تمارين محلولة:الدوال الأسية

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية الجهة الشرقية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: ليكن a عددا حقيقيا, و b عددا من $\mathbb{R}^{*+}$ بسط ما يلي :

$$B=\frac{\left(e^{a}\right)^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}} \quad \text{و} \quad A=e^{\ln(b)}-\ln\left(2e^{b}\right)-\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

نضع: $f(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}$ أحسب $f(2\ln 3)$

أجوبة :

$$A=e^{\ln(b)}-\ln\left(2e^{b}\right)-\ln\left(\frac{e}{2}\right)=b-\ln 2-\ln\left(e^{b}\right)-\ln e+\ln 2$$

$$A=b-\ln 2-b-1+\ln 2=-1$$

$$B=\frac{\left(e^{a}\right)^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}}=\frac{e^{5a}\times e^{3-a}}{e^{2\left(1+\frac{3}{2}a\right)}}=\frac{e^{5a+3-a}}{e^{2+3a}}$$

$$B=\frac{e^{4a+3}}{e^{2+3a}}=e^{4a+3-2-3a}=e^{a+1}$$

$$f(2\ln 3)=e^{2\ln 3}-2e^{\frac{2\ln 3}{2}}=e^{\ln 3^{2}}-2e^{\ln 3}=3^{2}-2\times 3=3$$

تمرين2: بسط ما يلي: $A=e^{-x}\times e^{2x}$

$$C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x} \quad B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4} \ ,$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right) \ , \ D=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}}$$

أجوبة : $A=e^{-x}\times e^{2x}=e^{-x+2x}=e^{x}$

$$B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4}=e^{2(2-x)}\times e^{3x-4}=e^{4-2x+3x-4}=e^{x}$$

$$C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}=\left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^{2x\times\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^{x}\times e^{-x}=e^{x+(-x)}=e^{0}=1$$

$$D=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}}=\frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}}=\frac{e^{5x}}{e^{4x}}=e^{5x-4x}=e^{x}$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right)$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)$$

$$E=e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2x}+e^{2x}+e^{-2x}\right)=e^{2x}\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)$$

$$E=2e^{4x}+2$$

تمرين3: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$$g(x)=\frac{3x-1}{\left(e^{x}\right)^{2}-1} \quad \text{و} \quad f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^{2}-2x}}$$

أجوبة : $f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^{2}-2x}}$

$$D_{f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^{2}-2x\neq 0\right\}$$

$x^{2}-2x=0$ يعني $x(x-2)=0$ يعني $x=0$ أو $x-2=0$

يعني $x=0$ أو $x=2$ ومنه : $D_{f}=\mathbb{R}-\{0,2\}$

$$g(x)=\frac{3x-1}{\left(e^{x}\right)^{2}-1}$$

$$D_{g}=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(e^{x}\right)^{2}-1\neq 0\right\}$$

$\left(e^{x}\right)^{2}-1=0$ يعني $\left(e^{x}\right)^{2}-1^{2}=0$

يعني $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)=0$ يعني $e^{x}+1=0$ او $e^{x}-1=0$

يعني $e^{x}=-1$ او $e^{x}=1$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\, e^{x}>0$ اذن المعادلة :

$e^{x}=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$e^{x}=1$ يعني $x=\ln 1$ يعني $x=0$ ومنه : $D_{g}=\mathbb{R}-\{0\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1 $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ (2 $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$ (3 $e^{2x}-5e^{x}+6=0$

أجوبة: (1 $e^{1-x}\times e^{2x}=e \Leftrightarrow e^{2x+1-x}=e^{1}$

$\Leftrightarrow e^{x+1}=e^{1} \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

ومنه : $S=\{0\}$

(2 $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1} \Leftrightarrow (2-x)-(1+2x)=x-1$

$\Leftrightarrow 2-x-1-2x=x-1 \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(3 $e^{2x}-5e^{x}+6=0 \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-5e^{x}+6=0$

نضع : $e^{x}=X$ والمعادلة تصبح : $X^{2}-5X+6=0$

$$\Delta=b^{2}-4ac=25-24=1>0$$

بما أن $\Delta>0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_{1}=\frac{5+1}{2\times 1}$ و $X_{2}=\frac{5-1}{2\times 1}$ يعني $X_{1}=3$ و $X_{2}=2$

