تمارين محلولة: المتتاليات العددية

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية الجهة الشرقية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1 : أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}}+5$

أجوبة : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^7}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}n^6$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^9$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^9}+13$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n}+5n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^3}+\frac{3}{n}+1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}-4n$

تمرين2 : حدد من بين المتتاليات التالية المتتاليات المتقاربة:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n}+n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^2}+\frac{5}{n}+2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}-7n$

أجوبة : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n}+n=0+\infty=+\infty$ اذن هي متتالية متباعدة لأن نهايتها غير منتهية

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^2}+\frac{5}{n}+2=0+0+2=2$ اذن هي متتالية متقاربة لأن نهايتها منتهية

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}-7n=0-\infty=-\infty$ اذن هي متتالية متباعدة لأن نهايتها غير منتهية

تمرين3: أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$ ،

أجوبة: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1=0-0+0-1=-1$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{3n}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n=\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ و $+\infty\times+\infty=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n=\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ و

$+\infty\times-\infty=-\infty$

تمرين4 : أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n$

أجوبة: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}=\frac{5}{3}$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1=\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3=+\infty$

لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9=\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^5=\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9n}{3n}=\frac{9}{3}=3$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}=\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{3n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{3\times2\times n\times n}{3n}=\lim_{n\to+\infty} 2\times n=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^5}=\lim_{n\to+\infty} \frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}=\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2}{14n^3}=\lim_{n\to+\infty} \frac{7\times n\times n}{14\times n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}=0$$

الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2=\lim_{n\to+\infty} n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right)=\lim_{n\to+\infty} 4n=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

تمرين5: أحسب النهايات التالية :] $\lim_{n\to+\infty} 2^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\lim_{n\to+\infty}(-5)^n$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ لأن: $a=2>1$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ لأن : ليست لها نهاية لأن: $a=-5<-1$

تمرين6 : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$, $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$, $\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$,

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

أجوبة : $\lim_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$ لأن: $-1<a=0.7<1$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و

$\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$

$(-2)^n$ لأن : ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{1}{4}<1$

و $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$$

تمرين7 : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{4}{3}}$, $\lim_{n\to+\infty}(n)^{-\frac{6}{7}}$,

$\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{3}{5}}-(n)^{\frac{1}{3}}+4$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{4}{3}}=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(n)^{-\frac{6}{7}}=0$,

$$\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{3}{5}}-(n)^{\frac{1}{3}}+4=\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{1}{3}}\left((n)^{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}-1+4(n)^{-\frac{1}{3}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{1}{3}}\left((n)^{\frac{4}{15}}-1+4(n)^{-\frac{1}{3}}\right)=+\infty$$

تمرين8: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{3+u_n}\\ u_0=0\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{1+u_n}$

1. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
3. أحسب: $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

أجوبة : 1) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن: (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{2}$

5) نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{2}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{\frac{n+2}{2}}-1=\frac{2}{n+2}-1=\frac{2-n-2}{n+2}=\frac{-n}{n+2}$$

3) حساب: $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{n}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{n}=-1$$

المتتالية (v_n) متباعدة و المتتالية (u_n) متقاربة

تمرين9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+1\\ u_0=10\end{cases}$

ونعتبرالمتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ v_n=u_n-3$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $u_n\geq 3\quad \forall n\in\mathbb{N}$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
4. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
5. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n
6. أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: 1) نعوض n ب 0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times u_0+1=\frac{2}{3}\times 10+1=\frac{20}{3}+1=\frac{20}{3}+\frac{3}{3}=\frac{23}{3}$ اذن : $u_1=\frac{23}{3}$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=\frac{2}{3}\times u_1+1=\frac{2}{3}\times\frac{23}{3}+1=\frac{46}{9}+1=\frac{46}{9}+\frac{9}{9}=\frac{55}{9}$ اذن : $u_2=\frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-3=10-3=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-3=\frac{23}{3}-3=\frac{23}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14}{3}$

