Lycée Azaiz El Khouja - Kélibia ❖❖❖ **DEVOIR DE SYNTHESE N°1** ❖❖❖	Classe: 4ème Math Epreuve: Mathématiques Durée: 3h — Date:9/12/2013

EXERCICE N°1 (3 points) : **Répondre par vrai ou faux en justifiant:**

1) Soit $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors un argument de z est : $\frac{2\pi}{3}$

2) Soit f l'isométrie du plan d'expression complexe : $z' = -i\overline{z} + 2$ alors f est sans point fixe .

3) Soit l' équation (E) : $z^2-2z+m = 0$ à inconnue complexe z ($m \in \mathbb{C}$) . Dans le plan complexe muni d'un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, M_1 et M_2 sont les images des solutions de (E) et I le milieu de $[M_1M_2]$ alors $z_I = 1$

4) Deux nombres complexes non nuls ayant même module et même partie imaginaire sont égaux.

EXERCICE N°2 (5 points) :

Dans l'annexe ci-joint, on considère le triangle ABC rectangle et isocèle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ et les deux triangles ACD et ABE isocèles et rectangles en A . On désigne par I, J , K les milieux respectifs de [CD], [AC] , [AD] et par O le symétrique de A par rapport à I .

Soit f une isométrie qui envoie A sur D et C sur A

1)On suppose que f fixe un point

a)Montrer que f est une rotation de centre I dont on précisera l'angle

b)Construire le point F = f (B)

c)Montrer que A est le milieu de [CF]

2)Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et g = f o R

a)Déterminer g(E)

b)Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $f = S_{\Delta'} o S_{(AI)}$ et $R = S_{(AI)} o S_{\Delta}$

c)En déduire la nature de g

d)Montrer que AEFD est un parallélogramme

3)On suppose que f n'a pas de point fixe et que $f(O) = F$. On considère l'isométrie $h = t_{\overrightarrow{CA}} \text{ o } S_{(CD)}$

a)Caractériser l'isométrie $t_{\overrightarrow{IA}} \text{ o } S_{(CD)}$ et en déduire la nature de h

b)Déterminer $h(A)$, $h(C)$ et $h(O)$

c)En déduire que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera

EXERCICE N°3 *(7 points) :*

A –Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b)Dresser la tableau de variation de f

c)En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera

2)a)montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α et que $\frac{1}{2}<\alpha<1$

b)Montrer que f^{-1} est dérivable à gauche en 1 déterminer $(f^{-1})'(1)$

c) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$

3)Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}=f(U_n)$

a)Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{2}\le U_n\le 1$

b)Montrer que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ on a $|f'(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\alpha|$

d)En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE N°3 *(5 points) :*

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$

1)Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[1,+\infty[$

2)Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$

3)Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=-x+f^{-1}\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)$

a)montrer que g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$

b)En déduire que pour tout $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ on a $f^{-1}\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)=x-\frac{\pi}{4}$

ANNEXE