أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:دراسة الدوال

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب : $\lim_{x\to1^+} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1>0\}$

$x>1\Leftrightarrow x-1>0$

ومنه: $D_f=]1;+\infty[$

2) $\lim_{x\to1^+}2x=2$ و $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0^+$ ومنه: $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C) يوازي محور الأراتيب

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

أجوبة :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq0\}$

$(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x^2-1^2=0\Leftrightarrow x^2-1=0$

$x=-1$ أو $x=1\Leftrightarrow$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ يوازي محور الأفاصيل.

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة : أجوبة :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x>0\}$

$x=-1$ أو $x=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x^2+x=0$

نستعمل جدول الاشارة :

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه: $D_f=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\Leftrightarrow f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

اذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}=0$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
3. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة 1: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4x-5\geq0\}$

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-5)=16+20=36=6^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_2=\frac{4-6}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$ و $x_1=\frac{4+6}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
x^2-4x-5	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup[5;+\infty[$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x-5}$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} x^2-4x-5=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}}{x}$

لدينا : $x\to+\infty$ ومنه : $|x|=x$ ومنه

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=1\sqrt{1}=1=a$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)-1x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x-5}-1x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x-5}+1x\right)\left(\sqrt{x^2-4x-5}-1x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x-5}+x\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-5-x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x-5}{x\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+1}=-\frac{4}{2}=-2=b$$

4) ومنه : $y=ax+b$ أي $y=x-2$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

تمرين5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. بين : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$ و أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$
4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2x-2\ge 0\}$

$$2x^2+x-1=0\Leftrightarrow 4x^2+2x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **و** $x_2=\frac{-4}{4}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x^2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا : $x\to-\infty$ ومنه : $|x|=-x$ ومنه

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)+2x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

4) ومنه: $y=ax+b$ أي $y=-2x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

تمرين6: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{2-x}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أدرس الفرع الشلجمي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2-x\ge 0\}$

$x\le 2\Leftrightarrow 2-x\ge 0$

ومنه: $D_f=]-\infty;2]$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2-x=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{x\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{2-x}}=-1\times 0=0$$

<u>التأويل المبياني</u>: منحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

تمرين7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس الفرع الشلجمي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\ge 0\}$

$x\ge 1\Leftrightarrow x-1\ge 0$

ومنه: $D_f=[1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$$

<u>التأويل المبياني</u>: منحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

تمرين8: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{2x-1}-x$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) أدرس الفروع ألانهائية لمنحنى الدالة f .

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\ge 0\}$

$x\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-1\ge 0$

ومنه: $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}-x$ ش غ م

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)=-\infty$$

3) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x-1}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-1=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-1x)\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}=+\infty$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ بجوار $+\infty$

تمرين9: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر المنحني (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1

$$f'(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}\right)'=\frac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\frac{1}{3}x^3-4x+1$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$$

(2 $f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

- تقعر (C_f) موجه نحو محورالأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-2,2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير اشارتها في : $x_0=-2.;x_0=2$

اذن هناك نقطتي انعطاف هما : $A(2;f(2))$ و $A(-2;f(-2))$

تمرين10: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f
2. بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

(1 $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-x^2\geq 0\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه: $D_f=[0,1]$

(2 $x=a$ يعني $x=\frac{1}{2}$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in[0,1]$ فان : $1-x\in[0,1]$ ؟؟؟

$x\in[0,1] \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq -x\leq 0 \Leftrightarrow 1-1\leq 1-x\leq 1+0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\leq 1-x\leq 1 \Leftrightarrow 1-x\in[0,1]$

ب)نبين أن : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$$
$$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

تمرين11: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1. بين أن $\forall\in D_f\ f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$
2. بين أن النقطة $\Omega(-1;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

الجواب : (1 $x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$

(2 $\Omega(-1;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فان : $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ؟؟؟

$x\in\mathbb{R}-\{-1\} \Leftrightarrow x\neq -1 \Leftrightarrow -x\neq 1 \Leftrightarrow -2-x\neq -2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-x\neq -1 \Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

ب)نبين أن : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$$
$$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين12: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة f
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة f اذا وجدت
10. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2 أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

(3 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

(4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

(5 $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

(6

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	$-16/3$	$\nearrow$	$+\infty$

7)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1) \Leftrightarrow y=-3x+\frac{2}{3}$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

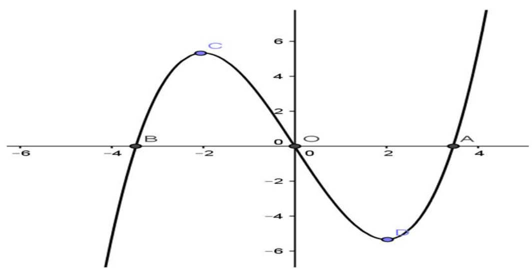
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

10)التمثيل المبياني للدالة f



تمرين13: لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث

لدينا: $\forall x\in D_f \quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

3. أحسب النهايات عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

(تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل C_f.)

5. بين أن النقطة $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .
6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.
7. أعط جدول تغيرات f على D_f .
8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 0.
10. أنشئ المنحنى C_f .

أجوبة :

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq0\}$ ومنه

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2)نقوم بالقسمة الاقليدية ل x^2+x-1 على $x+2$ فنجد :

$x^2+x-1=(x+2)(x-1)+1$

اذن :

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}+\frac{1}{x+2}=x-1+\frac{1}{x+2}$$

ومنه : $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

3) $\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

و $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

4) $x=-2$ مقارب للمنحنى (C_f)

$f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$ يعني $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+2}$

يعني $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

5) $\Omega(-2;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ فان : $-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ ؟؟؟

$\Leftrightarrow -4-x\neq-4+2 \Leftrightarrow -x\neq2 \Leftrightarrow x\neq-2 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\} \Leftrightarrow -4-x\neq-2 \Leftrightarrow$

ب)نبين أن : $f(-4-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$$

$$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

6) $f'(x)=\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)'=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2-1}{(x-2)^2}$ يعني

$$f'(x)=\frac{(x+2)^2-1^2}{(x+2)^2}=\frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x+1)(x+3)$

$(x+1)(x+3)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x+3=0$ يعني $x=-1$ أو $x=-3$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

7) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{x^2+x-1}{x+2}=0$

يعني $x^2+x-1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=1$ و $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right)$ أو $B\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right)$

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=-\frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

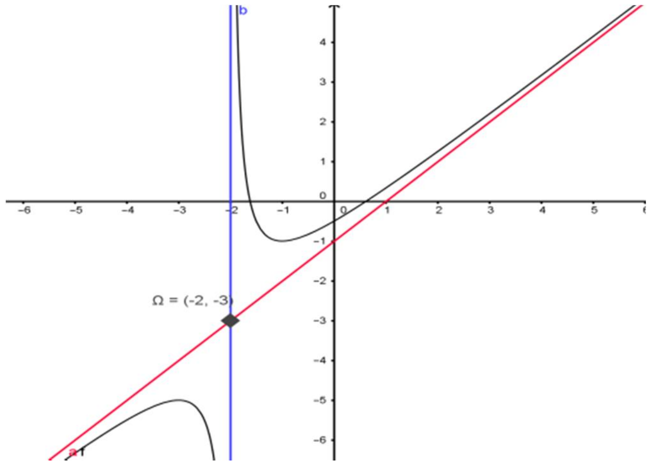
9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 2.

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f(0)=-\frac{1}{2}$ و $f'(0)=\frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2}=\frac{3}{4}$

$y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x \Leftrightarrow y=f(0)+f'(0)(x-0)$

10)التمثيل المبياني للدالة :



تمرين14: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

المعرفة كالتالي : $f(x)=-1+\sqrt{1-x}$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)أ)حدد D_f حيز تعريف الدالة f ب)ب)حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2)أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f

3)أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

4) أ)بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده

ب)حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

ج)املأ الجدول التالي

x	-8	-3	0	1
$f(x)$				

وأنشئ (C_f) و$(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم

أجوبة : 1) أ) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x\ge0\}$

$x\le1\Leftrightarrow 1-x\ge0$

ومنه: $D_f=]-\infty;1]$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}1-x=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج)دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$:

ومبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب على يسار النقطة : $A(1;f(1))$ أي $A(1;-1)$

وموجه نحو الأعلى

2) $\forall x\in]-\infty;1]\ f'(x)=\left(-1+\sqrt{1-x}\right)'=0+\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}<0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ ⟶ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{1-x}{x\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{1-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0-1\times0=0$$

<u>التأويل المبياني</u>: منحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

4) أ) f دالة متصلة على المجال $I=]-\infty;1]$ و f تناقصية قطعا

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة

على مجال: $J=f(I)=f(]-\infty;1])=[-1;+\infty[$

ب) $\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in f(I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}f(y)=x\\y\in]-\infty;1]\end{cases}$ يعني $-1+\sqrt{1-y}=x$

يعني $\sqrt{1-y}=x+1$ $2y-1=x^2$

يعني $\left(\sqrt{1-y}\right)^2=(x+1)^2$ يعني $1-y=(x+1)^2$ يعني $y=1-(x+1)^2$

يعني $y=-x^2-2x$

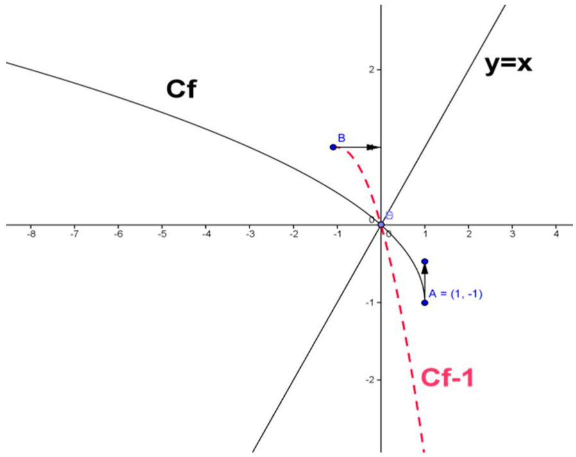
ومنه : $\forall x\in[-1;+\infty[\ f^{-1}(x)=-x^2-2x$

4)

ج)

x	-8	-3	0	1
$f(x)$	2	1	0	-1

منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم : $y=x$ في معلم متعامد ممنظم



تمرين15: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-1$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

4) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=-1$

5) بين أن : $\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

6) أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f

7) أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده

ب) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

8) املأ الجدول التالي :

x	-1	0	1	3
$f(x)$				

وأنشئ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم

أجوبة : 1) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-1$

$x\geq -1 \Leftrightarrow x+1\geq 0$

ومنه: $D_f=\left[1;+\infty\right[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{x+1}-1=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x}-\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{x}\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}-1+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{x+1}=0$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=-1$

مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على اليمين في النقطة : $A(-1;-1)$

5) نبين أن : $\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ ؟؟؟

$f'(x)=\left((x+1)\sqrt{x+1}-1\right)'=(x+1)'\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+1}'-1'$

$f'(x)=1\sqrt{x+1}+(x+1)\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}-0=\frac{2x+2+x+1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+3}{2\sqrt{x+1}}$

$\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{3(x+1)\sqrt{x+1}}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}}{2}$

6) $f'(x)=\frac{3\sqrt{x+1}}{2}>0\ \forall x\in\left]-1;+\infty\right[$

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7) أ) f دالة متصلة على المجال $I=\left]-\infty;1\right]$ و f تزايدية قطعا

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال: $J=f(I)=f\left(\left]-1;+\infty\right[\right)=\left]-1;+\infty\right[$

ب) $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I)\end{cases}$

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in\left]-1;+\infty\right[\end{cases}$ يعني $(y+1)\sqrt{y+1}-1=x$

عني $(y+1)\sqrt{y+1}=x+1$

يعني $\left((y+1)\sqrt{y+1}\right)^2=(x+1)^2$

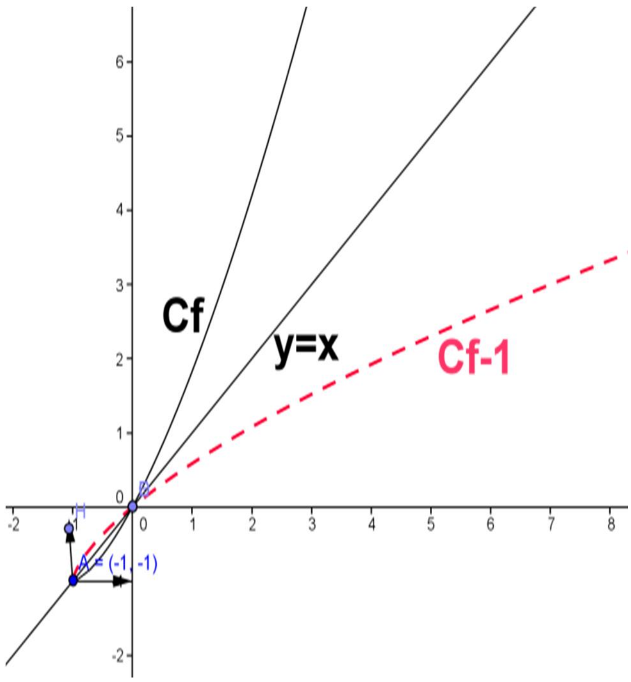
يعني $(y+1)^3=(x+1)^2$ يعني $y+1=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

يعني $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1$

ومنه : $\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\quad f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1$

8)

x	-1	0	1	3
$f(x)$	-1	0	1,8	7



تمارين للبحث والتثبيت

تمرين1:: للبحث نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x)=\sqrt{x-2x^2}$ ليكن $\left(C_f\right)$ الممثل للدالة f

في معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ بحيث $\left\|\vec{i}\right\|=8cm$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=0$ وعلى اليسار عند $x_0=2$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها

3) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{1}{4}$ محور تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

4) أنشئ $\left(C_f\right)$ بين أن قصور الدالة f على المجال $I=\left[0;\frac{1}{4}\right]$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده وحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين2: لتكن f الدالة المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

أدرس تقعر منحنى الدالة f و حدد نقط انعطافها.

تمرين3: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt[3]{2-x};\ x\leq 2 \\ f(x)=(4-x)\sqrt[3]{2-x};\ x\succ 2 \end{cases}$$

بين أن المستقيم الذي معادلته $x=2$ محور تماثل لمنحنى الدالة f .

تمرين4: لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

1.حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2.أدرس زوجية الدالة f

3.أحسب النهايات عند محدات D_f

4.أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

(تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل C_f .)

5.بين أن النقطة $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

6.حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.

7.أعط جدول تغيرات f على D_f .

8.حدد احداثيات نقط تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9.أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 0.

10.أنشئ المنحنى C_f .