2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=10\geq 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\geq 3$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\geq 3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2=\frac{2}{3}(u_n-3)$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\geq 3$

اذن : $u_n-3\geq 0$ منه $u_{n+1}-3\geq 0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 3$

3) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+1=-\frac{1}{3}(u_n-3)$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 3$ حسب السؤال 2) اذن : $u_{n+1}-u_n\leq 0$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

(4

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n+1-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n-2}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}(u_n-3)}{u_n-2}=\frac{2}{3}=q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=7$

كتابة v_n بدلالة n:

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=7$

فان: $v_n=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-3$ اذن: $v_n+3=u_n$ أي: $u_n=7\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن : $-1<\frac{2}{3}<1$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3=3$$

تمرين10: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $u_n>1\ \forall n\in\mathbb{N}$
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

أجوبة : 1) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2>1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\geq 1$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\geq 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n}{2u_n+3}-1=\frac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3}=\frac{3u_n-3}{2u_n+3}=\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $2u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$

2) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{5u_n}{2u_n+3}$

$$v_{n+1}=\frac{\frac{5u_n}{2u_n+3}-1}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{\frac{5u_n-2u_n-3}{2u_n+3}}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{\frac{3u_n-3}{2u_n+3}}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{3(u_n-1)}{5u_n}=\frac{3}{5}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{3}{5}$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{3}{5}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=(1)\times\left(\frac{3}{5}\right)^n=\left(\frac{3}{5}\right)^n$

نعلم أن: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ يعني $v_n=1-\frac{1}{u_n}$

يعني $\frac{1}{u_n}=1-v_n$ يعني $u_n=\frac{1}{1-v_n}$

ونعلم أن : $v_n=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$ لأن : $-1<\frac{3}{5}<1$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}=1$$

تمرين11: أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}$

الجواب: نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ -1\leq\sin n\leq 1$ أو $|\sin n|\leq 1$

اذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \frac{-1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$ و نعلم أن : $\lim\frac{-1}{n}=\lim\frac{1}{n}=0$

اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

تمرين12: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=3+\frac{\sin n}{n^3}$

بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

الجواب: $u_n = 3+\frac{\sin n}{n^3}$ تعني: $u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}$

تعني: $|u_n-3| = \left|\frac{\sin n}{n^3}\right|$

اذن : $|u_n-3|\le \frac{1}{n^3}$ و نعلم أن : $\lim \frac{1}{n^3}=0$ اذن حسب الخاصية السابقة فان: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

تمرين13: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=\frac{(-1)^n}{n}$

1. أحسب: $\lim_{n\to+\infty}u_n$
2. استنتج : $\lim_{n\to\infty} 3n+2(-1)^n$

الجواب: 1)نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ -1\le(-1)^n\le1$

اذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \frac{-1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac1n$ و نعلم أن : $\lim\frac{-1}{n}=\lim\frac1n=0$

اذن حسب الخاصية السابقة فان: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

2) $\lim_{n\to\infty}3n+2(-1)^n=\lim_{n\to\infty}n\left(3+2\frac{(-1)^n}{n}\right)$ بما أن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

اذن : $\lim_{n\to\infty}3+2\frac{(-1)^n}{n}=3$ ومنه : $\lim_{n\to\infty}3n+2(-1)^n=+\infty$

تمرين14 : نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=2(-1)^n+\frac43n^2+2$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\ge\frac43n^2$
2. استنتج : $\lim_{n\to+\infty}v_n$

الجواب: 1)نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ (-1)^n\ge-1$

اذن : $2(-1)^n\ge-2$ اذن : $2(-1)^n+\frac43n^2+2\ge-2+\frac43n^2+2$

اذن : $v_n\ge\frac43n^2$

2) نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\ge\frac43n^2$ و $\lim\frac43n^2=+\infty$

اذن حسب الخاصية السابقة فان: $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

تمرين15 : نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\ v_n=3n+5\sin n$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\ge3n-5$
2. استنتج : $\lim_{n\to+\infty}v_n$

الجواب: 1)نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ \sin n\ge-1$

اذن : $5\sin n\ge-5$ اذن : $v_n\ge3n-5$

2) نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\ge3n-5$ و $\lim 3n-5+\infty$

اذن حسب الخاصية السابقة فان: $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

تمرين16 : نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي:

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=-4n+3\cos n$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\le-4n+3$
2. استنتج : $\lim_{n\to+\infty}v_n$

الجواب: 1)نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ \cos n\le1$

اذن : $3\cos n\le3$ اذن : $v_n\le-4n+3$

2) نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\le-4n+3$ و $\lim -4n+3=-\infty$

اذن حسب الخاصية السابقة فان: $\lim_{n\to+\infty}v_n=-\infty$

تمرين17 :نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\\u_0=3\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n)مكبورة بالعدد 4
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. ماذا تستنتج ؟

الأجوبة :1)

1)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le4$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\le4$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎ نفترض أن: $u_n\le4$

◎ نبين أن: $u_{n+1}\le4$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le4$

اذن : $4-u_n\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $4-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le4$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+6u_n-8$ نحسب المميز Δ

$\Delta=36-32=4>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$

ومنه التعميل : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

لدينا : $u_n\ge2$ اذن : $u_n\ge0$ و $u_n-2\ge0$

و لدينا : $u_n\le4$ اذن : $u_n-4\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) المتتالية (u_n)تزايدية و مكبورة اذن هي متتالية متقاربة

تمرين18 :نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

1. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. ماذا تستنتج ؟

الأجوبة :1) يكفي ان نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \le 2$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $u_0 = 1 \le 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

◎ نفترض أن: $u_n \le 2$

◎ نبين أن: $u_{n+1} \le 2$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2 - u_{n+1} = 2 - \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \dfrac{2(u_n + 1) - (4u_n - 2)}{u_n + 1} = \dfrac{-2u_n + 4}{u_n + 1}$

$2 - u_{n+1} = \dfrac{2(2 - u_n)}{u_n + 1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n \le 2$

اذن : $2 - u_n \ge 0$ و $u_n + 1 > 0$ و منه $2 - u_{n+1} \ge 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \le 2$

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \dfrac{4u_n - 2 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \dfrac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 2}$

نعمل $-u_n^2 + 3u_n - 2$ نحسب المميز Δ

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ هناك جذرين : $x_1 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$ و $x_2 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$

ومنه التعميل : $-u_n^2 + 3u_n - 2 = -(u_n - 1)(u_n - 2)$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$

لدينا : $u_n \ge 1$ اذن : $u_n \ge 0$ و $u_n - 1 \ge 0$

و لدينا : $u_n \le 2$ اذن : $u_n - 2 \le 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1} \ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة اذن هي متتالية متقاربة

تمرين19 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \\ u_0 = 3 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; u_n \ge 2$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n) ماذا تستنتج؟
4. أحسب $v_{n+1} - v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
5. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
6. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

أجوبة : 1) $u_1 = \dfrac{5u_0 - 4}{u_0 + 1} = \dfrac{15 - 4}{3 + 1} = \dfrac{11}{4}$ و $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 2} = \dfrac{1}{3 - 2} = 1$

2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $u_0 = 3 \ge 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

ب) نفترض أن: $u_n \ge 2$

ج) نبين أن: $u_{n+1} \ge 2$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1} = \dfrac{3u_n - 6}{u_n + 1}$

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n \ge 2$

اذن : $u_n - 2 \ge 0$ و $u_n + 1 > 0$ و منه $u_{n+1} - 2 \ge 0$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \; u_n \ge 2$

3) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \dfrac{5u_n - 4 - u_n(u_n + 1)}{u_n + 1} = \dfrac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n + 1}$

