أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الاشتقاق

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

الجواب : $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه f قابلة للاشتقاق : عند $x_0=1$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب :(1 $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق : عند $x_0=1$

$2=f'(2)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=2x-3\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$

تمرين3:الاشتقاق على اليمين ــالاشتقاق على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند** $x_0=0$)
2. أحسب $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة f على اليسارعند** $x_0=0$)
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.
5. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.
6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\geq0 \\ f(x)=x^3-x; x\leq0 \end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

(1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2+1=1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

(2 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2-1=-1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

(3

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن :

$f'_d(0)\neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

(4 معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x\Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

(5 معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x\Leftrightarrow y=0-1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

(6 لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=1$.
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

الجواب : $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة : x^2-1 :

$x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1] \end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x2-1$		+	0	−	0	+	

(1 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

(2 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $-2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.

$$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_d): y=2x-4 \Leftrightarrow y=0+2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_g): y=-2x+4 \Leftrightarrow y=0-2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=-1$
3. وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب :

1) $D_f=[-1,+\infty[$

2) $$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=-1$

3)مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة : $A(-1;f(-1))$ وموجه نحو الأعلى

تمرين6: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$

1. حدد D_f
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها
3. هل الدالة f متصلة عند $x_0=0$ ؟
4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x\geq 0\}$

$1\geq x\Leftrightarrow 1-x\geq 0$

$D_f=]-\infty,1]$

2) $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{1-x}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{1-x}=1=f'_d(0)$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sqrt{1-x}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}-\sqrt{1-x}=-1=f'_g(0)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$

لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

النقطة : $O(0;f(0))$ أي $O(0;f(0))$ هي نقطة مزواة

2) دراسة اتصال الدالة f عند $x_0=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}|x|\sqrt{1-x}=0=f(0)$$

اذن الدالة f متصلة عند $x_0=0$

3) $$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{1-x}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-x(x-1)}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x}{\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$

4)مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب على اليسار في النقطة : $A(1;f(1))$ أي $A(1;0)$ وموجه نحو الأعلى

لأن : $-\times-=\oplus$

تمرين7: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$

7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$

9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$

11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

أجوبة : 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

5) $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

6) $f'(x)=\left(6\sqrt{x}-4\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

7) $f'(x)=\left(6x^4-\cos x+3\sin x\right)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x$

$$f'(x)=24x^3+\sin x+3\cos x$$

8) $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$

9) $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$

10) $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times\left(1+\tan^2x\right)-0=3\times\left(1+\tan^2x\right)$

11) نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=$$

$$f'(x)=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$$

12) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

13) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

14) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

تمرين8: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

9) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 10) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ 13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 15) $f(x)=(2x-1)^7$

أجوبة : 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=\left(2x^3\right)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

9) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$$

$$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

10) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

12) $f(x)=\dfrac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

13) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

14) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

15) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

تمرين9: نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$h(x)=\sin(x^2+1)$$

أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

الجواب: نلاحظ أن h هي مركب دالتين :

$f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sin x$ و $h=gof$

لأن: $h(x)=(gof)(x)=g(f(x))$

$$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=\cos(x^2+1)\times2x=2x\cos(x^2+1)$$

تمرين10: نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$h(x)=\cos(2x^2+4x-1)$$

أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

الجواب: نلاحظ أن h هي مركب دالتين :

$f(x)=2x^2+4x-1$ و $g(x)=\cos x$ و $h=gof$

لأن: $h(x)=(gof)(x)=g(f(x))$

$$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=\cos(2x^2+4x-1)\times(4x+4)$$

$$h'(x)=(4x+4)\cos(2x^2+4x-1)$$

تمرين11: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x^3-3x$

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيراتها
2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. أحسب $\left(g^{-1}\right)'(0)$

أجوبة : 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

اذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

اشارة f' هي اشارة $(x-1)(x+1)$

$(x-1)(x+1)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x-1=0$ يعني $x=-1$ أو $x=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3-3x=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-3x=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2)حسب جدول تغيرات الدالة g فان g تزايدية قطعا ومتصلة على $I=[1;+\infty[$ (لأنها دالة حدودية)
ومنه g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال :
$$J=g(I)=g([1;+\infty[)=[-2;+\infty[$$
(3
$$\begin{cases} g(x)=y \\ x\in[1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g^{-1}(y) \\ y\in[-2;+\infty[\end{cases}$$
حسب الخاصية لدينا : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(0)\right)}$

نضع : $g^{-1}(0)=x$ يعني $0=g(x)$ يعني $x^3-3x=0$

يعني $x\left(x^2-3\right)=0$ يعني $x=0$ أو $x^2-3=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=3$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

ونعلم أن : $x\in[1;+\infty[$ اذن نأخذ فقط : $x=\sqrt{3}$

اذن نجد : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{g'\left(\sqrt{3}\right)}$

ونعلم أيضا أن : $g'(x)=3x^2-3$ اذن: $g'\left(\sqrt{3}\right)=3\times\sqrt{3}^2-3=6$

ومنه : $\left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{6}$

<u>تمرين12:</u> أحسب مشتقة الدوال المعرفة كالتالي :

1) $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right); f(x)=x^{\frac{5}{7}}$ 2) $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right); f(x)=x^{\frac{2}{5}}$

3) $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right); f(x)=\sqrt[3]{x}$

