第1問

(1) $\cos 0 = 1$ $\sin 0 = 0$ $f(0) = 3\cdot 0^2 + 4\cdot 0\cdot 1 - 1^2 = \underline{-1}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{9+4\sqrt{3}-1}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = \underline{2+\sqrt{3}}$

2倍角の公式

(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より $\cos^2\theta = \underline{\frac{\cos 2\theta + 1}{2}}$ — $\boxed{1}$

2倍角の公式

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ — $\boxed{2}$

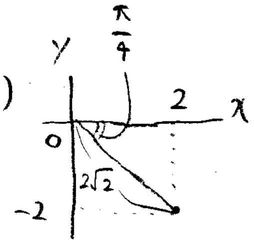
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ — $\boxed{3}$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ より $f(\theta) = 3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

$= \frac{3 - 3\cos 2\theta - \cos 2\theta - 1}{2} + 2\sin 2\theta$

$= \frac{2 - 4\cos 2\theta}{2} + 2\sin 2\theta = \underline{2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 1}$

(3)



$f(\theta) = \underline{2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1}$

$-1 \leqq \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ より

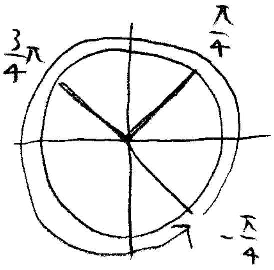
$-2\sqrt{2} \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 2\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} = 1.4$とした)

$-2\sqrt{2}+1 \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 2\sqrt{2} + 1 \fallingdotseq 3.8$

よって $\underline{m = 3}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi$

$f(\theta) = 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 3$ とすると



$\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 図より

$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}, \pi \Rightarrow \underline{\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}}$ //

[2] $x+2>0$ かつ $y+3>0 \Rightarrow x>-2,\ y>-3$ ②

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(y+3)}{2}$$

② は $\log_2(x+2) - 2\cdot\frac{\log_2(y+3)}{2} = -1 \Rightarrow \log_2(x+2) - \log_2(y+3) = -\log_2 2$

$$\Rightarrow \log_2\frac{x+2}{y+3} = \log_2 2^{-1} \Rightarrow \frac{x+2}{y+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x+2) = y+3$$

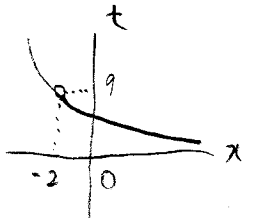
$\Rightarrow y = 2x+1$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\cdot\frac{1}{3} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}t^2$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}t$ よって ③ は

$\frac{1}{3}t^2 - 11\cdot\frac{1}{3}t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 11t + 18 = 0$

$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



$0 < t < 9$

⑤より $(t-2)(t-9) = 0$

$t = 2,\ 9$

⑥より $t = 2$

$\log_3\frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$ の形に合わせるため底を3にする

$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ なので $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \Rightarrow (3^{-1})^x = 2 \Rightarrow 3^{-x} = 2$

$\Rightarrow -x = \log_3 2 \Rightarrow x = -\log_3 2 = \log_3 2^{-1} = \log_3\frac{1}{2}$

$y = 2x+1 = 2\cdot\log_3\frac{1}{2} + \log_3 3 = \log_3\left(\frac{1}{4}\cdot 3\right) = \log_3\frac{3}{4}$

第２問

(1) 極値の性質より $f'(-1)=0$

$f(-1)=2$ より、$(-1)^3+p\cdot(-1)^2+q\cdot(-1)=p-q-1=2 \Rightarrow p-q=3$ — $\boxed{1}$

$f'(-1)=0$ より $f'(x)=3x^2+2px+q$ なので、
$3\cdot(-1)^2+2p\cdot(-1)+q=3-2p+q=0 \Rightarrow -2p+q=-3$ — $\boxed{2}$

$\boxed{1}$、$\boxed{2}$ を連立　$p=0,\ q=-3$

$f(x)=x^3-3x$ となる。$f'(x)=3x^2-3$ で $f'(x)=0$ のとき

$3x^2-3=0 \Rightarrow 3(x+1)(x-1)=0$　　$x=\pm1$ で極値をとる

x	$\cdots$	-1	0	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

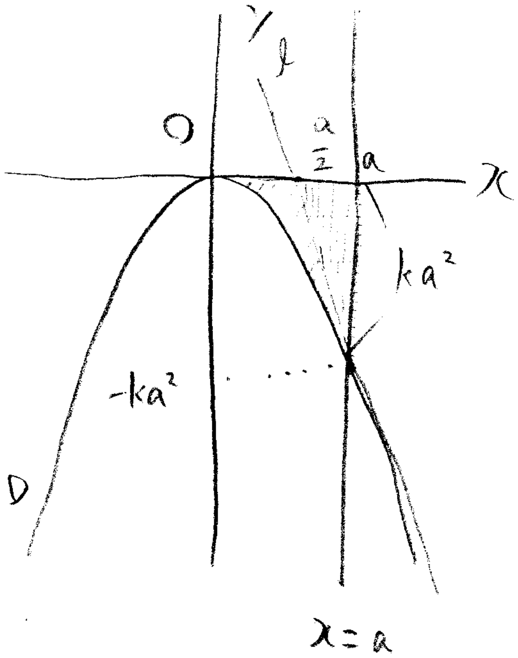
$x=1$ で極小値 -2

接線の方程式の公式
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(2) $D: y=-kx^2$ より　$y'=-2kx$　　$l: y-(-ka^2)=-2ka(x-a)$

$\Rightarrow y=-2kax+2ka^2-ka^2 \Rightarrow y=-2kax+ka^2$

$y=0$ のとき $0=-2kax+ka^2$
$2kax=ka^2$
$x=\dfrac{ka^2}{2ka}=\dfrac{a}{2}$



D、x軸、x=a で囲まれた図形（▨＋▥）

$$\int_0^a -(-kx^2)\,dx=\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^a=\frac{ka^3}{3}$$

x軸の下側に描かれたグラフなので

▥ の部分（三角形）
$\dfrac{a}{2}\cdot ka^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{ka^3}{4}$

$\dfrac{ka^3}{3}-\dfrac{ka^3}{4}=\dfrac{k}{12}a^3$

(3) $A(a, -ka^2)$ で
Cの方程式は $y=x^3-3x$

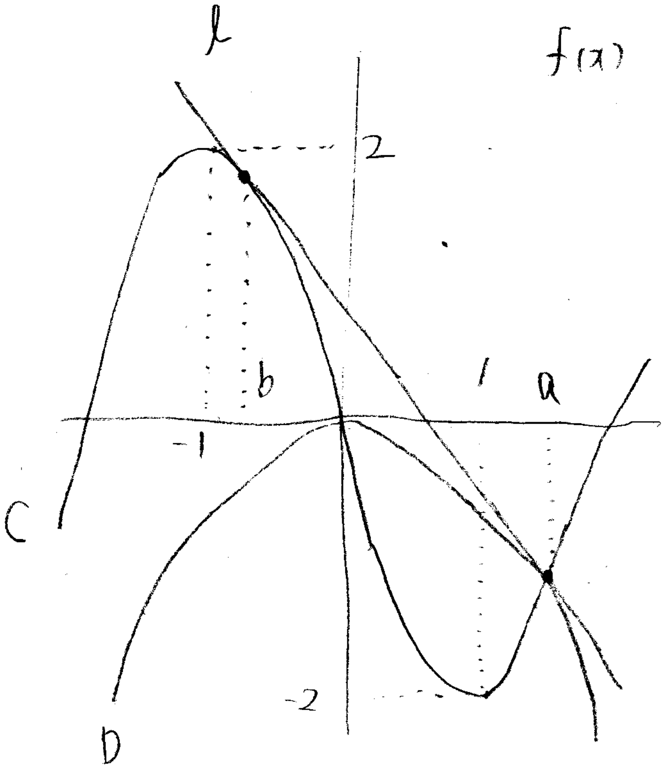
よって $-ka^2=a^3-3a$

$k=-a+\frac{3}{a}$ — $\boxed{1}$

C上の点なので (b, b^3-3b) と表せる $f'(x)=3x^2-3$ より
接線の式は

$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$

$y=3(b^2-1)x-b(3b^2-3)+(b^3-3b)$
$=3(b^2-1)x-3b^3+3b+b^3-3b$
$=3(b^2-1)x-2b^3$



$f(x)-g(x)=x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}$
$=x^3-3x-3(b^2-1)x+2b^3=x^3-3b^2x+2b^3$

$x=b$ のとき 0になるので(因数定理) $x-b$ で割り切れる

$(x-b)(x^2+bx-2b^2)$
$=(x-b)(x-b)(x+2b)$
$=(x-b)^2(x+2b)$

$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -b \to -b \\ 1 & & 2b \to 2b \\ \hline & & b \end{array}$

$\begin{array}{r} x^2+bx-2b^2 \\ x-b \overline{) x^3 \qquad -3b^2x+2b^3} \\ -)\ x^3-bx^2 \qquad\qquad \\ \hline bx^2-3b^2x \qquad \\ bx^2-b^2x \qquad \\ \hline -2b^2x+2b^3 \\ -2b^2x+2b^3 \\ \hline 0 \end{array}$

$f(x)-g(x)=0$ とは、曲線Cと接線 l の交点のx座標を求める方程式なので、$(x-b)^2(x-2b)=0$ のとき $x=b, -2b$
l はDにも $A(a, -ka^2)$ において接するので $-2b=a$ とならなければならない

$\boxed{1}$より

①の傾き　$-2ka = -2a\left(-a+\frac{3}{a}\right) = 2a^2-6$

②の傾き　$b=-\frac{a}{2}$より　$3(b^2-1) = 3\left\{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-1\right\} = 3\left(\frac{a^2}{4}-1\right) = \frac{3}{4}a^2-3$

①と②が一致するので　$2a^2-6 = \frac{3}{4}a^2-3 \Rightarrow 8a^2-24 = 3a^2-12$

$\Rightarrow 5a^2 = 12 \Rightarrow \underline{a^2 = \frac{12}{5}}$

$S = \frac{k}{12}a^3 = \frac{1}{12}\left(-a+\frac{3}{a}\right)\cdot a^3 = \frac{1}{12}(-a^4+3a^2)$

$= \frac{1}{12}\left\{-\left(\frac{12}{5}\right)^2+3\left(\frac{12}{5}\right)\right\} = \frac{1}{12}\left(-\frac{\overset{12}{\cancel{144}}}{25}+\frac{\overset{3}{\cancel{36}}}{5}\right) = -\frac{12}{25}+\frac{15}{25} = \frac{3}{25}$

第3問 (1) $S_2 = 3 + 3\cdot 4 = \underline{15}$ $\quad T_2 = T_1 + S_1 = -1 + 3 = \underline{2}$

(2) $S_n = \dfrac{3(4^n-1)}{4-1} = \underline{4^n - 1}$

$$T_n = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4^k - 1) = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}4^k - \sum_{k=1}^{n-1}1 = -1 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} - (n-1)$$

$$= \frac{-3 + 4^n - 4 - 3n + 3}{3} = \frac{4^n - 3n - 4}{3} = \underline{\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3}}$$

(3) $b_1 = \dfrac{a_1 + 2T_1}{1} = -3 + 2\cdot(-1) = \underline{-5}$

$$T_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3} - (n+1) - \frac{4}{3} \quad \text{―} \boxed{1}$$

T_{n+1}とT_nの関係式を連立

$T_n = \dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}$ より $4T_n = \dfrac{4^{n+1}}{3} - 4n - \dfrac{16}{3} \Rightarrow \dfrac{4^{n+1}}{3} = 4T_n + 4n + \dfrac{16}{3}$ ―$\boxed{2}$

$\boxed{1}$ に $\boxed{2}$ を代入 $\quad T_{n+1} = 4T_n + 4n + \dfrac{16}{3} - (n+1) - \dfrac{4}{3}$

$$\underline{T_{n+1} = 4T_n + 3n + 3}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + 2T_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left\{a_{n+1} + 2(4T_n + 3n + 3)\right\} = \frac{1}{n+1}(a_{n+1} + 8T_n + 6n + 6)$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}(na_{n+1} + 8nT_n + 6n^2 + 6n)$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left\{4(n+1)a_n + 8T_n + 8nT_n + 6n^2 + 6n\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left\{4(n+1)a_n + (8n+8)T_n + 6n(n+1)\right\}$$

$$= \frac{4\cancel{(n+1)}a_n + 8\cancel{(n+1)}T_n}{n\cancel{(n+1)}} + \frac{6n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{4a_n + 8T_n}{n} + 6$$

$$= 4\left(\frac{a_n + 2T_n}{n}\right) + 6 = \underline{4b_n + 6}$$

$b_{n+1}=4b_n+6$ において　$c=4c+6$ とすると　$c=-2$ なので

$(b_{n+1}+2)=4(b_n+2)$　　$b_1+2=-5+2=-3$ より

$\{b_n+2\}$ は初項 -3　公比 4 の等比数列　$b_n+2=-3\cdot 4^{n-1}$

$$b_n=\underline{-3\cdot 4^{n-1}-2}\ /\!/$$

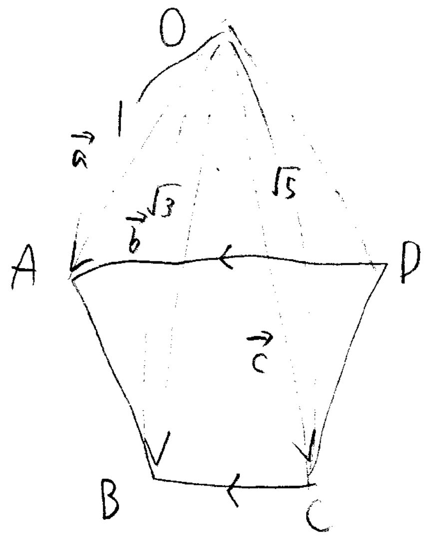
$$b_n=\frac{a_n+2T_n}{n} \Rightarrow a_n=nb_n-2T_n=n\cdot(-3\cdot 4^{n-1}-2)-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)$$

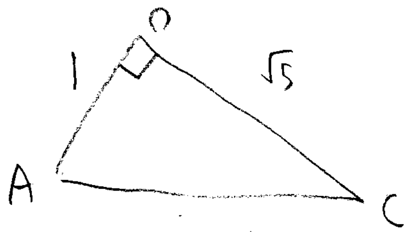
$$=-3n\cdot 4^{n-1}-2n-2\cdot\frac{4^n-3n-4}{3}=\frac{-9n\cdot 4^{n-1}-6n-2\cdot 4^n+6n+8}{3}$$

$$=\frac{-9n\cdot 4^{n-1}-2\cdot 4\cdot 4^{n-1}+8}{3}=\frac{(-9n-8)4^{n-1}+8}{3}=\underline{\frac{-(9n+8)4^{n-1}+8}{3}}\ /\!/$$

第4問

(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より $\vec{a}\perp\vec{c}$ よって $\underline{90^\circ}$





$1\times\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

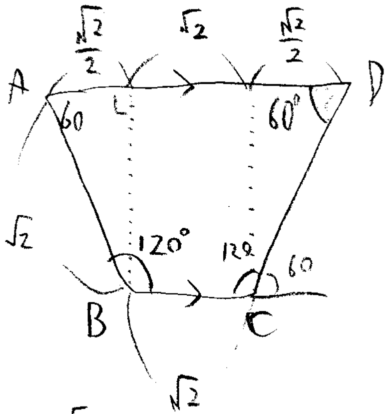
(2) $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$=0-1-3+(\sqrt{3})^2=\underline{-1}$

$|\vec{BA}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{1^2-2\cdot1+(\sqrt{3})^2}=\underline{\sqrt{2}}$

$|\vec{BC}|=|\vec{c}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\cdot3+(\sqrt{3})^2}=\underline{\sqrt{2}}$

$\cos\angle ABC=\dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$ よって $\angle ABC=\underline{120^\circ}$



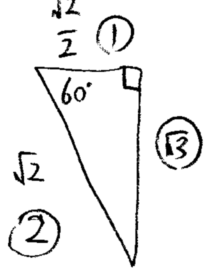
$\angle ADC=\underline{60^\circ}$

$AD=\sqrt{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\underline{\vec{AD}=2\vec{BC}}$

$\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{AD}=\vec{OA}+2\vec{BC}=\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})$

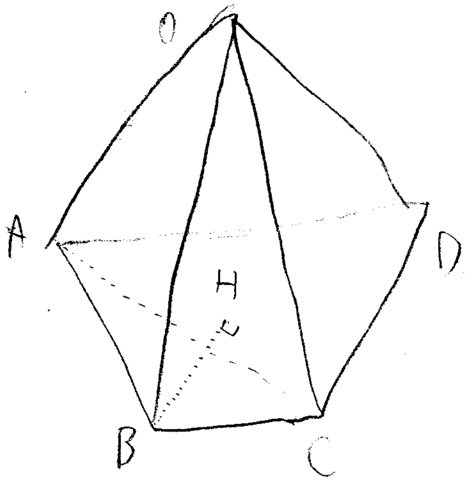
$=\underline{\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}}$



(台形の高さ) $=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$ABCD=(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$

$=\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$



(3) $\overrightarrow{BH}\perp\vec{a}$, $\overrightarrow{BH}\perp\vec{c}$ より

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=0$, $\overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=0$

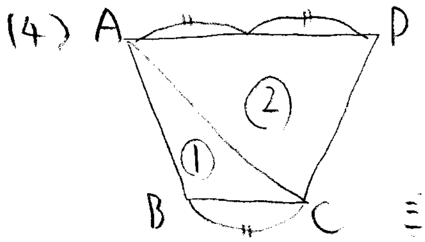
$$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=(\overrightarrow{OH}-\vec{b})\cdot\vec{a}=(s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{a}$$
$$=s|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}=s\cdot1^2-1+t\cdot0=s-1=0$$
$$s=1$$

$$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=(s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}=s\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=s\cdot0-3+t\cdot(\sqrt{5})^2$$
$$=5t-3=0 \Rightarrow t=\frac{3}{5}$$

$$|\overrightarrow{BH}|=\sqrt{\left|\vec{a}-\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right|^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{9}{25}|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot\frac{3}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}+2\cdot\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{c}}$$
$$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+\frac{9}{25}\cdot(\sqrt{5})^2-2\cdot1-\frac{6}{5}\cdot3+0}=\sqrt{1+3+\frac{9}{5}-2-\frac{18}{5}}$$
$$=\sqrt{2-\frac{9}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(1)より $\triangle OAC=\frac{\sqrt{5}}{2}$ より $V=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(4)



$\triangle ABC$と$\triangle ACD$の面積比は$1:2$
よって$\triangle ABC$とABCDとの面積比は$1:3$

三角錐O-ABCと四角錐O-ABCDの体積比は、高さは同じことから $1:3$

よって O-ABCD $=3V$　　(2)より ABCD $=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

求める高さをhとすると $3V=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times h\times\frac{1}{3} \Rightarrow \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}h \Rightarrow \sqrt{3}h=1$

$\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{3}$