$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^2 - 4u_n + 4}{u_n + 1} = -\dfrac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1} \le 0$

لأن : $-(u_n - 2)^2 \le 0$ و $u_n + 1 > 0$ ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

الاستنتاج : المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 2 اذن هي متتالية متقاربة

4) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2}$ نعوض u_{n+1} ب $\dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

فنجد:
$$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{1}{\dfrac{5u_n - 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1}} - \dfrac{1}{u_n - 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 1}{3u_n - 6} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \dfrac{3}{3(u_n - 2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} = \dfrac{u_n - 2}{3(u_n - 2)} = \dfrac{1}{3} = r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

5) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1 + \dfrac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ يعني $u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$ يعني $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2$

ونعلم أن : $v_n = 1 + \dfrac{n}{3}$ اذن :

$$u_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{n}{3}} + 2 = \dfrac{1}{\dfrac{n+3}{3}} + 2 = \dfrac{3}{n+3} + 2 = \dfrac{3 + 2n + 6}{n+3} = \dfrac{9 + 2n}{n+3}$$

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{n}{3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{3} = +\infty$

$$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{9 + 2n}{n+3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n}{n} = 2$$

تمرين20 : نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$v_n = \cos\left(\dfrac{(0,1)^n + \pi}{(0,1)^n + 4}\right)$ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

الجواب : $\lim\limits_{n \to \infty} \cos\left(\dfrac{(0,1)^n + \pi}{(0,1)^n + 4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

لأن : $-1 < 0,1 < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,1)^n = 0$

تمرين21 :نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$u_1=1 \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$$

1. بين أن $u_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة
3. نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ على المجال $I=]-\infty;2]$

أ)بين أن $f(I)\subset I$ و أن f دالة متصلة علي مجال I

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

الأجوبة :(1نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $u_1=1\le 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

ب)نفترض أن: $u_n\le 2$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\le 2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{1}{2}u_n-1=1-\frac{1}{2}u_n=\frac{2-u_n}{2}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 2$

اذن : $2-u_n\ge 0$ منه $2-u_{n+1}\ge 0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n\le 2$

2)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=-\frac{1}{2}u_n+1=\frac{2-u_n}{2}$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n\le 2$ حسب السؤال 1)اذن : $u_{n+1}-u_n\ge 0$

ومنه المتتالية (u_n) تزايدية

3)الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ على المجال $I=]-\infty;2]$

f دالة حدودية اذن *متصلة على* $\mathbb{R}$ومنه *متصلة على* المجال $I=]-\infty;2]$

$f'(x)=\frac{1}{2}>0$ ومنه f تزايدية قطعا على المجال $I=]-\infty;2]$

$$f(I)=f(]-\infty;2])=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);f(2)\right]=]-\infty;2]$$

ومنه حسب الخاصية السابقة فان: نهايتها l حل للمعادلة : $f(x)=x$

أي : $f(l)=l$ يعني $\frac{1}{2}l+1=l$ يعني $l+2=2l$ يعني $l=2$

تمرين22:نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{-1}{2+u_n} \\ u_0=2 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. بين بالترجع أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$
4. أكتب v_n بدلالة n
5. استنتج طريقة أخرى لكتابة u_n بدلالة n

أجوبة : $u_{n+1}=\dfrac{-1}{2+u_n}$

1) نعوض nب0

2) فنجد: $u_{0+1}=\frac{3}{2}\times u_0-1=\frac{3}{2}\times(-1)-1=-\frac{3}{2}-1=-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=-\frac{5}{2}$

اذن : $u_1=-\frac{5}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد :

$u_{0+1}=\frac{-1}{2+u_0}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$ اذن : $u_1=-\frac{1}{4}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{-1}{2+u_1}=\frac{-1}{2-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{7}{4}}=\frac{-4}{7}$ اذن : $u_1=-\frac{4}{7}$