<u>أجوبة :1)</u> $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right); \left(x^{\frac{2}{7}}\right)'=\frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}-1}=\frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}=\frac{2}{7}\frac{1}{x^{\frac{5}{7}}}=\frac{2}{7}\frac{1}{\left(\sqrt[7]{x}\right)^5}$

2) $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right); \left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}\frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}=\frac{2}{5}\frac{1}{\left(\sqrt[5]{x}\right)^3}$

3) $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right); \left(\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

<u>تمرين13:</u> أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :
$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right); f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

<u>الجواب:</u> نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

$$\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{3\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^{3-1}}=\frac{2x}{3\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}$$

<u>تمرين14:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات f 4) حدد جدول تغيرات f 5) بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\geq-3$

<u>الجواب:</u>1)الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(x^2+2x-2\right)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

درس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

- اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq0$ ومنه f تزايديه
- اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq0$ ومنه f تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

5) -3 هي قيمة دنيا للدالة f يعني $f(x)\geq-3\ \forall x\in\mathbb{R}$

<u>تمرين15:</u> نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\leq1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2)هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

3)أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0=0$

<u>الجواب :</u>
$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\leq1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(1)=1^2+2\times1=3$$

1)
$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية x^2+2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-} x+3=4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_g(1)=4$

2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ $\begin{cases} g(x)=x(x-1); x\ge 0 \\ g(x)=-x(x-1); x\le 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x-1=-1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $-1=f'_d(0)$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-x+1=1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $g'_d(0)\neq g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

تمرين16:نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x)=x^3-3x^2+1$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة التعريف
2. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f
3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f وحدد نقط الانعطاف
6. بين أن $A(1;-1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)
7. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;-1)$
8. أنشئ (C_f) و (T).

الأجوبة : $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

3) $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x(x-2)=0\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

5)

$f'(x)=\left(x^3-3x^2+1\right)'=3\times x^2-6x$

$f''(x)=\left(3\times x^2-6x\right)'=6x-6$

$x=1\Leftrightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow f''(x)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$6x-6$		$-$	0	$+$	

- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[1;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير اشارتها عند : $x_0=1$ و لدينا $f(1)=-1$

ومنه : $A(1;-1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

6) نبين أن $A(1;-1)$ $A(a;b)$

أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان : $2-x\in\mathbb{R}$ عبارة صحيحة

ب) نبين أن : $f(2-x)+f(x)=-2=2b$ ؟؟؟؟

$f(2-x)+f(x)=(2-x)^3-3(2-x)^2+1+x^3-3x^2+1$

$f(2-x)+f(x)=$

$=2^3-3\times2^2x+3\times2x^2-x^3-3\left(2^2-4x+x^2\right)+1+x^3-3x^2+1$

$=8-12x+6x^2-x^3-12+12x-3x^2+1+x^3-3x^2+1=-2=2b$

ومنه $A(1;-1)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

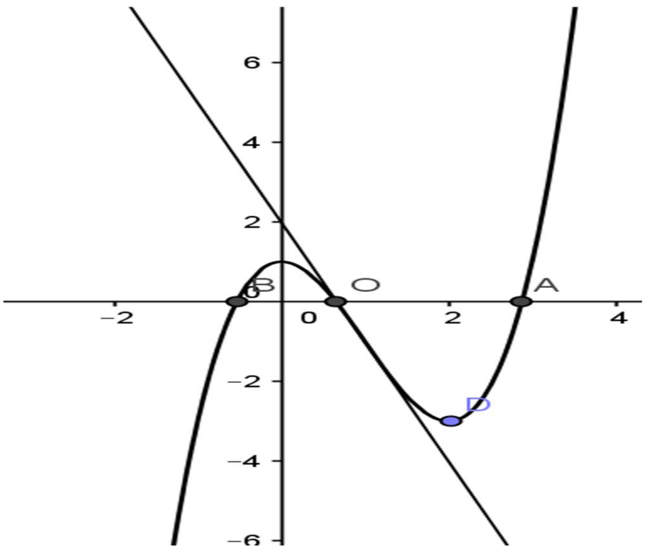
مركز تماثل للمنحني (C_f)

7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=-1$ و $f'(1)=-3$

$y=-3x+2\Leftrightarrow y=-1-3(x-1)\Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

8) التمثيل المبياني للدالة f



تمارين للبحث :

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=-1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

تمرين2: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

(1 $f(x)=4x^5-\frac{1}{3}x^3+1$ (2 $f(x)=\sqrt{2x^2-16x}$

(3 $f(x)=4x^3-4\cos x+6\sin x$

(4 $f(x)=\frac{1}{\cos 2x}$ (5 $f(x)=\cos\left(x^2-4\right)$

(6 $f(x)=\tan\left(x^3+1\right)$ (7 $f(x)=\sqrt[5]{x}-2\sqrt[3]{x^2}$

(8 $f(x)=\sqrt[3]{7x^2+x}$ (9 $f(x)=\sqrt[6]{\sin x}$

تمرين3: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

1. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=[0;+\infty[$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده
2. أحسب $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$

تمرين4: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $I=[0;1[$ و أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$
2. بين أن قصور الدالة f على المجال $I=[0;1[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد $f^{-1}(x)$
4. أحسب $\left(f^{-1}\right)'\left(-\frac{5}{3}\right)$

تمرين5: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

أحسب $f\left(\sqrt{3}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(2)$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

جدو ل للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال الدوال

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}\quad n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$