連続する偶数

$a = 2k$, $a+2 = 2k+2 = 2(k+1)$ とすると、 k と $k+1$ の最大公約数は1なので

a と $a+2$ は2以外に共通因数をもたない。よって 2。

(連続する奇数のときに最大公約数が1になる)

$a, a+1, a+2$ のうちどれか1つは必ず3の倍数である

そして少なくとも1つは偶数が含まれる

よって $a(a+1)(a+2)$ は6の倍数であることは確定

よって 6。

イメージ

(1, 2, 3)

(2, 3, 4)

(3, 4, 5)

$a = 2$ のように a が偶数なら 2, 3, 4 のように偶数は2個

(しかもその2つのうち1つは必ず4の倍数になるので

積は $2 \times 4 \times 3 = 24$ 24の倍数。しかしこれは全ての自然数にいえるとはならない

$a = 1$ のように a が奇数なら 1, 2, 3 のように偶数は1個

積は $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ 6の倍数。これは a がどんな自然数でも言える

(4) $\begin{array}{r} 7 \overline{) 6762} \\ 3 \overline{) 966} \\ 2 \overline{) 322} \\ 1 \overline{) 161} \\ 23 \end{array}$ (問題から、7で割れる数、しかも「7回」とさすあたり)
7で2回以上割れるんだろうと推測できる

$$6762 = 2 \times 3 \times 7^2 \times 23$$

① 49の倍数 23の倍数 23の倍数 49の倍数 のように

49の倍数と23の倍数が連続している場合、つまりは2つの差の絶対値が1

(2) より 49の倍数で最小のものは $49 \times 8 = 392$

その次の23の倍数は $23 \times 17 = 391$

$b(b+1)(b+2)$ ができる限り小さくなるようにすると 390, 391, 392 の組み合わせ

② 49の倍数 23の倍数 のように 49の倍数と23の倍数が1つおきの
場合、つまり2つの差の絶対値が2

(2) より 49の倍数で最小のものは $49 \times 7 = 343$

その次の23の倍数は 345、つまり 343, 344, 345 の組み合わせで

$390 > 343$ より 343 //

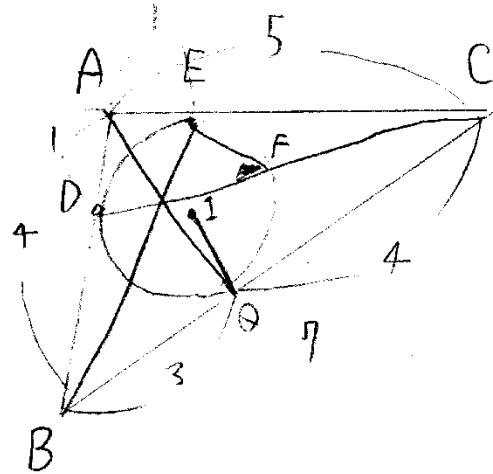
第5問 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \sin \angle BAC \cdot AB \cdot AC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot 4 \cdot 5 = 4\sqrt{6}$$

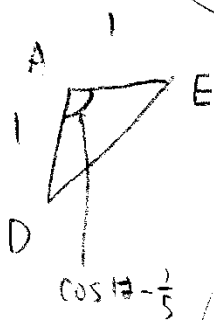
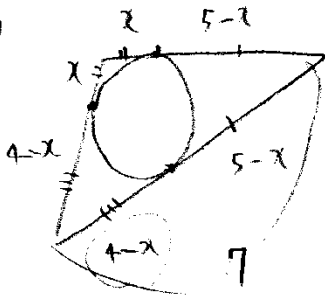
$$4\sqrt{6} = \frac{4r}{2} + \frac{9r}{2} + \frac{5r}{2}$$

$$8\sqrt{6} = 16r \rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



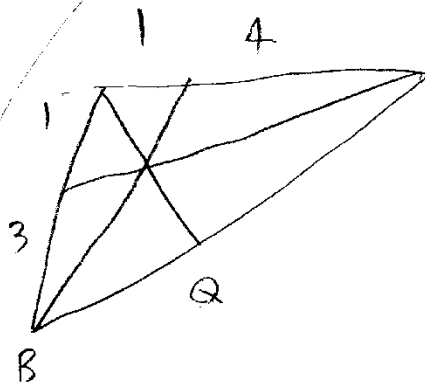
$$(4-x) + (5-x) = 7$$

$$x=1$$



余弦定理より $DE^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

$DE > 0$ より $DE = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$



4点Bの定理より

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{4}{1} = 1$$

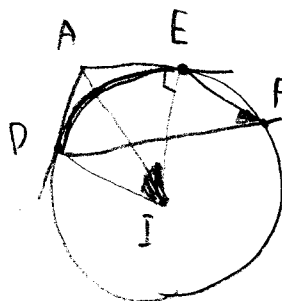
$$\frac{BQ}{QC} = \frac{3}{4}$$

$BQ:QC = 3:4$ ($\angle B = 75^\circ$)

$$BQ = \frac{3}{3+4} \times 7 = \underline{3}$$

$4-x = 4-1 = 3$ より Q は BC の内接円 γ の接点にたつ

よって IQ は内接円の半径である $IQ = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}}$

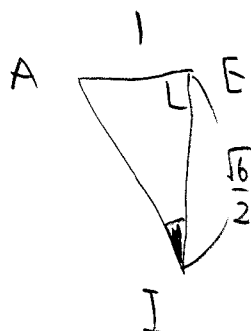


$\angle DFE$ は $\widehat{DE}$ に関する円周角で
 $\widehat{DE}$ に関する中心角である $\angle DIE$ は

$$\angle DIE = 2 \times \angle DFE$$

$$\angle DIA = \angle EIA \text{ より } \angle DIE = 2 \times \angle EIA$$

よって $\angle DFE = \angle EIA$ よって $\cos \angle EIA$ を求めればよい



$$\triangle AEI \text{ において } AI = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\cos \angle EIA = \frac{EI}{AI} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos \angle DEE = \underline{\underline{\frac{\sqrt{15}}{5}}}$$