نعوض n ب 0 في $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فنجد : $v_0=\frac{1}{u_0+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=\frac{1}{u_1+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{-1}{2+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{-1}{2+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+1}{2+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2-1}{u_n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+1}=1$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

3)أ) لدينا : $u_0=2$ و $\frac{-3\times0+2}{2\times0+1}=\frac{2}{1}=2$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

ج) نبين أن $u_{n+1}=\frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$ أي نبين أن : $u_{n+1}=-\frac{3n+1}{3n+4}$ ؟؟؟

لدينا : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$ وحسب افتراض الترجع لدينا : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

اذن : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}=\frac{-1}{2+\frac{-3n+2}{3n+1}}=\frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}}=-\frac{3n+1}{3n+4}$

ومنه : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

4)بما أن : (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=\frac{1}{3}+n$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}+n$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}+n}-1=\frac{1}{\frac{3n+1}{3}}-1=\frac{3}{3n+1}-1=\frac{3-3n-1}{3n+1}=\frac{-3n-2}{3n+1}$$

تمرين23 : نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3} \\ u_0=2\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1)أحسب u_1 و v_0

2)بين أن : $u_n\ge1\ \forall n\in\mathbb{N}$

3)أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

4)أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5) أحسب $\lim v_n$ و $\lim u_n$

6)أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الجواب 1) $u_1=\dfrac{5u_0-1}{u_0+3}=\dfrac{10-1}{2+3}=\dfrac{9}{5}$ و $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{2-1}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}-1=\dfrac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3}=\dfrac{4u_n-4}{u_n+3}=\dfrac{4(u_n-1)}{u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $u_n\ge1\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$ نعوض u_{n+1} ب $\dfrac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac14=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac14$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac14$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\dfrac n4$

نعلم أن : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\dfrac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\dfrac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\dfrac n4$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac n4}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac n4=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac n4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n+8}{n+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac nn=1$

6)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n-1-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+3}$$

$u_{n+1}-u_n=-\dfrac{u_n^2-2u_n+1}{u_n+3}=-\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+3}\le0$ لأن : $-(u_n-1)^2\le0$

و $u_n+3>0$ حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

تمرين24 :نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{6}{1+u_n} \\ u_0=3\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

الجواب:1) نعوض n بـ0 فنجد: $u_1=\dfrac{6}{1+u_0}=\dfrac{6}{1+3}=\dfrac64=\dfrac32$ اذن : $u_1=\dfrac32$

$v_0=\dfrac{u_0-2}{u_0+3}=\dfrac{3-2}{3+3}=\dfrac16$ و $v_1=\dfrac{u_1-2}{u_1+3}=\dfrac{\frac16-2}{\frac16+3}=\dfrac{\frac{-11}{6}}{\frac{19}{6}}=-\dfrac{11}{19}$

(2

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{6}{1+u_n}-2}{\frac{6}{1+u_n}+3}=\frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}}=\frac{\frac{6-2-2u_n}{1+u_n}}{\frac{6+3+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{4-2u_n}{1+u_n}}{\frac{9+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{-2(u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{3(3+u_n)}{1+u_n}}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)}=\frac{-2}{3}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=\left(-\frac23\right)\times v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\dfrac23$ وحدها الأول $v_0=\dfrac16$

3) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\dfrac23$

وحدها الأول $v_0=\dfrac16$ فان: $v_n=\dfrac16\times\left(-\dfrac23\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}\Leftrightarrow v_n(u_n+3)=u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n+3v_n-u_n=-2$

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-3v_n\Leftrightarrow u_n=\dfrac{-2-3v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\dfrac{2+3v_n}{1-v_n}$

ونعلم أن : $v_n=\dfrac16\times\left(-\dfrac23\right)^n$

اذن : $u_n=\dfrac{2+3\times\frac16\times\left(-\frac23\right)^n}{1-\frac16\times\left(-\frac23\right)^n}$ اذن : $u_n=\dfrac{2+\frac12\times\left(-\frac23\right)^n}{1-\frac16\times\left(-\frac23\right)^n}$

تمرين25 :نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_1=1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_2 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) $u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ و $v_1=\frac{1}{u_1}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n-1}{u_n}=1=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

فان : $v_n=v_1+(n-1)r$ أي : $v_n=1+(n-1)$ يعني $v_n=n$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=n$ اذن : $u_n=\frac{1}{n}$

تمرين26 :نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_1=1 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) $u_1=\frac{u_0}{1+2u_0}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ و $v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n-1}{u_n}=2=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+2n$

ونعلم أن: $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=1+2n$ اذن : $u_n=\frac{1}{1+2n}$

تمرين27 :نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=-1-\frac{1}{4u_n} \\ u_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : (v_n) متتالية حسابية
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1) $u_1=-\frac{3}{2}$ و $u_2=-\frac{5}{6}$ و $u_{13}=-\frac{7}{10}$

2) $v_{n+1}-v_n=-2$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=-2$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=-2n+1$

5) نعلم أن : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{2}$ يعني $u_n=\frac{1}{-2n+1}-\frac{1}{2}$

تمرين28 :نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3} \\ u_0=1 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n\le 3$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) نستعمل برهانا بالترجع

نبين أولا أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n$

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge 0$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\ge 0$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\ge 0$ ؟؟؟؟؟

حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 0$ اذن : $u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 0$

نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 3$

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\le 3$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\le 3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق

$$3-u_{n+1}=3-\frac{5u_n+3}{u_n+3}=\frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-2u_n+6}{u_n+3}=\frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 3$

اذن : $u_n-3\le 0$ و $u_n+3>0$ لأن $u_n\ge 0$ و منه $3-u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 3$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

نعمل $-u_n^2+2u_n+3$ نحسب المميز Δ

$\Delta=4+12=16>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-4}{-2}=3$

ومنه التعميل : $-u_n^2+2u_n+3=-(u_n-3)(u_n+1)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}$

لدينا : $u_n\ge 0$ اذن : $u_n+3\ge 0$ و $u_n+1\ge 0$

و لدينا : $u_n\le 3$ اذن : $u_n-3\le 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

(3 $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}}=\frac{2u_n-6}{6u_n+6}$

$$v_{n+1}=\frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)}=\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1}=\frac{1}{3}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$

فان: $v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-3\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$

$u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow$

ونعلم أن : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ اذن $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين1:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\frac{1}{n(3-\sin n)}$$

بين أن : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

تمرين2:نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\\ u_0=1\end{cases}$

1. بين أن $0\le u_n\le 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) (3 ماذا تستنتج؟

تمرين3:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

1. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية ومصغورة
2. ماذا نستنتج؟

تمرين4:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$u_0=2\quad و\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$$

1. بين أن $0\le u_n\le 3\quad \forall n\in\mathbb{N}$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة
3. نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\sqrt{x+6}$

على المجال $I=[0,3]$

a) بين أن $f(I)\subset I$ و أن f دالة متصلة علي مجال I

b) أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين5:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$u_0=4\quad و\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n}$$

1. بين بالترجع أن $u_n\ge 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة .
3. أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين6:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$u_0=\frac{5}{4}\quad و\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{2}$$

4. بين أن $u_n\le 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$
5. أدرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة
6. نعتبر الدالة f المعرفة ب :

$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ على المجال $I=]-\infty;2]$

ت) بين أن $f(I)\subset I$ و أن f دالة متصلة علي مجال I

ث) أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين7:نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{6x}{x^3+4}$.

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن f تقابل من $\left[0;\sqrt[3]{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.
3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

المعرفة بما يلي: $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

أ. بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N});1\le u_n\le\sqrt[3]{2}$.

ب. بين أن (u_n) تزايدية و استنتج أنها مقاربة

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien