

جداول تمكنا من البحث عن الدوال الأصلية

الدوال الأصلية للدالة f على مجال I	الدالة f
$x \mapsto kx+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto k; k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^2}{2}+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto x$
الدوال الأصلية للدالة f على مجال I	الدالة f
$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^*$
$x \mapsto -\frac{1}{x}+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}; n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$
$x \mapsto 2\sqrt{x}+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto x^r; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$
$x \mapsto \sin(x)+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto -\cos(x)+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)+c; c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
دالة أصلية للدالة f على المجال I	الدالة f معرفة على مجال I
$u+v$	$u'+v'$
uv	$uv'+vu'$
$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u'u^n; n \in \mathbb{N}^*$
$-\frac{1}{u}$	$\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u'u^r; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$
$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كالتالي:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

- حدد دالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بحيث $F'(x) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
- هل توجد دالة أخرى G بحيث $G'(x) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
- كم توجد من دالة F بحيث $F'(x) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)؟

الأجوبة (1): الدالة المعرفة كالتالي:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$$

على \mathbb{R} وتحقق $F'(x) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

نقول أن F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

(2) الدالة المعرفة كالتالي:

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2$$

وتحقق أيضا $G'(x) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

اذن أيضا G دالة أصلية أخرى للدالة f على \mathbb{R}

(3) هناك عدد لا منته من الدوال الأصلية للدالة f

ونقول مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} هي

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + k$$

حيث k عدد حقيقي.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كالتالي:

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

1. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$

2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1) = 3$

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$F(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^{2+1} + \frac{1}{2}x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + k$$

$$F(1) = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$$

$$\frac{7}{6} + k = 3 \Rightarrow k = 3 - \frac{7}{6}$$

$$k = 3 - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$$

ومنه الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1) = 3$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^3+2} + k \text{ اذن}$$

$$x \mapsto \frac{1}{a} u(ax+b) \quad x \mapsto u'(ax+b); a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}$$

تمرين 5: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (2) \quad f(x) = 2\sqrt{2x+1} \quad (1)$$

$$f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{أجوبة (1):}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} + k \text{ اذن}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + k \text{ ومنه}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x+1})^3 + k \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \text{ اذن}$$

تمرين 6: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \sin(4x-1) \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} \quad (2) \quad f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad (5) \quad f(x) = \cos(2x+8) \quad (4)$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{أجوبة (1):}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k \text{ اذن}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + k \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} = \frac{2}{3} \frac{(8+x^3)'}{2\sqrt{8+x^3}} \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{8+x^3} + k \text{ اذن}$$

$$k \in \mathbb{R} \quad F(x) = -\frac{1}{4} \cos(4x-1) + k \text{ اذن } f(x) = \sin(4x-1) \quad (3)$$

$$k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x+8) + k \text{ اذن } f(x) = \cos(2x+8) \quad (4)$$

$$f(x) = (\sin x)' (\sin x)^2 \text{ يعني } f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad (5)$$

$$F(x) = \frac{1}{2+1} (\sin x)^{2+1} + k \text{ ومنه}$$

$$k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + k \text{ يعني}$$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \text{كالتالي :}$$

1. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$$

2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1) = \frac{5}{2}$

أجوبة (1):

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \text{بالمقارنة مع الكتابة :}$$

تمرين 3: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2) \quad f(x) = 5x^4 + 3x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = (2x-1)^3 \quad (4) \quad f(x) = \sin x + x \cos x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \quad (5)$$

$$f(x) = 5x^4 + 3x + 1 \quad \text{أجوبة (1):}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k \text{ اذن}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k \text{ اذن}$$

$$f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x (\sin x)' \quad (3)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = x \times \sin x + k \text{ اذن}$$

$$f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3 \quad (4)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k \text{ اذن}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + k \text{ ومنه}$$

$$f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \text{ يعني } f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2} \quad (5)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k \text{ اذن}$$

تمرين 4: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = 2\cos x - \sin x - 3 \quad (2) \quad f(x) = 8x^3 + 4x^2 + x + 6 \quad (1)$$

$$(5) \quad f(x) = (4x+5)^2 \quad (4) \quad f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2}$$

أجوبة:

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 + x + 6 \quad (1)$$

$$F(x) = 8 \times \frac{1}{4} x^4 + 4 \times \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x + k = 2x^4 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x + k \text{ اذن}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث}$$

$$f(x) = 2\cos x - \sin x - 3 \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } f(x) = 2\sin x + \cos x - 3x + k$$

$$f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' \quad (3)$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = x^2 \times \sin x + k \text{ اذن}$$

$$f(x) = (4x+5)^2 \quad (4)$$

$$f(x) = (4x+5)^2 = \frac{1}{4} (4x+5)' (4x+5)^2$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k \text{ اذن}$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k \text{ ومنه}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} \right) \text{ يعني } f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2} \quad (5)$$

$$\text{وجد أن : } \begin{cases} c=5 \\ c=5 \\ a=20 \\ b=0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} c=5 \\ 8c=40 \\ a=20 \\ b+16c=80 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5$$

$$\text{وجد أن : } \begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} a=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \text{ يعني } f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad k \in \mathbb{R} \quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k$$

$$f(x) = 10 \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} + 5 \text{ يعني } f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \quad (2)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad k \in \mathbb{R} \quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k$$

$$k = \frac{15}{2} \text{ يعني } k = 5 + \frac{5}{2} \text{ يعني } -\frac{10}{4} + k = 5 \text{ يعني } F(0) = 5 \quad (3)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + \frac{15}{2}$$

تمرين 8: نعتبر الدالة f

المعرفة على $[1; +\infty[$ كالآتي : $f(x) = x\sqrt{x-1}$

1. بين أن : $\forall x \in [1; +\infty[\quad f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}$

2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(2) = 1$

أجوبة:

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} \quad (1)$$

نعلم أن : $x \in [1; +\infty[$ إذن : $x \geq 1$ يعني $x-1 \geq 0$

$$|x-1| = x-1$$

إذن

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1) \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \text{ يعني } f(x) = x\sqrt{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = ((x-1)^3)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

إذن

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$k \in \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3 + k$$

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كالآتي:

$$f(x) = \frac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2+4)^2}$$

1. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c$$

2. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f

3. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(0) = c$

أجوبة:

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c = \frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2} = \frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2} \text{ بالمقارنة مع الكتابة :}$$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