يعني $e^{x_{1}}=3$ و $e^{x_{2}}=2$ يعني $x_{1}=\ln 3$ و $x_{2}=\ln 2$

ومنه : $S=\{\ln 2,\ln 3\}$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(1 $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\frac{1}{e^{x}}$ (2 $\frac{1}{e^{x+1}}\ge e^{1-x^{2}}$

أجوبة (1: $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\frac{1}{e^{x}} \Leftrightarrow e^{-3-x+1+2x}>e^{-x}$

$\Leftrightarrow -3-x+1+2x>-x \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1$

ومنه : $S=]1,+\infty[$

(2 $e^{-1-x}\ge e^{1-x^{2}} \Leftrightarrow -1-x\ge 1-x^{2} \Leftrightarrow x^{2}-x-2\ge 0$

$\Delta=b^{2}-4ac=1+8=9>0$

اذن تقبل جذرين هما:

$x_1=\frac{1+3}{2\times1}$ و $x_2=\frac{1-3}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

ومنه : $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$

تمرين6: حل في $\mathbb{R}^{2}$ النظمات التالية:

(1 $(S_1)\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ e^{x}+e^{y}=3\end{cases}$ (2 $(S_2)\begin{cases}e^{x}e^{y}=10\\ \frac{e^{x}}{e^{y}}=\frac{2}{5}\end{cases}$

أجوبة (1 : $(S_1)\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ e^{x}+e^{y}=3\end{cases}$

$\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ e^{x}+e^{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ -2e^{x}-2e^{y}=-6\end{cases}$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$2e^{x}+3e^{y}-2e^{x}-2e^{y}=8-6$ يعني $e^{y}=2$

يعني $y=\ln 2$

وبعويض y بقيمتها في المعادلة 2 نجد : $e^{x}+e^{\ln 2}=3$

يعني $e^{x}+2=3$ يعني $e^{x}=1$ يعني $x=\ln 1=0$

ومنه : $S=\{(0,\ln 2)\}$

(2 $(S_2)\begin{cases}e^{x}e^{y}=10\\ \frac{e^{x}}{e^{y}}=\frac{2}{5}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}e^{x+y}=10\\ e^{x-y}=\frac{2}{5}\end{cases}$

يعني $\begin{cases}x+y=\ln(10)\\ x-y=\ln\left(\frac{2}{5}\right)\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x+y=\ln(2\times5)\\ x-y=\ln\left(\frac{2}{5}\right)\end{cases}$

يعني $\begin{cases}x+y=\ln 2+\ln 5\\ x-y=\ln 2-\ln 5\end{cases}$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد : $2x=2\ln 2$

يعني $x=\ln 2$

وبعويض x بقيمتها في المعادلة 1 نجد :

$\ln 2+y=\ln 2+\ln 5$

يعني $y=\ln 5$ ومنه : $S=\{(\ln 2,\ln 5)\}$

تمرين7: أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3}{x}$

(3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3x}{x^{3}}$

أجوبة : 1)

لدينا. $(\forall x\in\mathbb{R});(2x-1)e^{x}=2\left(xe^{x}\right)-e^{x}$

و بما أن: $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ فان

$\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}=0$

2) لدينا. $(\forall x\in\mathbb{R}^{*});\frac{e^{x}+3}{x}=\frac{e^{x}}{x}+\frac{3}{x}$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ فان: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3}{x}=+\infty$

.

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^{*});\frac{e^{x}+3x}{x^{3}}=\frac{e^{x}}{x^{3}}+\frac{3}{x^{2}}$

بما أن. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^{2}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}=+\infty$ فان: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3x}{x^{3}}$

تمرين8: أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية: $\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0^{+}$

(1 $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}+2}$ (2 $\lim_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ (3 $\lim_{x\to+\infty}e^{-x+1}$

(4 $\lim_{x\to-\infty}e^{x}+e^{-x}$ (5 $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^{3}+5}}$ (6 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

(7 $\lim_{x\to+\infty}2x-e^{x}$ (8 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{x^{2}}$ (9 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}+3x}$

(10 $\lim_{x\to+\infty}3x^{3}-e^{x}$ (11 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+3x}{x^{3}}$

(12 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^{3}}$ (ضع $2x=X$) (13 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}$ (14

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^{3}+x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0^{-}$ و $\lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$

(15 $\lim_{x\to-\infty}(3x-1)e^{x}$ (16 $\lim_{x\to-\infty}\left(x^{5}-4x^{3}\right)e^{x}$ (17

(18 $\lim_{x\to0^{-}}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x\to-\infty}\left(x^{3}-2x\right)e^{2x}$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

(19 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$ (20 $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

(21 $\lim_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$ (22 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ (23 $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

(استعمال المشتقة)

أجوبة : (1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+2}=\dfrac{0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+1=+\infty$ اذن :

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty$$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+1=-\infty$ اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x+1}=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ اذن :

$$\lim_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}=+\infty$$

(5 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x^3+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}=e^0=1$

(6 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

(7 $$\lim_{x\to+\infty}2x-e^x=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\dfrac{e^x}{x}=-\infty$

(8 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x^2}=0$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

(9 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{3}{x}}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}=1$ اذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}=+\infty$$

(10 $$\lim_{x\to+\infty}3x^3-e^x=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(3-\frac{e^x}{x^3}\right)$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to+\infty}3-\dfrac{e^x}{x^3}=-\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3-e^x=-\infty$

(11 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{3x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{3}{x^2}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$

(12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x=X$)

نضع $2x=X$ يعني $x=\dfrac{X}{2}$

$$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3}=\lim_{X\to+\infty}8\frac{e^X}{X^3}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X^3}=+\infty$ اذن : $\lim\limits_{X\to+\infty}8\dfrac{e^X}{X^3}=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}=+\infty$

(13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}$ نضع $3x=X$ يعني $x=\dfrac{X}{3}$

$$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{\frac{X}{3}}=\lim_{X\to+\infty}3\frac{e^X}{X}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ اذن : $\lim\limits_{X\to+\infty}3\dfrac{e^X}{X}=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}=+\infty$

(14 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

نعلم حسب سؤال سابق أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}=+\infty$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=1$$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3+x+1}=+\infty$

(15 $$\lim_{x\to-\infty}(3x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}3xe^x-e^x$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ اذن :

$$\lim_{x\to-\infty}(3x-1)e^x=0$$

(16 $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x=\lim_{x\to-\infty}x^5e^x-4x^3e^x$$

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$:اذن

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x=0-0=0$$

17) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

نضع $\frac{1}{x}=X$ $\quad X\to -\infty \Leftrightarrow x\to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to -\infty}Xe^X=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$

18)

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}=\lim_{x\to -\infty}x^3e^{2x}-2xe^{2x}=0-2\times 0=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to -\infty}x^ne^x=0$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

نضع $2x=X$ يعني $x=\frac{X}{2}$ و $X\to 0\Leftrightarrow x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{3\frac{X}{2}}=\lim_{X\to 0}\frac{2}{3}\frac{e^X-1}{X}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

لأن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

20) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ نضع $\frac{1}{x}=X$ اذن : $x=\frac{1}{X}$

$X\to 0\Leftrightarrow x\to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{X\to 0}\frac{1}{X}\left(e^X-1\right)=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$$

21) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$

نضع $1-x=X$ يعني $x=1-X$ و $X\to 0\Leftrightarrow x\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim_{X\to 0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$$

لأن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

نضع $-x=X$ يعني $x=-X$ و $X\to 0\Leftrightarrow x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim\limits_{X\to 0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$ **لأن :**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$ (استعمال المشتقة)

نضع : $f(x)=e^{x+1}$ اذن : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

و $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ اذن : $f'(0)=e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$$

تمرين9: لنحسب مشتقة الدالة. $f:x\mapsto e^{x^2-x}$

الجواب : لدينا الدالة $u:x\mapsto x^2-x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\left(x^2-x\right)'e^{x^2-x}$

$(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$

تمرين10: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية: 1) $f(x)=e^{3x}+e^x$

2) $f(x)=2x-e^{-x}$ 3) $f(x)=x^2e^{-x}$ 4) $f(x)=(2x-1)\left(e^x-1\right)$

5) $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$ 6) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$ 7) $f(x)=e^{x\ln x}$

8) $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$ 9) $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

أجوبة: 1) $f(x)=e^{3x}+e^x$ اذن: $f'(x)=\left(e^{3x}+e^x\right)'$

$$f'(x)=\left(e^{3x}\right)'+\left(e^x\right)'=(3x)'e^{3x}+e^x=3e^{3x}+e^x$$

2) $f(x)=2x-e^{-x}$

$$f'(x)=\left(2x-e^{-x}\right)'=(2x)'-\left(e^{-x}\right)'=2-(-x)'e^{-x}=2+e^{-x}$$

3) $f(x)=x^2e^{-x}$

$$f'(x)=\left(x^2e^{-x}\right)'=\left(x^2\right)'e^{-x}+x^2\left(e^{-x}\right)'=2xe^{-x}+x^2\times(-x)'e^{-x}$$

$$f'(x)=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$$

4) $f(x)=(2x-1)\left(e^x-1\right)$

$$f'(x)=\left((2x-1)\left(e^x-1\right)\right)'=(2x-1)'\left(e^x-1\right)+(2x-1)\left(e^x-1\right)'$$

$$f'(x)=2\left(e^x-1\right)+(2x-1)e^x=2e^x-2+2xe^x-e^x=e^x-2+2xe^x$$

5) $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$

$$f'(x)=\left((x-1)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=\left((x-1)\right)'e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=1e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+(x-1)\frac{1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2}\right)$$

6) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{e^{2x}-e^x}\right)'=\frac{\left(e^{2x}-e^x\right)'}{2\sqrt{e^{2x}-e^x}}=\frac{2e^{2x}-e^x}{2\sqrt{e^{2x}-e^x}}$$

7) $f(x)=e^{x\ln x}$

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=(x\ln x)'e^{x\ln x}=\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)e^{x\ln x}$$

$$f'(x)=\left(1\ln x+x\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}=(\ln x+1)e^{x\ln x}$$

8) $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

$$f'(x)=\left(\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}\right)'=\left(\left(e^x-4\right)\right)'\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{\left(e^x-1\right)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x\left(e^x-1\right)+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

(9 $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$$f'(x)=\left(\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'=\left(\frac{2}{(x-1)^2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'$$

$$f'(x)=\left(2(x-1)^{-2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x)=-4(x-1)^{-3}\left((x-1)\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{-4}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^4}\right)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

<u>تمرين11</u>: حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I

1. $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$
2. $I=\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$
3. $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$
4. $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin x e^{\cos x}$
5. $I=\left]0;+\infty\right[\ f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

<u>أجوبة: (1</u> $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

$$f(x)=2e^{3x}-e^{-x}=\frac{2}{3}(3x)'e^{3x}+(-x)'e^{-x}$$

اذن : $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}+e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(2 $I=\left]0;+\infty\right[;\ f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

اذن : $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2x}-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(3 $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$

$$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$$

اذن : $F(x)=\frac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\frac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(4 $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin x e^{\cos x}$

$$f(x)=\sin x e^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$$

اذن : $F(x)=e^{\cos x}$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(5 $I=\left]0;+\infty\right[\ f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$$

اذن : $F(x)=\ln\left|e^x-x\right|$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

<u>تمرين12</u>: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=e^{2x}-2e^x$$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
2. حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

<u>أجوبة: (1</u> $f(x)=e^{2x}-2e^x$

$$D_f=\mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-2e^x=0$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-2\right)=+\infty$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$$f'(x)=\left(e^{2x}-2e^x\right)'=2e^{2x}-2e^x=2e^x\left(e^x-1\right)$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة e^x-1

$$x>0\Leftrightarrow x>\ln 1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$$

اذن : $x>0\Leftrightarrow e^x-1>0$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

<u>(2</u> $f(x)=e^{2x}-2e^x$

$$f(x)=e^{2x}-2e^x=\frac{1}{2}(2x)'e^{2x}-2\left(e^x\right)'$$

اذن : $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

<u>تمرين13</u>: أحسب $f'(x)$ في الحالات الأتية على المجال I

1. $f(x)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}};I=\left]0;+\infty\right[$
3. $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1};I=\mathbb{R}$

<u>أجوبة: (1</u> $f(x)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(e^{x^2-3x}\right)'=\left(x^2-3x\right)'e^{x^2-3x}=(2x-3)e^{x^2-3x}$$

(2 $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}};I=\left]0;+\infty\right[$

$$f'(x)=\left((x-1)e^{\frac{1}{x}}\right)'=(x-1)'e^{\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=1e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}(x-1)\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

(3 $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1};I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=1-\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

تمرين14: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات الآتية:

(1 $2^{x+1}=8^x$ (2 $3^x=12$ (3 $5\times2^x+2^{x+1}-336=0$

(4 $2^{x-1}>4^x$ (5 $(0,5)^{2x}\geq(0,5)^{x+1}$

أجوبة (1: $2^{x+1}=8^x$ يعني $2^{x+1}=\left(2^3\right)^x$ يعني $2^{x+1}=2^{3x}$

يعني $x+1=3x$ يعني $1=2x$ يعني $\frac{1}{2}=x$ ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(2 $3^x=12$ يعني $x=\log_3 12$ ومنه : $S=\{\log_3 12\}$

(3 $2^x-3\times2^{x+1}-16=0$ يعني $2^x-3\times2^1\times2^x-16=0$

نضع : $2^x=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-6X-16=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2+4\times1\times16=100>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{6+10}{2\times1}=8$ و $X_2=\frac{6-10}{2\times1}=-2$ يعني $X_1=8$ و $X_2=-2$

$2^x=8$ و $2^x=-2$ يعني $x_1=\log_2 8$ و $2^x=-2$ ليس لها حل

$x_1=\log_2 8$ يعني $x_1=\log_2 2^3=3\log_2 2=3\times1=3$

ومنه : $S=\{3\}$

(4 $2^{x-1}>4^x$ يعني $2^{x-1}>\left(2^2\right)^x$ يعني $2^{x-1}>2^{2x}$

يعني $x-1>2x$ يعني $-1>x$

ومنه : $S=]-\infty,-1[$

(5 $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1}$ يعني $2x<x+1$ لأن : $0<0,5<1$

يعني $x<1$ ومنه $S=]-\infty,1[$

تمرين15: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $100^x+40=14\times10^x$

الجواب : $100^x+40=14\times10^x$ يعني

$\left(10^2\right)^x-14\times10^x+40=0$

يعني $10^{2x}-14\times10^x+40=0$ يعني

$\left(10^x\right)^2-14\times10^x+40=0$

نضع : $10^x=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-14X+40=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times40=36>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{14+6}{2\times1}$ و $X_2=\frac{14-6}{2\times1}$ يعني $X_1=10$ و $X_2=4$

يعني $10^{x_1}=10$ و $10^{x_2}=4$ يعني $x_1=1$ و $x_2=\log_{10}4$

ومنه : $S=\{1,\log_{10}4\}$

تمرين16: لتكن f الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$f(x)=(x-1)e^x$

1. حدد D_f أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
4. أدرس تقعر (C)
5. أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}xe^x-e^x=0$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

مبيانيا : $y=0$ مقارب ل(C)بجوار $-\infty$

(2 $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'$

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة x

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x \quad (3$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا

في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(4 دراسة تقعر (C)

نحسب : $f''(x)=\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x(1+x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $x+1$

$x+1=0$ يعني $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

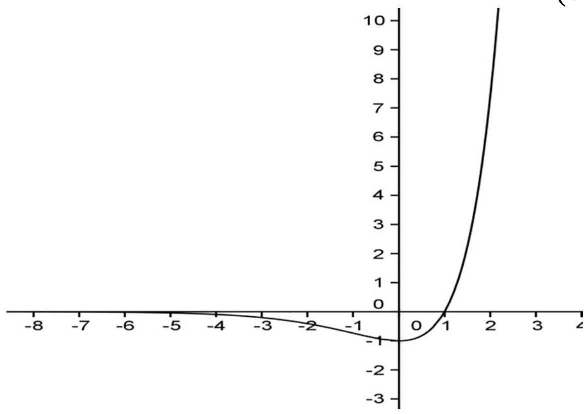
ومنه

- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-1;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على المجال: $]-\infty,-1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

النقطة : $A(-1,-2e^{-1})$ نقطة انعطاف ل (C_f)

(5



تمرين17: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة المعرفة كالتالي: $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. حدد تغيرات f و أعط جدول التغيرات
3. تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$
4. حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي)

أجوبة 1): $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^x+1\neq 0\}$

$e^x+1=0$ يعني $e^x=-1$ ليس لها حل لأن : $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=3$

$$(2\quad f'(x)=\left(x-1+\frac{3}{e^x+1}\right)'=1-3\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1-3\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2+2e^x+1-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2-e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

اشارة : $f'(x)$ هي اشارة $\left(e^x\right)^2-e^x+1$

نضع : $e^x=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-X+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

اذن هذه المعادلة ليس لها حل ومنه اشارتها هي اشارة 1 ومنه :

$$\left(e^x\right)^2-e^x+1>0$$

ومنه : $f'(x)>0$ جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3)نتحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

$$f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}=x+2-3+\frac{3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2+\frac{-3\left(e^x+1\right)+3}{e^x+1}=x+2+\frac{-3e^x-3+3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) نعلم أن : $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$ يعني $f(x)-(x-1)=\dfrac{3}{e^x+1}$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=0$ ومنه :

$(\Delta)\ y=x-1$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا : $f(x)-(x-1)=\dfrac{3}{e^x+1}>0$ اذن (C_f) فوق $(\Delta)\ y=x-1$

نعلم أن : $f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$ يعني

$$f(x)-(x+2)=-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

اذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{3e^x}{e^x+1}=0$ ومنه :

$(D)\ y=x+2$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$

لدينا : $f(x)-(x+2)=-\dfrac{3e^x}{e^x+1}<0$ اذن (C_f) تحت $(D)\ y=x+2$

تمرين18: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$$

1. أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
4. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$
5. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
7. أحسب $f(2\ln 2)$ ثم أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1): $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

(2 $\frac{f(x)}{x}=\frac{(e^x-4)\sqrt{e^x-1}}{x}=\frac{(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{(e^x-4)(e^x-1)}{x\sqrt{e^x-1}}=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$$

(3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0^+}e^x-4=-3$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{e^x-1}=0^+$

اذن : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$

مبيانيا منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النفطة $A(0;f(0))$: وموجه نحو الأسفل

4)بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\frac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$$f'(x)=\left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)'=(e^x-4)'\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\frac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\frac{e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^x(e^x-1)+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

5)اشارة $f'(x)$ هي اشارة e^x-2 لأن : $\frac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}}>0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$

$e^x-2>0$ يعني $e^x>2$ يعني $x>\ln2$

$$f(\ln2)=\left(e^{\ln2}-4\right)\sqrt{e^{\ln2}-1}=(2-4)\sqrt{2-1}=-2$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-2	↗ $+\infty$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و

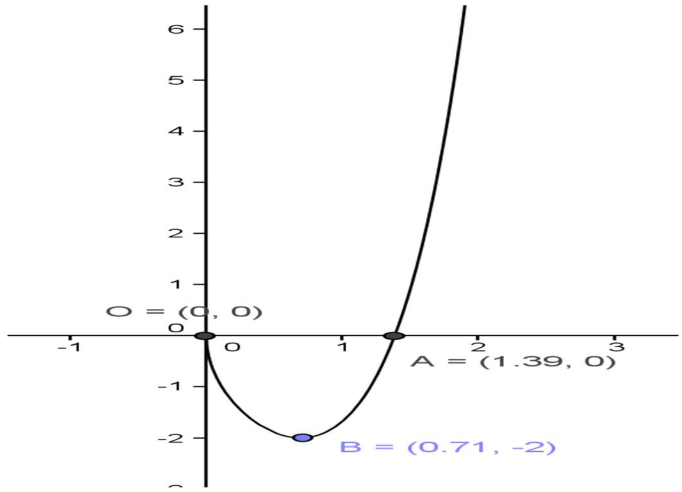
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(7 $f(\ln2)=\left(e^{2\ln2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln2}-1}$

$$f(\ln2)=\left(e^{\ln4}-4\right)\sqrt{e^{\ln4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$$



تمرين19: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1.حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f

2.أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها

3.بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

4.حدد $f^{-1}(x)$ $\quad \forall x\in J$

أجوبة : $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\right\}$$

$1-e^{2x}>0$ يعني $1>e^{2x}$ يعني $e^0>e^{2x}$

يعني $0>2x$ يعني $x<0$

ومنه: $D_f=\left]-\infty,0\right[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

(2 $f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{(e^x)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x\left(1-e^{2x}\right)+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{x}-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}=\frac{2e^{x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	

3) f تزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\infty,0\right[$ ومتصلة وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال: $J=f(I)=f(]-\infty,0[)=]0;+\infty[$

4) $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}$

يعني $\begin{cases} \dfrac{e^{y}}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x \\ y\in]-\infty,0[\end{cases}$ يعني $\left(\dfrac{e^{y}}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^{2}=x^{2}$ يعني $\dfrac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^{2}$

$e^{2y}=x^{2}\left(1-e^{2y}\right)$ يعني $e^{2y}=x^{2}-x^{2}e^{2y}$

يعني $e^{2y}+x^{2}e^{2y}=x^{2}$

يعني $e^{2y}\left(1+x^{2}\right)=x^{2}$ يعني $e^{2y}=\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}$

يعني $2y=\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)$ يعني $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)$

يعني $y=\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}}$

ومنه : $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}}$ $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

<u>تمرين20</u>: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أ . بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

ب . بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2) أ . بين أن $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

<u>الأجوبة</u> : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) أ .

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=1$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$

<u>التأويل الهندسي</u>: $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

ب . $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\ln\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=+\infty$

2) أ . نبين أن $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=1-\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)$$

$$f(x)=1-\ln\left(e^{x}+1\right)+\ln\left(e^{x}\right)=1-\ln\left(e^{x}+1\right)+x$$

ومنه : $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}+1\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ب . وجدنا أن : $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}+1\right)$ اذن:

$f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ وبالتالي :

لمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D). ؟؟؟

ندرس اشارة : $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

نعلم أن : $e^{x}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $e^{x}+1>1$ اذن : $\ln\left(e^{x}+1\right)>\ln 1$ اذن :

$\ln\left(e^{x}+1\right)>0$

اذن : $-\ln\left(e^{x}+1\right)<0$ وبالتالي : اذن $\left(C_f\right)$ تحت $y=x+1$ (D)

3)أ . نبين أن $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ ؟؟؟؟

$$f'(x)=\left(x+1-\ln\left(1+e^x\right)\right)'=1-\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}>0$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 1

ج . دراسة تقعر المنحنى (C) .

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$$

$\forall x\in\mathbb{R},$

تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على $\mathbb{R},$

ويمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

د . نبين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 ؟؟؟

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$

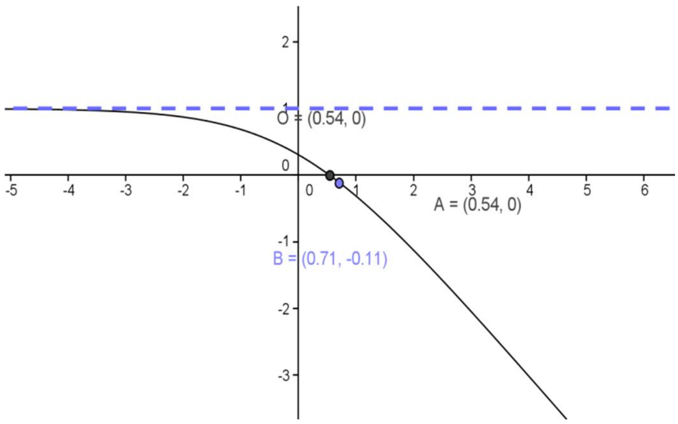
يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=1$ يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln e$

يعني $1+e^{-x}=e$ يعني $e^{-x}=e-1$ يعني $-x=\ln(e-1)$

يعني $x=-\ln(e-1)$ ومنه النقطة أفصولها هو :

$x_0=-\ln(e-1)$

(4



5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

f تزايدية قطعا على المجال $\mathbb{R}$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J=f(I)=f(\mathbb{R})=]-\infty;1[$

ب) $\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}1-\ln\left(1+e^{-y}\right)=x\\y\in\mathbb{R}\end{cases}$ يعني $1-x=\ln\left(1+e^{-y}\right)$

يعني $1+e^{-y}=e^{1-x}$

يعني $e^{-y}=e^{1-x}-1$ يعني $-y=\ln\left(e^{1-x}-1\right)$

يعني $y=-\ln\left(e^{1-x}-1\right)$

ومنه : $f^{-1}(x)=-\ln\left(e^{1-x}-1\right)$ $\quad\forall x\in]-\infty;1[$

تمرين21 للبحث والتثبيت ينجز بنفس طريقة التمرين السابق:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=3-\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ما هو التأويل الهندسي للنتائج المحصل عنها ؟

2) أ . بين أن

$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+3-\ln\left(1+e^{x}\right)$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i}\ \vec{j})$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .