PREGUNTA N.° 1

Sea $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$ de modo que

$$\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}=\frac{4}{5x+y}$$

El valor de $\dfrac{x+2y}{2x-y}$ es

A) $\dfrac{7}{9}$ B) 1 C) $\dfrac{9}{7}$

D) 2 E) $\dfrac{19}{7}$

Resolución

Tema: Productos notables

Tenga en cuenta que

- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $x^2=0$ si $x=0$

Análisis y procedimiento

En la igualdad

$$\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}=\frac{4}{5x+y}$$

Consideramos

$3x-2y=a$

$2x+3y=b$

$\rightarrow$ $5x+y=a+b$

Reemplazamos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{a+b}$$

Operamos

$a^2-2ab+b^2=0$

$(a-b)^2=0 \rightarrow a=b$

Volvemos a las variables iniciales.

$3x-2y=2x+3y$

$\rightarrow$ $x=5y$

Nos piden

$$\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{5y+2y}{2(5y)-y}=\frac{7y}{9y}$$

$$\therefore \frac{x+2y}{2x-y}=\frac{7}{9}$$

Respuesta

$\dfrac{7}{9}$

PREGUNTA N.° 2

Una raíz de ecuación $x^4+mx^2-2(m+2)$ es el triple de otra raíz, entonces uno de los valores de m es

A) –26 B) –25 C) –20

D) –15 E) –10

Resolución

Tema: Ecuación bicuadrada

En la ecuación

$$ax^4+bx^2+c=0; \quad abc\neq 0$$

las raíces toman la siguiente forma:

$$\boxed{\alpha; \ -\alpha; \ \beta; \ -\beta}$$

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$x^4+mx^2-2(m+2)=0$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & -2 \\ x^2 & m+2 \end{array}$$

$$\left(x^2-2\right)\left(x^2+m+2\right)=0$$

$$\rightarrow \ x^2=2 \ \vee \ x^2=-m-2$$

$$\rightarrow \ x=\pm\sqrt{2} \ \vee \ x=\pm\sqrt{-m-2}$$

Por dato, una raíz es el triple de la otra raíz.

Entonces consideramos

$$3\sqrt{2}=\sqrt{-m-2} \ \vee \ \sqrt{2}=3\sqrt{-m-2}$$

$$18=-m-2 \qquad 2=9(-m-2)$$

$$\therefore \ m=-20 \ \vee \ m=\frac{-20}{9}$$

Respuesta

-20

PREGUNTA N.° 3

Sea f una función definida por

$$f(x)=\begin{cases} -(x-2)^2+2; \ 0\leq x\leq 2 \\ -(x-4)^2+6; \ 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

Determine la función inversa de f.

A) $f^*(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x}+2; \ -2\leq x\leq 2 \\ \sqrt{6-x}+4; \quad 2\leq x\leq 6 \end{cases}$

B) $f^*(x)=\begin{cases} \sqrt{x-4}+2; \ 0\leq x\leq 4 \\ \sqrt{6-x}+1; \ 4\leq x\leq 6 \end{cases}$

C) $f^*(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}+2; \ 0\leq x\leq 1 \\ \sqrt{3-x}+4; \ 1\leq x\leq 3 \end{cases}$

D) $f^*(x)=\begin{cases} \sqrt{5x-1}+2; \ 0\leq x\leq \frac{1}{5} \\ \sqrt{3-x} \quad ; \ \frac{1}{5}\leq x\leq 3 \end{cases}$

E) $f^*(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{2-x}; \ -2\leq x\leq 2 \\ 4-\sqrt{6-x}; \quad 2\leq x\leq 6 \end{cases}$

donde f^* es la inversa de la función f.

Resolución

Tema: Función inversa

Sea f una función. Si tiene inversa se denota por f^* y se cumple que

- $y=f(x) \leftrightarrow f^*(y)=x$
- $\mathrm{Dom}f^*=\mathrm{Ran}f$

Análisis y procedimiento

Como

$$f(x)=\begin{cases} -(x-2)^2+2; 0\leq x\leq 2 \\ -(x-4)^2+6; 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

determinemos la inversa para cada subregla:

I) Sea

$$y=-(x-2)^2+2; -0\leq x\leq 2$$

$$(x-2)^2=-y+2$$

$$\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{2-y}$$

$$|x-2|=\sqrt{2-y}$$

Como $0 \leq x \leq -2 \rightarrow -2 \leq x-2 \leq 0$, se tiene que

$$-x+2=\sqrt{2-y}$$

$$x=2-\sqrt{2-y}$$

$$\rightarrow\ f^*(x)=2-\sqrt{2-x}$$

Hallemos Dom(f^*)

Por dato: $0 \leq x \leq 2$

$$-2 \leq x-2 \leq 0$$

$$0 \leq (x-2)^2 \leq 4$$

$$0 \geq -(x-2)^2 \geq -4$$

$$2 \geq \underbrace{-(x-2)^2+2}_{f(x)} \geq -2$$

$f(x) \in [-2; 2]=\text{Ran}f$

$\rightarrow$ Dom$f^*(x)=[-2; 2]$

II) Sea

$$y=-(x-4)^2+6;\ 2 \leq x \leq 4$$

$$(x-4)^2=6-y$$

$$\sqrt{(x-4)^2}=\sqrt{6-y}$$

$$|x-4|=\sqrt{6-y}$$

Como $2 \leq x \leq 4\ \rightarrow\ -2 \leq x-4 \leq 0$

$$\rightarrow\ -x+4=\sqrt{6-y}$$

$$x=4-\sqrt{6-y}$$

$$\rightarrow\ f^*(x)=4-\sqrt{6-x}$$

Hallemos Dom(f^*)

$$2 \leq x \leq 4$$

$$-2 \leq x-4 \leq 0$$

$$0 \leq (x-4)^2 \leq 4$$

$$0 \geq -(x-4)^2 \geq -4$$

$$6 \geq \underbrace{-(x-4)^2+6}_{f(x)} \geq 2$$

$f(x) \in [2; 6]=\text{Ran}f\ \rightarrow\ \text{Dom}f^*=[2; 6]$

Respuesta

$$f^*(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{2-x};\ -2 \leq x \leq 2 \\ 4-\sqrt{6-x};\ 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

PREGUNTA N.° 4

Señale al alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Toda recta en el plano XY representa a una función lineal.

II. Toda función f: $A \rightarrow B$ sobreyectiva es una función inyectiva.

III. Si $f \subset A \times B$ es una relación tal que para cada par (x, y); $(x, z) \in f$ implica $y=z$. Entonces f es una función inyectiva.

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FVF

E) FFF

Resolución

Tema: Funciones

Recuerde que

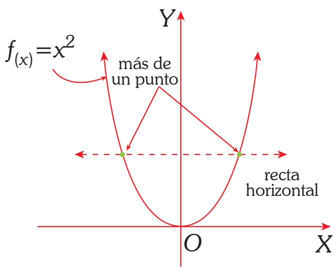
- Una función lineal es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x)=ax+b$; $a \neq 0$.
- Una función f: $A \rightarrow B$ es sobreyectiva si Ran$f=B$.
- Al gráfico de una función inyectiva, cualquier recta horizontal lo corta a lo más en un punto.

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**

No toda recta en el plano XY representa una función lineal. Por ejemplo, la función $f(x)=2$ representa una recta horizontal, pero no es una función lineal.

II. **Falsa**
Hay funciones sobreyectiva que también son inyectivas y otras que no lo son. Por ejemplo, la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+{}_0$, tal que $f(x)=x^2$ es una sobreyectiva, pero no es inyectiva.



Su rango es $\mathbb{R}^+{}_0$ y, por ende, es sobreyectiva. Hay una recta horizontal que interseca a la G_f en más de un punto, entonces no es inyectiva.

III. **Falsa**
La condición $(x; y)$, $(x; z) \in f$ implica $y=z$ garantiza que la relación f sea una función, pero no que sea inyectiva.
Para que f sea una función inyectiva se debe añadir la condición
$(a; b)$, $(c; b) \in f$ implica $a=c$

Respuesta
FFF

PREGUNTA N.° 5

Indique la alternativa correcta después de determinar si dicha proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. $\sum\limits_{k=0}^{100}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4k}=100$

II. El módulo del número complejo $w=\frac{(1,2)(3,4)}{(2,1)}$ es 5.

III. La suma de los números complejos que satisfacen la ecuación $(x+1)^2+2i=4+(3+y)i$ es $(-2; -2)$

A) VVV B) FVF C) FFV
D) FVV E) FFF

Resolución

Tema: Números complejos

Recuerde que

1. $\frac{1+i}{1-i}=i$

2. $i+i^2+i^3+\ldots+i^{4k}=0,\ k\in\mathbb{Z}^+$

3. El complejo $Z=a+bi$ también se representa como $Z=(a; b)$, donde a, $b\in\mathbb{R}$.

4. El módulo de $Z=(a; b)$ es $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**
Tomando en cuenta que $\frac{1+i}{1-i}=i$ tendremos

$$\sum_{k=0}^{100}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4k}=\sum_{k=0}^{100}(i)^{4k}$$

$$=\underbrace{i^0}_{1}+\underbrace{i^1+i^2+i^3+\ldots+i^{400}}_{0}$$

$$=1$$

II. **Verdadera**

$$w=\frac{(1;2)\cdot(3;4)}{(2;1)}$$

Aplicamos módulo.

$$|w|=\left|\frac{(1;2)\cdot(3;4)}{(2;1)}\right|$$

$$|w|=\frac{|(1;2)|\cdot|(3;4)|}{|(2;1)|}$$

$$|w|=\frac{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|w|=\frac{\cancel{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{25}}{\cancel{\sqrt{5}}}=\sqrt{25}=5$$

III. **Verdadera**

Sea $(x; y)$ el complejo que verifica la ecuación

$$(x+1)^2+2i=4+(3+y)i$$

Igualamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria.

$$(x+1)^2=4 \quad \wedge \quad 2=3+y$$
$$(x+1=2 \quad \vee \quad x+1=-2) \quad \wedge \quad y=-1$$
$$(x=1 \quad \vee \quad x=-3) \quad \wedge \quad y=-1$$

Se obtienen dos complejos.

i. $x=1 \quad \wedge \quad y=-1 \quad \rightarrow \quad (x; y)=(1; -1)$

ii. $x=-3 \quad \wedge \quad y=-1 \quad \rightarrow \quad (x; y)=(-3; -1)$

La suma de estos dos complejos es

$$(1; -1)+(-3; -1)=(-2; -2)$$

Respuesta

FVV

PREGUNTA N.º 6

Dado el conjunto solución

$CS=\langle 0; a\rangle \cup \langle b; \infty\rangle$

de la inecuación $(\ln x-2)(x-1) > 0$

Determine el valor de $E=\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

A) 1 B) e C) 2

D) e^2 E) 3

Resolución

Tema: Inecuación logarítmica

Recuerde que

- $\ln x=\log_e x$
- $\log_b x$ está definido en R cuando $x>0$, $b>0$, $b\neq 1$

Análisis y procedimiento

Analizamos la inecuación

$$(\ln x-2)(x-1)>0$$

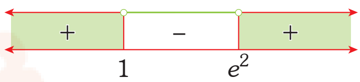
Paso 1

Igualamos a cero y hallamos los puntos críticos.

- $\ln x-2=0 \quad \rightarrow \quad \ln x=2$
  $\quad \rightarrow \quad x=e^2$
- $x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=1$

Paso 2

Ubicamos los valores e^2 y 1 en la recta y hacemos análisis de signos.

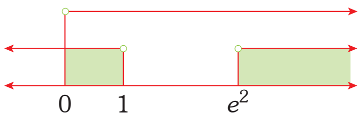


Paso 3

Se obtiene $x\in\langle -\infty; 1\rangle \cup \langle e^2; +\infty\rangle$

Paso 4

Para que $\ln x$ esté definido en $\mathbb{R}$ se debe añadir la condición $x>0$.



Se tiene

$$x\in\langle -\infty; 1\rangle \cup \langle e^2; +\infty\rangle \quad \wedge \quad x>0$$

Intersecamos y obtenemos como conjunto solución

$$CS=\langle 0; 1\rangle \cup \langle e^2; +\infty\rangle$$

De donde, $a=1$ y $b=e^2$

$$\therefore \quad E=\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\ln e^2=2\underbrace{\ln e}_{1}=2$$

Respuesta

2

PREGUNTA N.° 7

Sea A una matriz de orden 3×3 tal que $A^3=-I$, I matriz identidad. La adjunta de la matriz A^{10}, Adj (A^{10}), es igual a:

A) A
B) $-A$
C) $|A|A^{-1}$
D) $-|A|A^{-1}$
E) $-|A|A$

Resolución

Tema: Matrices

Tenga en cuenta que

- $|-A|=(-1)^n\cdot|A|$, donde n: orden de A.
- Adj $(A)=|A|\cdot A^{-1}$, donde $|A|\neq 0$.
- $(\lambda\cdot A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}$, donde $\lambda\neq 0$; $|A|\neq 0$.

Análisis y procedimiento

Como $A^3=-I$, entonces

$A^{10}=(A^3)^3\cdot A=(-I)^3\cdot A=-I\cdot A=-A$

Luego

$$\begin{aligned}\text{Adj }(A^{10})&=\text{Adj}(-A)\\&=|-A|\cdot(-A)^{-1}\\&=(-1)^3\cdot|A|\cdot\frac{1}{(-1)}\cdot A^{-1}\\&=|A|\cdot A^{-1}\end{aligned}$$

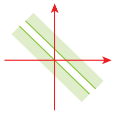
Respuesta

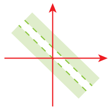
$|A|A^{-1}$

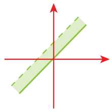
PREGUNTA N.° 8

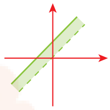
Identifique el gráfico que mejor representa al conjunto solución del sistema.

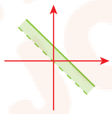
$x+y>0$
$-3x-3y\geq -6$

A)


B)


C)


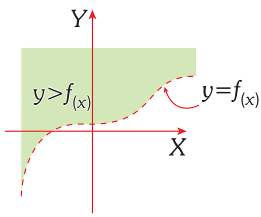
D)


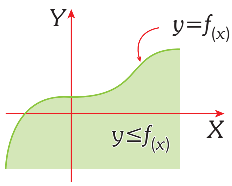
E)


Resolución

Tema: Gráficas de relaciones

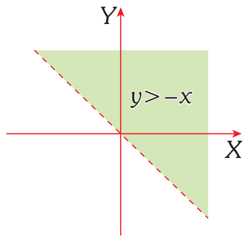
Recuerde la representación gráfica de las relaciones $y>f_{(x)}$ e $y\leq f_{(x)}$.





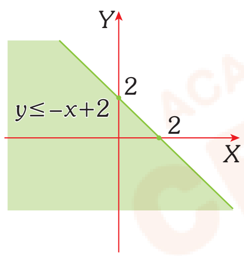
Análisis y procedimiento

I. $x+y>0 \leftrightarrow y>-x$

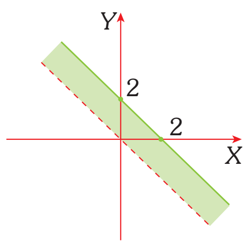


II. $-3x-3y \geq -6 \leftrightarrow x+y \leq 2$

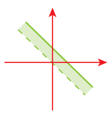
$\leftrightarrow y \leq -x+2$



III. Para obtener el conjunto solución del sistema, intersecamos las regiones I y II y obtenemos



Respuesta



PREGUNTA N.° 9

Dadas las siguientes proposiciones:

I. En un problema de programación lineal, el valor óptimo de la función objetivo es alcanzado en un vértice de la región admisible.

II. Si a la región admisible de un problema de programación lineal se le adiciona una nueva restricción de la forma $ax+by \leq c$, el valor óptimo de la función objetivo no varía.

III. Si (x^*, y^*) es la solución de un problema de maximización y z^* es el valor óptimo, se tiene entonces que $z^* \geq ax+by$ para todo (x, y) en la región admisible, ($ax+by$ es la función objetivo).

Son correctas

A) solo I
B) I y II
C) I y III
D) solo III
E) I, II y III

Resolución

Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

I. **Correcta**

Se sabe el siguiente teorema:

Si z_0 es valor óptimo de $f_{(x;\, y)}$, sujeto a un conjunto de restricciones R, entonces existe un vértice $(x_0;\, y_0)$ de la región admisible R, tal que $z_0=f_{(x_0;\, y_0)}$.

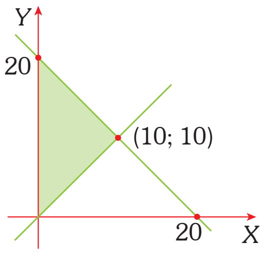
II. **Incorrecta**

Mostraremos el siguiente contraejemplo

$$\text{máx } f_{(x;\, y)}=3x+y$$

Sujeto a

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \end{cases}$$



El valor óptimo es

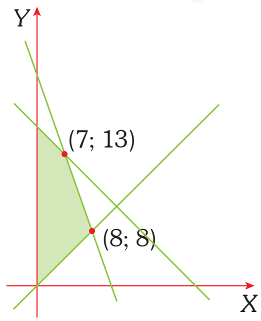
$$\text{máx } f_{(x;\ y)} = f_{(10;\ 10)} = 40$$

Si adicionamos la nueva restricción $5x+y \leq 48$, obtenemos

$$\text{máx } f_{(x;\ y)} = 3x + y$$

Sujeto a

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 20 \\ 5x + y \leq 48 \\ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \end{cases}$$



El valor óptimo es

$$\text{máx } f_{(x;\ y)} = f_{(7;\ 13)} = 34$$

Vemos que el valor óptimo sí varía.

III. **Correcta**

Si $z^* = \text{máx } f_{(x;\ y)} = f_{(x^*;\ y^*)}$,

entonces $z^* \geq f_{(x;\ y)}$ para todo $(x;\ y) \in R$.

Luego, $z^* \geq ax + by$ para todo $(x;\ y)$ en la región admisible R.

Por lo tanto, son correctas I y III.

Respuesta

I y III

PREGUNTA N.º 10

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Sea f una función polinomial y (x_n) una sucesión convergente. Entonces la sucesión (y_n), donde $y_n = f(x_n)$, es convergente.

II. Para todo $x \in \langle -1,\ 1\rangle$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{x-1}$$

III. Toda sucesión alternante es convergente.

A) VVF
B) VFV
C) VFF
D) FFF
E) FFV

Resolución

Tema: Sucesiones

Recuerde que

- Una sucesión (x_n) es convergente si existe $L \in \mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L;\ L \in \mathbb{R}$.

- Si f es una función continua

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right)$$

Análisis y procedimiento

I. **Verdadera**

Como (x_n) es convergente

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L;\ L\in\mathbb{R}$$

En la sucesión $y_n = f(x_n)$

Aplicamos límite.

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

Como toda función polinomial es continua

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = f(L)$$

Finalmente, y_n converge a $f(L)$.

II. **Falsa**

Como $x\in\langle -1;\ 1\rangle$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \underbrace{1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots}_{\text{serie geométrica}} = \frac{1}{1-x}$$

III. **Falsa**

Veamos un contraejemplo

Sea

$$x_n = \begin{cases} 1;\ n \text{ par} \\ -1;\ n \text{ impar}\end{cases}$$

Esta sucesión

$$x_n = \{-1; 1; -1; 1; -1; 1; \ldots\}$$

es alternante; sin embargo, divergente.

Por lo tanto, la secuencia correcta es VFF.

Respuesta

VFF

PREGUNTA N.° 11

Considere CS el conjunto solución de la siguiente inecuación

$\log\sqrt[4]{x} < \sqrt{\log x}$, con $x<10$.

Determine el valor de

$M=\text{card}(\text{CS}\cap\mathbb{Z})$,

donde card denota la cardinalidad de un conjunto.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Tema: Inecuación logarítmica

Tenga en cuenta que en el conjunto de los números reales

- $\log_b x$ está definido si $x>0 \wedge b>0 \wedge b\neq 1$
- $\log_b x < n,\ b>1 \ \rightarrow\ x<b^n$
- $\log_b x < m,\ b<1 \ \rightarrow\ x>b^m$

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$\log\sqrt[4]{x} < \sqrt{\log x},\ x<10$$

Primero hallemos el CVA.

- $\sqrt[4]{x}>0 \rightarrow x>0$
- $\log x>0 \rightarrow x>1$
- CVA$=\langle 1;\ 10\rangle$

Luego, al resolver la inecuación

$$\log\sqrt[4]{x} < \sqrt{\log x}$$

tenemos que

$$\log x^{\frac{1}{4}} < \sqrt{\log x}$$

$$\left(\frac{1}{4}\log x\right)^2 < \left(\sqrt{\log x}\right)^2$$

$$\log^2 x < 16\log x$$

$$\log x(\log x - 16) < 0$$

$$0 < \log x < 16$$

$$10^0 < x < 10^{16}$$

$$1 < x < 10^{16}$$

Intersecamos con el CVA

$\rightarrow$ CS=$\langle 1; 10\rangle$

Ahora

CS $\cap \mathbb{Z}$={2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Piden

M=card(CS $\cap \mathbb{Z}$)

$\therefore$ M=8

Respuesta

8

PREGUNTA N.º 12

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$x+2Ky+z=4$

$x-y-z=-8$

$-x+y+Kz=6$

Determine el o los valores de K para que el sistema tenga solución única.

A) $\mathbb{R}\setminus\left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

B) $\mathbb{R}\setminus\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

C) $\mathbb{R}\setminus\{2; -1\}$

D) $\mathbb{R}-\{-2; 1\}$

E) $1; \frac{1}{2}$

Resolución

Tema: Sistema de ecuaciones lineales

Consideremos lo siguiente:

Para que el sistema

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

tenga única solución

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Análisis y procedimiento

En el sistema

$$x+2Ky+z=4$$
$$x-y-z=-8$$
$$-x+y+Kz=6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2K & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & K \end{vmatrix} \neq 0$$

$$K+1-2K^2 \neq 0$$

$$2K^2-K-1 \neq 0$$

$$(2K+1)(K-1) \neq 0$$

$$K \neq -\frac{1}{2} \vee K \neq 1$$

$$\therefore\ K \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$$

Respuesta

$\mathbb{R}\setminus\left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

PREGUNTA N.º 13

El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Así un diamante cuyo peso es 1,5 gramos cuesta S/.18 000. Si este diamante se parte en dos pedazos, ¿cuál sería el peso (en gramos) de cada parte para tener un precio total óptimo?

A) 0,3 y 1,2

B) 0,5 y 1

C) 0,6 y 0,9

D) 0,7 y 0,8

E) 0,75 y 0,75

Resolución

Tema: Magnitudes proporcionales

Sean A y B dos magnitudes.

$$A \text{ DP } B, \leftrightarrow \frac{(\text{Valor de } A)}{(\text{Valor de B})} = \text{cte.}$$

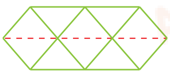
Análisis y procedimiento

Dato

$$\text{Precio DP (Peso)}^2 \to \frac{(\text{precio})}{(\text{peso})} = \text{cte.}$$

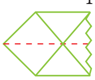
Del enunciado

S/. 18 000



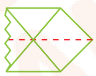
1,5 g

S/. P_1



w g

S/. P_2



$(1{,}5-w)$ g

Se cumple

$$\frac{18\ 000}{1{,}5^2} = \frac{P_1}{w^2} = \frac{P_2}{(1{,}5-w)^2}$$

$$\frac{18\ 000}{1{,}5^2} = \underbrace{\overbrace{\frac{P_1}{w^2} = \frac{P_2}{(2{,}25-3w+w^2)}}^{+}}_{+}$$

$$\frac{18\ 000}{2{,}25^2} = \frac{P_1+P_2}{2{,}25-3w+2w^2}$$

$$8000 = \frac{P_1+P_2}{\dfrac{9}{4}-3w+2w^2}$$

$$P_1+P_2 = 8000\left(\frac{9}{4}-3w+2w^2\right)$$

$$P_1+P_2 = 16\ 000\left(w^2-\frac{3}{2}w+\frac{9}{8}\right)$$

$$P_1+P_2 = 16\ 000\left(w-\frac{3}{4}\right)^2 + 9000 \qquad (*)$$

Recordemos que w es un número real mayor que cero, pero menor que 1,5; entonces podemos afirmar que

$$\left(w-\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0 \quad \times 16\ 000$$

$$16\ 000\left(w-\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0 \quad +9000$$

$$\underbrace{16\ 000\left(w-\frac{3}{4}\right)^2 + 9000}_{P_1+P_2} \geq 9000$$

$$P_1+P_2 \geq 9000$$

$\therefore\ (P_1+P_2)$ mínimo es 9000.

Reemplazamos en (*) el valor mínimo que toma P_1+P_2.

$$9000 = 16\ 000\left(w-\frac{3}{4}\right)^2 + 9000$$

$$w = \frac{3}{4}$$

$\therefore\ w=0{,}75$

Entonces el peso, en gramos, de cada parte debe ser 0,75 y 1,5−0,75=0,75 para que la suma de los precios de cada parte sea mínima.

Nota

La pregunta del problema indica: "¿Cuál sería el peso (en gramos) de cada parte para tener un precio total óptimo?" Debería decir: ¿Cuál sería el peso (en gramos) de cada parte para que la suma de los precios de cada parte sea mínima?".

Respuesta

0,75 y 0,75

PREGUNTA N.° 14

20 escolares asisten al centro recreacional Huampaní, los cuales llevan celular, cámara o ambos. Se sabe que 5 escolares llevan ambos accesorios y la proporción de escolares con solo cámara es a los escolares con solo celulares como 1 es a 2. Se forman grupos de 5 estudiantes para competir en diversos juegos. ¿De cuántas maneras se pueden formar los grupos que tengan un accesorio solamente del mismo tipo?

A) 250 B) 251 C) 252
D) 253 E) 254

Resolución

Tema: Análisis combinatorio

Tenga en cuenta que

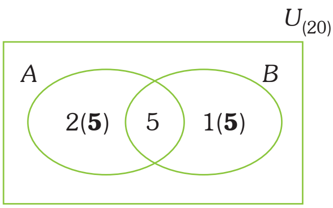
$$\boxed{C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!};\ 0\le r\le n}$$

Análisis y procedimiento

Considere que

A: conjunto de escolares que llevan celular

B: conjunto de escolares que llevan cámara



Piden

M: total de maneras diferentes de elegir a 5 escolares para que compitan en diversos juegos, de tal manera que cada uno de los integrantes del grupo tenga solamente un accesorio del mismo tipo.

Luego

$$M:\ \underbrace{\left(\text{Elegir a 5 escolares, de tal forma que cada uno de ellos tenga solo celular.}\right)}_{\left(\text{N.° de formas}\right)=C_5^{10}}\ \text{o}\ \underbrace{\left(\text{Elegir a 5 escolares, de tal forma que cada uno de ellos tenga solo cámara.}\right)}_{+\ C_5^5}$$

$$=\frac{10!}{5!(10-5)!}+\frac{5!}{5!(5-5)!}$$

$$=252+1$$

(N.° de formas)$=253$

Nota

En el enunciado dice: "Se forman grupos de 5 estudiantes para competir en diversos juegos. ¿De cuántas maneras se pueden formar los grupos que tengan un accesorio solamente del mismo tipo?".

Debería decir: "¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir a 5 estudiantes de dicho grupo de escolares, de tal forma que cada uno de los integrantes del grupo tenga solamente un accesorio del mismo tipo?".

Respuesta

253

PREGUNTA N.° 15

En un avión el número $\overline{abc}$ de personas que viajan satisface $150<\overline{abc}<300$ de los cuales $\overline{a0c}$ son hombres y $\overline{ab}$ son mujeres, siendo pasajeros, además son c aeromozas y a pilotos. Determine la suma de los dígitos luego de calcular cuántos hombres más que mujeres hay en el avión en total.

A) 9
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

Resolución

Tema: Cuatro operaciones

Análisis y procedimiento

Por dato

$\overline{abc}$: n.º total de personas

$150 < \overline{abc} < 300$

$\rightarrow\ a=1$ o 2

Luego, si $a=1$ y $b > 5$
entonces

$$\begin{array}{lr}
\bullet \text{ N.º de hombres} \rightarrow & \overset{1}{1\,0\,c} \;+ \\
\bullet \text{ N.º de mujeres} \rightarrow & 1\,b \\
\bullet \text{ N.º de aeromozas} \rightarrow & c \\
\bullet \text{ N.º de pilotos} \rightarrow & 1 \\
\hline
 & 1\,b\,c \\
 & \underset{2}{}\ \ b+c=9 \\
 & \ \ \ 2\quad 7
\end{array}$$

$\rightarrow\ \overline{abc}=127\ (150 < \overline{abc} < 300)$ (no cumple)

Si $a=2$
entonces

$$\begin{array}{lr}
\bullet \text{ N.º de hombres} \rightarrow & \overset{1}{2\,0\,c} \;+ \\
\bullet \text{ N.º de mujeres} \rightarrow & 2\,b \\
\bullet \text{ N.º de aeromozas} \rightarrow & c \\
\bullet \text{ N.º de pilotos} \rightarrow & 2 \\
\hline
 & 2\,b\,c \\
 & \underset{3}{}\ \ b+c=8 \\
 & \ \ \ 3\quad 5
\end{array}$$

$\rightarrow\ \overline{abc}=235$ (cumple)

Luego

$$\begin{pmatrix}\text{total de}\\\text{hombres}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{total de}\\\text{mujeres}\end{pmatrix}=(205+2)+(23+5)=179$$

Por lo tanto, la suma de cifras de 179 es $1+7+9=17$.

Respuesta

17

PREGUNTA N.º 16

Determine el valor de $(a+b+c)$ si

$\overline{a1a}+\overline{a2a}+\overline{a3a}+...+\overline{a9a}=\overline{bcd4}$

A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 22

Resolución

Tema: Cuatro operaciones

En una adición se tiene

$$\boxed{\underbrace{A+B+C}_{\text{sumandos}}=\underbrace{S}_{\text{suma}}}$$

Análisis y procedimiento

Escribimos la adición dada de forma vertical.

$$\left.\begin{array}{r}
\overset{5\ \ 5\ \ 5}{a\ 1\ a} \;+ \\
a\ 2\ a \\
a\ 3\ a \\
\vdots \\
a\ 9\ a
\end{array}\right\}\text{9 sumandos}$$

$$\begin{array}{r}
\hline
b\ c\ d\ 4 \\
5\ 9\ 0
\end{array}$$

$\underbrace{a+a+a+...+a}_{\text{9 sumandos}}=...4$

$9a=\underset{6}{5}4$

$\underbrace{5+1+2+...+9}_{45}=50$

$5+\underbrace{a+a+...+a}_{\text{9 sumandos}}=5+9\underset{(6)}{a}=59$

Luego

$a=6;\ b=5;\ c=9;\ d=0$

$\therefore\ a+b+c=20$

Respuesta

20

PREGUNTA N.° 17

En la diferencia que se muestra $9^{1001}-7^{1001}=...a$, donde la cifra de las unidades es a. Halle a^3+a^2+2.

A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16

Resolución

Tema: Teoría de divisibilidad

Se cumple que

$$\left.\begin{array}{l}(...0)^k=...0\\(...1)^k=...1\\(...5)^k=...5\\(...6)^k=...6\end{array}\right\}\forall\ k\in\mathbb{Z}^+$$

Análisis y procedimiento

Hallamos el valor de a en la expresión.

$$9^{1001}-7^{1001}=...a \qquad (*)$$

Analizamos por separado.

- $9^{1001}=(9^2)^{500}\cdot 9$
  $=(81)^{500}\times 9$
  $=(...1)\times 9$
  $=...9$

- $7^{1001}=(7^4)^{250}\cdot 7$
  $=(2401)^{250}\times 7$
  $=(...1)^{250}\times 7$
  $=...7$

Reemplazamos en (*).

$$\underbrace{9^{1001}}_{...9}-\underbrace{7^{1001}}_{...7}=...a$$
$$...9\ -\ ...7\ =...2$$

Entonces $a=2$.

Nos piden

$$a^3+a^2+2=2^3+2^2+2=14$$

$$\therefore\ a^3+a^2+2=14$$

Respuesta

14

PREGUNTA N.° 18

Sea $\overline{ab}$ un número primo mayor que 40. Determine el número de divisores que tiene el número $\overline{ababab00}$.

A) 121
B) 144
C) 288
D) 432
E) 576

Resolución

Tema: Clasificación de los enteros positivos

Dado $N=\underbrace{a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}}_{\substack{\text{descomposición}\\ \text{canónica (DC)}}}$

Su cantidad de divisores se calcula como

$$\mathrm{CD}(N)=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

Análisis y procedimiento

Se tiene el número

$$N=\overline{ababab00}=\overline{ab}\times 10^6+\overline{ab}\times 10^4+\overline{ab}\times 10^2$$

$$N=1\ 010\ 100\times\overline{ab}$$

$$N=\underbrace{2^2\cdot 5^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37}_{\text{DC de }1\,010\,100}\cdot\overline{ab}$$

$\overline{ab}$ es un primo mayor que 40, entonces

$\overline{ab}=41;\ 43;\ 47;\ ...$

Luego, se tiene

$$N=2^2\times 5^2\times 3\times 7\times 13\times 37\times\overline{ab}...\ \text{(DC)}$$

Se concluye que N tiene 7 divisores primos.

Nos piden

$$\text{CD}(N)=(2+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)$$

$$\text{CD}(N)=3\times 3\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=288$$

Respuesta

288

PREGUNTA N.° 19

Sea A un número entero positivo de 10 cifras y $B=\overline{0,abcdefg}$ donde $g\neq 0$. Del producto AB se afirma que

I. es un entero.

II. puede ser entero que tiene dos cifras.

III. puede ser un entero con parte entera no nula y parte decimal no nula.

¿Cuáles de estas afirmaciones son verdaderas?

A) solo I

B) solo II

C) solo III

D) I y II

E) II y III

Resolución

Tema: Cuatro operaciones

Análisis y procedimiento

Sabemos que

A es un número entero positivo de 10 cifras.

$B=\overline{0,abcdefg}$ (0,0000001; 0,0000002; 0,0000003; ...; 0,9999999)

Podemos indicar que

$$10^9\leq A<10^{10}$$

$$\frac{1}{10^7}\leq B<1$$

Luego

$$\underbrace{10^9\times\frac{1}{10^7}}\leq A\times B<\underbrace{10^{10}\times 1}$$

$$10^2\leq A\times B<10^{10}$$

Entonces

I. **Falsa**

Contraejemplo

Sea $A=9999999998$ y $B=0,0000001$

$\rightarrow A\times B=9999999998\times 0,0000001=\underbrace{999,9999998}_{\text{Es un número decimal.}}$

Por lo tanto, $A\times B$ puede ser un número decimal, no necesariamente es un número entero.

II. **Falsa**

Debido a que $100\leq A\times B<10^{10}$, notamos que el mínimo valor de $A\times B$ es 100 y 100 es un número de 3 cifras. Por lo tanto, $A\times B$ no puede ser un número de 2 cifras.

III. **Verdadera**

Ejemplo

Sea $A=9999999998$ y $B=0{,}0000001$

$$\rightarrow A\times B=9999999998\times 0{,}0000001=\underbrace{999{,}9999998}_{\text{Es un número decimal con parte entera no nula.}}$$

Por lo tanto, $A\times B$ puede ser un número decimal con parte entera no nula.

Nota

La proposición III dice: "puede ser un entero con parte entera no nula y parte decimal no nula".

Debería decir: "puede ser un decimal con parte entera no nula".

Respuesta

solo III

PREGUNTA N.° 20

Dada la sucesión

$$a_1=\sqrt{3};a_2=\sqrt{3\sqrt{3}};a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}};a_n=\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3...}}}}_{n\text{ radicales}}$$

calcule $E=\dfrac{a_{2003}\cdot a^2{}_{2006}}{a^2{}_{2004}\cdot a_{2005}}$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1

D) $\sqrt{3}$ E) 3

Resolución

Tema: Sucesiones

Análisis y procedimiento

Por dato, se tiene

$$a_1=\sqrt{3}$$

$$a_2=\sqrt{3\sqrt{3}} \rightarrow a_2=\sqrt{3a_1} \rightarrow a_2^2=3a_1$$

$$a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \rightarrow a_3=\sqrt{3a_2} \rightarrow a_3^2=3a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n=\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3...}}}}_{n\text{ radicales}} \rightarrow a_n=\sqrt{3a_{n-1}} \rightarrow a_n^2=3a_{n-1}$$

Entonces

$$a_{2006}^2=3\cdot a_{2005}$$

$$a_{2004}^2=3\cdot a_{2003}$$

Reemplazamos en E.

$$E=\frac{a_{2003}\cdot a_{2006}^2}{a_{2004}^2\cdot a_{2005}}$$

$$E=\frac{\cancel{a_{2003}}\cdot 3\cdot \cancel{a_{2005}}}{3\cdot \cancel{a_{2003}}\cdot \cancel{a_{2005}}}$$

$$E=1$$

Respuesta

1

PREGUNTA N.° 21

Dada la parábola P: $y=x^2$ y la recta $\mathscr{L}$: $x-2y=10$, halle la distancia (distancia mínima) entre ellas.

A) $\dfrac{79\sqrt{5}}{40}$ B) $\dfrac{80\sqrt{5}}{39}$ C) $\dfrac{79\sqrt{5}}{39}$

D) $\dfrac{81\sqrt{5}}{39}$ E) $\dfrac{81\sqrt{5}}{40}$

Resolución

Tema: Secciones cónicas

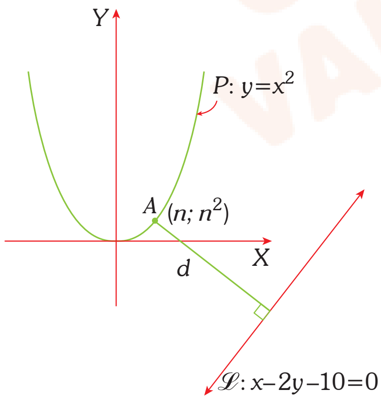
Análisis y procedimiento

Nos piden la distancia mínima entre la parábola (P) y la recta ($\mathscr{L}$).

A partir de los datos

P: $y=x^2$

$\mathscr{L}$: $x-2y-10=0$



Para un punto $A(n; n^2)$, calculamos la distancia d a la recta dada.

$$d=\frac{|n-2n^2-10|}{\sqrt{5}}$$

Analizamos el siguiente caso.

$$d=\frac{2n^2-n+10}{\sqrt{5}}$$

$$d=\frac{2\cdot\left(n-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{79}{8}}{\sqrt{5}}$$

Para que la distancia sea mínima $\left(n-\frac{1}{4}\right)^2=0$, entonces

$$d=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cancel{\left(n-\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{79}{8\cdot\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ d_{\text{mín}}=\frac{79\sqrt{5}}{40}$$

Respuesta

$\dfrac{79\sqrt{5}}{40}$

PREGUNTA N.° 22

Si se cumple que

$$a\cdot\cos^4 x+b\cdot\text{sen}^4 x=\frac{ab}{a+b}$$

calcule el valor de $\tan^2 x$.

A) $\dfrac{a+1}{b}$ B) $\dfrac{b+1}{a}$ C) $\dfrac{b}{a}$

D) $\dfrac{a}{b}$ E) $\dfrac{ab+1}{ab}$

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas fundamentales

- $\text{sen}^4x+\cos^4x=1-2\text{sen}^2x\cos^2x$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Análisis y procedimiento

$$a\cdot\cos^4 x+b\cdot \text{sen}^4 x=\frac{ab}{a+b}$$

$$a^2\cos^4x+b^2\text{sen}^4x+ab(\text{sen}^4x+\cos^4x)=ab$$

$$a^2\cos^4x+b^2\text{sen}^4x+ab(1-2\text{sen}^2x\cos^2x)=ab$$

$$a^2\cos^4x-2ab\,\text{sen}^2x\cos^2x+b^2\text{sen}^4x=0$$

$$a^2\cos^4x-2(a\cos^2x)(b\,\text{sen}^2x)+b^2\text{sen}^4x=0$$

$$(a\cos^2x-b\,\text{sen}^2x)^2=0$$

$$a\cos^2x=b\,\text{sen}^2x$$

$$\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}=\frac{a}{b}$$

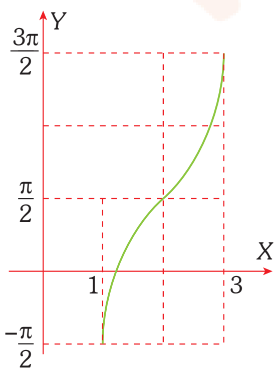
$$\tan^2x=\frac{a}{b}$$

Respuesta

$\frac{a}{b}$

PREGUNTA N.° 23

Sea la función $y=A\cdot \text{arcsen}(Bx+C)+D$; $A, B>0$ con gráfica



Calcule $K=A+B+C\left(\frac{4D}{\pi}\right)$

A) -2

B) -1

C) 0

D) 2

E) 4

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas inversas

$y=\text{arcsen}x$

$\rightarrow -1\leq x\leq 1$

$\rightarrow -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$

Análisis y procedimiento

Sea la función $y=A\text{arcsen}(Bx+C)+D$, donde del gráfico se observa que

$$1\leq x\leq 3 \;\wedge\; -\frac{\pi}{2}\leq y\leq 3\frac{\pi}{2}$$

- $-1\leq Bx+C\leq 1$

$$\frac{-1-C}{B}\leq x\leq\frac{1-C}{B}$$

$$\rightarrow \frac{-1-C}{B}=1 \;\wedge\; \frac{1-C}{B}=3$$

Resolviendo el sistema

$C=-2 \wedge B=1$

- $-\frac{\pi}{2}\leq \text{arcsen}(Bx+C)\leq\frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2}A+D\leq y\leq\frac{\pi}{2}A+D$$

$$\rightarrow -\frac{\pi}{2}A+D=-\frac{\pi}{2} \;\wedge\; \frac{\pi}{2}A+D=\frac{3\pi}{2}$$

Resolviendo el sistema

$$A=2 \wedge D=\frac{\pi}{2}$$

Reemplazamos.

$$k=A+B+C\left(\frac{4D}{\pi}\right)$$

$$k=2+1-2\left(\frac{4\times\frac{\pi}{2}}{\pi}\right) \rightarrow k=-1$$

Respuesta

-1

PREGUNTA N.° 24

Determine el dominio de la función con regla de correspondencia:

$$f(x)=\sqrt[4]{2\sec^2 x-\tan^4 x-3}-4$$

A) $\left\{\frac{n\pi}{4}\Big/ n\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{2n+1}{4}\pi\Big/ n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{n\pi}{2}\Big/ n\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\{n\pi/n\in\mathbb{Z}\}$

E) $\{2n\pi/n\in\mathbb{Z}\}$

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas directas

- $f(x)=\sqrt[2n]{x}\in\mathbb{R} \leftrightarrow x\geq 0 \wedge n\in\mathbb{N}$
- $\forall x\in\mathbb{R} \rightarrow x^2\geq 0$

Análisis y procedimiento

$f(x)$ está definida en $\mathbb{R}$.

$$2\sec^2x-\tan^4x-3\geq 0$$

$$2(1+\tan^2x)-\tan^4x-3\geq 0$$

$$\tan^4x-2\tan^2x+1\leq 0 \quad \times(-1)$$

$$(\tan^2x-1)^2\leq 0$$

Luego, solo es posible

$$\tan^2x-1=0$$

$$\tan^2x=1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=1$$

$$\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=0$$

$$\cos 2x=0$$

$$2x=(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ x=(2n+1)\frac{\pi}{4};\ n\in\mathbb{Z}$$

Respuesta

$\left\{\frac{2n+1}{4}\pi\Big/ n\in\mathbb{Z}\right\}$

PREGUNTA N.° 25

Si para $\phi\in[0,2\pi]$ se tiene

$\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+\operatorname{sen}2\phi=[\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+A]^2+B$,

entonces $(2A+4B)$ es igual a:

A) -1

B) -2

C) -3

D) -4

E) -5

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas del arco doble

Análisis y procedimiento

Nos piden $2A+4B$.

A partir de los datos

$$\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+\operatorname{sen}2\phi=(\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+A)^2+B;$$
$$\phi\in[0;\,2\pi]$$

Analizamos la expresión.

$$f=\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+\operatorname{sen}2\phi+1-1$$
$$f=\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+1+2\operatorname{sen}\phi\cos\phi-1$$
$$f=(\operatorname{sen}\phi+\cos\phi)^2+(\operatorname{sen}\phi+\cos\phi)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1$$
$$f=\left(\operatorname{sen}\phi+\cos\phi+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

Luego en la identidad, se tiene que

$$A=\frac{1}{2}\quad\wedge\quad B=\frac{-5}{4}$$

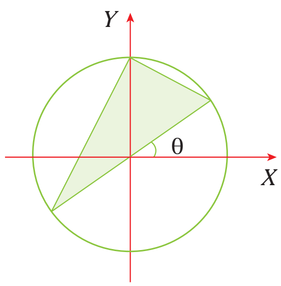
$$\therefore\quad 2A+4B=-4$$

Respuesta

-4

PREGUNTA N.° 26

En el círculo trigonométrico de la figura, determine el área del triángulo sombreado.



A) $\cos\theta$

B) $\sec\theta$

C) $\tan\theta$

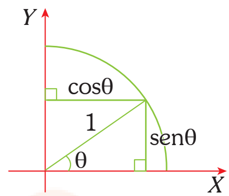
D) $\operatorname{sen}\theta$

E) $\csc\theta$

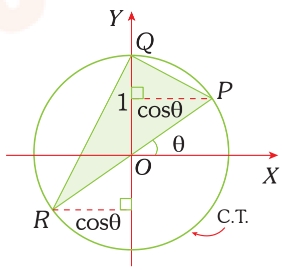
Resolución

Tema: Circunferencia trigonométrica

En una C.T.



Análisis y procedimiento



Piden

$$\mathbb{S}_{\triangle PQR}=\mathbb{S}_{\triangle POQ}+\mathbb{S}_{\triangle QOR}$$

$$=\frac{1\cdot\cos\theta}{2}+\frac{1\cdot\cos\theta}{2}$$

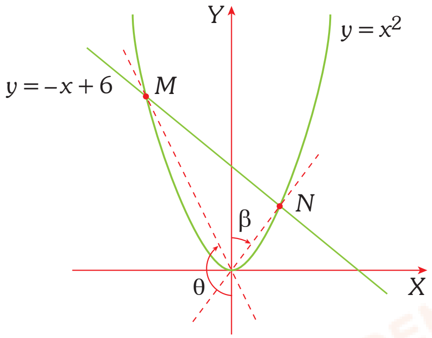
$$=\cos\theta$$

Respuesta

$\cos\theta$

PREGUNTA N.° 27

En el gráfico mostrado M y N son los puntos de intersección entre las gráficas de $y=x^2$ e $y=-x+6$. Calcule $E=2\tan\beta+3\tan\theta$.



A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Resolución

Tema: Identidades de reducción al primer cuadrante

- Para ángulos de la forma $(-x)$
  $\tan(-x)=-\tan x$
- Para ángulos menores que una vuelta
  $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

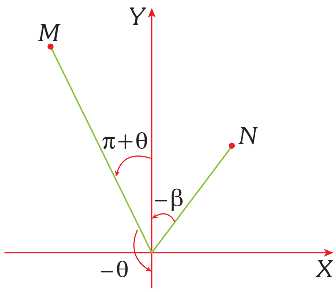
Análisis y procedimiento

Hallamos los puntos de intersección M y N igualando las funciones.

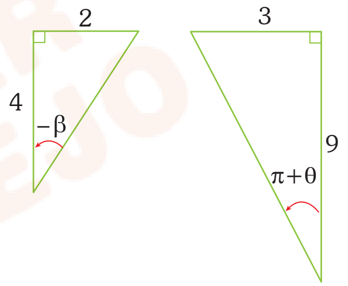
$$x^2=-x+6$$
$$x^2+x-6=0$$
$$(x+3)(x-2)=0$$
$$x+3=0 \quad \vee \quad x-2=0$$
$$x=-3 \qquad\qquad x=2$$

$$M=(-3;\,9) \quad \wedge \quad N=(2;\,4)$$

Cambiamos de sentido a los ángulos.



Luego



$$\tan(-\beta)=\frac{2}{4} \qquad\qquad \tan(\pi+\theta)=\frac{3}{9}$$

$$-\tan\beta=\frac{1}{2} \qquad\qquad \tan\theta=\frac{1}{3}$$

$$\tan\beta=\frac{-1}{2}$$

Finalmente

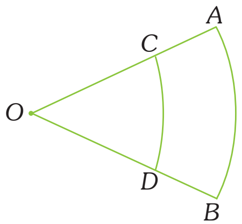
$$E=2\tan\beta+3\tan\theta$$
$$E=\cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)+\cancel{3}\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$
$$E=0$$

Respuesta

0

PREGUNTA N.° 28

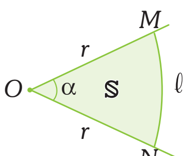
De la figura AOB y COD son sectores circulares. Si las áreas de las regiones COD y $CABD$ son S y $3S$ u^2 respectivamente y $L_{\overset{\frown}{AB}} = 4$ u. Determine la medida del lado OC en función de S.



A) S B) $2S$ C) $3S$
D) $4S$ E) $5S$

Resolución

Tema: Área de una región de un sector circular



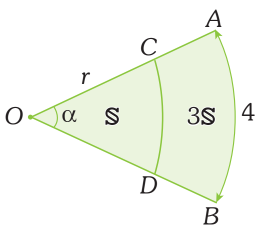
(O: centro)

$$\boxed{\mathbb{S} = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot r^2}$$

$$\boxed{\mathbb{S} = \frac{\ell^2}{2\alpha}}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden la medida del lado OC en función de $\mathbb{S}$.
Analizando el gráfico y los datos tenemos:



I. En el sector COD:

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot r^2$$

$$2\mathbb{S} = \alpha\cdot r^2 \qquad \text{(I)}$$

II. En el sector AOB:

$$4\mathbb{S} = \frac{16}{2\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2}{\mathbb{S}} \qquad \text{(II)}$$

Luego (II) en (I)

$$\cancel{2}\mathbb{S} = \frac{\cancel{2}}{\mathbb{S}}\cdot r^2$$

$$r^2 = \mathbb{S}^2$$

$$r = \mathbb{S}$$

Por lo tanto, el lado OC es $\mathbb{S}$.

Respuesta

$\mathbb{S}$

PREGUNTA N.° 29

La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$ m. Si las medianas relativas a los lados congruentes se cortan perpendicularmente, entonces determine el área del triángulo (en m^2).

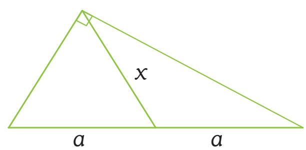
A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

Resolución

Tema: Área de la región triangular

Recuerde que

$x = a$

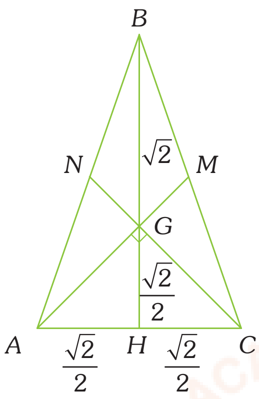


Análisis y procedimiento

Sean las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$; luego, G es baricentro del $\triangle ABC$.

$\triangle AGC$: $GH=AH=CH$

$BG=2(GH)=\sqrt{2}$



Piden

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(\sqrt{2})\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}$$

Respuesta

1,5

PREGUNTA N.° 30

Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos, con centros A, B y C respectivamente, donde $AB=5$ cm, $AC=7$ cm y $BC=8$ cm, $M\in\overline{BC}$ es punto común de tangencia entre dos circunferencias, determine AM en cm.

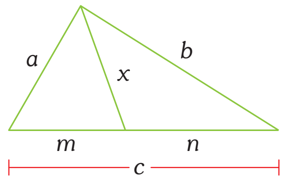
A) $\sqrt{16}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{18}$

D) $\sqrt{19}$ E) $\sqrt{20}$

Resolución

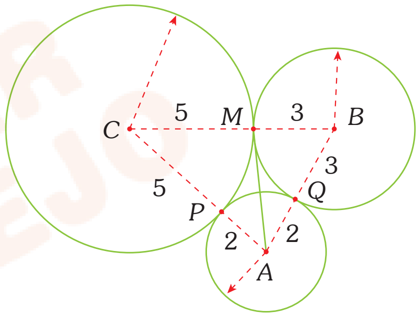
Tema: Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo

Teorema de Stewart



$$x^2c=a^2n+b^2m-mnc$$

Análisis y procedimiento



Nos piden AM.

De los datos

$AQ+QB=5$

$BM+CM=8$

$CP+PA=7$

Entonces

$AP=2$

$BM=3$

$CM=5$

En el $\triangle ABC$ aplicamos el teorema de Stewart.

$$8(AM)^2=7^2\cdot(3)+5^2\cdot(5)-5(3)(8)$$

$$\therefore\ AM=\sqrt{19}$$

Respuesta

$\sqrt{19}$

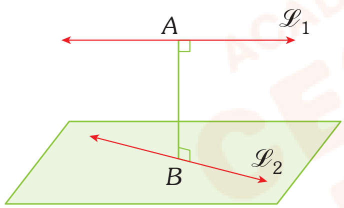
PREGUNTA N.° 31

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ dos rectas que se cruzan. $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ es una recta contenida en el mismo plano de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ tal que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $R=\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$. El triángulo RQP $\left(P \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}\right)$ es recto en $Q \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si QRT $\left(T \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}\right)$ es un triángulo isósceles con $QT=6$ u y $PR=3RT$, determine la distancia (en u) entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

A) $3\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$
D) 12 E) 13

Resolución

Tema: Geometría del espacio

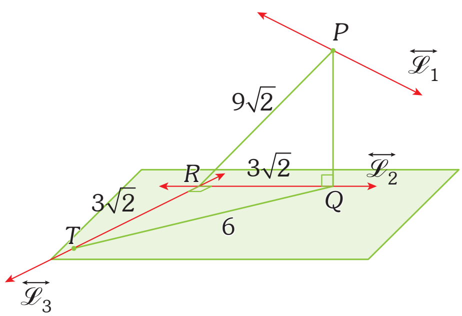


$$d\left(\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1};\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}\right)=AB$$

Análisis y procedimiento

Nota

Debemos considerar que PQ es la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ (esto debería ser dato).



En el $\triangle RQP$; por teorema de Pitágoras

$$PQ^2=\left(9\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2$$

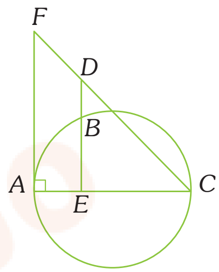
$\therefore$ $PQ=12$

Respuesta

12

PREGUNTA N.° 32

En la figura, si $\overline{AF}//\overline{DE}$, $AF=11$ cm, $BD=3$ cm, $BE=4$ cm y $AC=\dfrac{22}{7}\sqrt{7}$ cm, entonces $\dfrac{AB}{BC}$ es

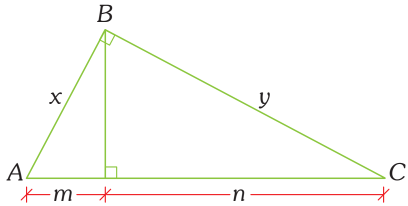


A) $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ C) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

D) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ E) $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

Resolución

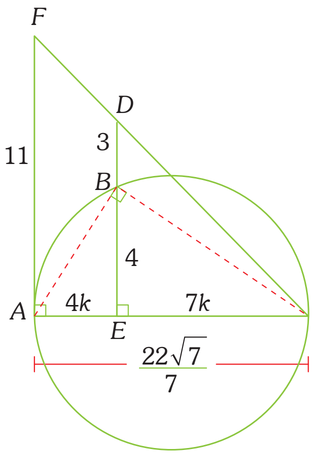
Tema: Relaciones métricas en el triángulo rectángulo



Recuerde que

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{m}{n}$$

Análisis y procedimiento



Nos piden $\dfrac{AB}{BC}$.

Del dato

$\overline{DE}//\overline{FA}$

$\rightarrow$ ⊿FAC ~ ⊿DEC

$$\frac{11}{7}=\frac{AC}{EC}$$

Sea $EC=7k \rightarrow AC=11k$.

Como $11k=\dfrac{22\sqrt{7}}{7}$

$\rightarrow k=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

Se demuestra que

$(BE)^2=(AE)(EC)$

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

Nota:

En el gráfico, la línea curva está demás.

Respuesta

$\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

PREGUNTA N.° 33

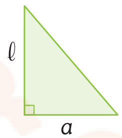
Una recta corta perpendicularmente a dos planos paralelos en los puntos A y B. Otra recta corta a dichos planos en C y B. Determine el área (u^2) del triángulo ABC sabiendo que la distancia entre los planos es 12 u y $BC=13$ u.

A) 24 B) 26 C) 30
D) 32 E) 36

Resolución

Tema: Geometría del espacio

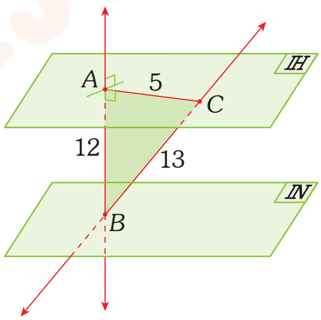
Recuerde que



$$\mathbb{A}_{\triangle}=\frac{a\ell}{2}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle ABC}$.



Datos

$\overleftrightarrow{AB}\perp ▱\mathbb{H} \rightarrow \overleftrightarrow{AB}\perp ▱\mathbb{N}$

$▱\mathbb{H}//▱\mathbb{N}$

Como

$\overleftrightarrow{AB}\perp ▱\mathbb{H} \rightarrow \overleftrightarrow{AB}\perp \overline{AC}$

$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=\dfrac{5(12)}{2}$

$\therefore \mathbb{A}_{\triangle ABC}=30$

Respuesta

30

PREGUNTA N.° 34

ABCDEFGH es un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio $R=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Si $AF=b$, $AC=a$, entonces $\dfrac{2b\sqrt{2+\sqrt{2}}-a\sqrt{2}}{ab}$ es igual a

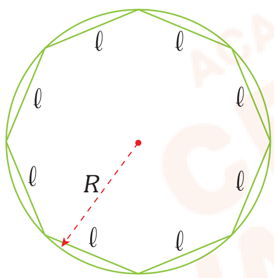
A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1

D) 2 E) 3

Resolución

Tema: Relaciones métricas en los cuadriláteros

Tenga en cuenta que en un octógono regular



Sea ℓ la longitud del lado de un octógono regular.

$$\boxed{\ell=R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

R: radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular.

Análisis y procedimiento

Nos piden

$$\frac{2b\sqrt{2+\sqrt{2}}-a\sqrt{2}}{ab}$$

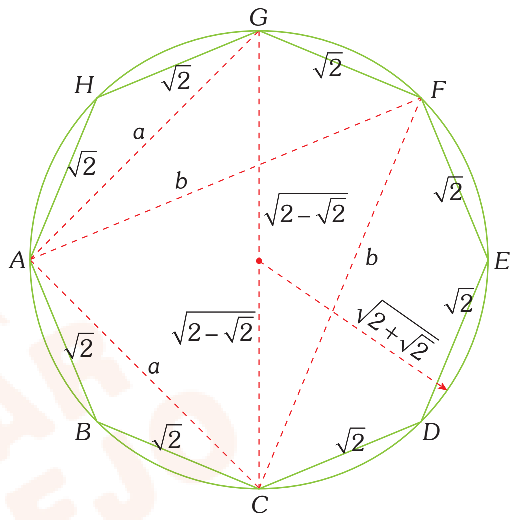
Datos

$AF=b$, $AC=a$

Hallamos el lado del octógono regular *ABCDEFGH*:

$$AB=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$AB=\sqrt{2}$$



Se observa que

$AC=AG=a$ y

$AF=FC=b$

Además, $\overline{CG}$ es diámetro, entonces

$$CG=2\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

Luego, en el ⌂*ACFG*, por el teorema de Prolomeo.

$$b\left(2\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)=a\sqrt{2}+ab$$

$$2b\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)=a\sqrt{2}=ab$$

$$\therefore\ \frac{2b\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)-a\sqrt{2}}{ab}=1$$

Respuesta

1

PREGUNTA N.° 35

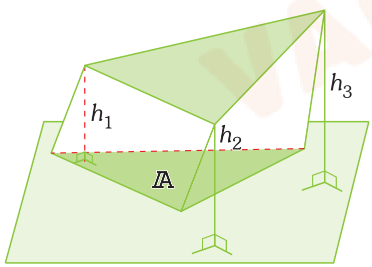
Se tiene un tronco de pirámide triangular cuyas bases son ABC y $A'B'C'$, siendo ABC un triángulo equilátero de lado 4ℓ cm. M y N son los puntos medios de $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'C'}$ respectivamente. Si las distancias de los puntos M, C' y N al plano de la base ABC son 2ℓ cm, ℓ cm y $\frac{3}{2}\ell$ cm, respectivamente, halle el volumen (en cm^3) del tronco de pirámide.

A) $4\ell^3\sqrt{3}$
B) $5\ell^3\sqrt{3}$
C) $6\ell^3\sqrt{3}$
D) $7\ell^3\sqrt{3}$
E) $8\ell^3\sqrt{3}$

Resolución

Tema: Tronco de prisma

Tenga en cuenta que



En todo tronco de prisma triangular

$$\boxed{\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de prisma}\\ \text{triangular}}}=\mathbb{A}\frac{(h_1+h_2+h_3)}{3}}$$

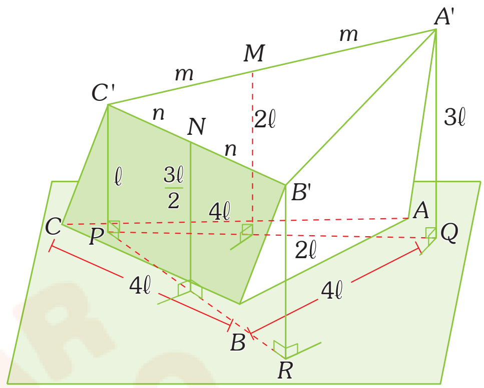
$\mathbb{A}$: área de la base del tronco de prisma

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}_{\text{tronco de prisma triangular } ABC\text{-}A'B'C'}$

Dato:

$\triangle ABC$ es equilátero, cuyo lado mide 4ℓ.



Sabemos por teorema de la base media (⏢) que

$$\frac{3\ell}{2}=\frac{C'P+2\ell}{2};\ C'P=\ell$$

También

$$2\ell=\frac{\ell+A'Q}{2};\ A'Q=3\ell$$

Luego

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{tronco de prisma}\\ \text{triangular } A'B'C'}}=\frac{(4\ell)^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\ell+2\ell+3\ell}{3}\right)$$

$$=8\ell^3\sqrt{3}$$

Nota

En el enunciado del ejercicio se menciona "tronco de pirámide", pero debe decir "tronco de prisma".

Respuesta

$8\ell^3\sqrt{3}$

PREGUNTA N.º 36

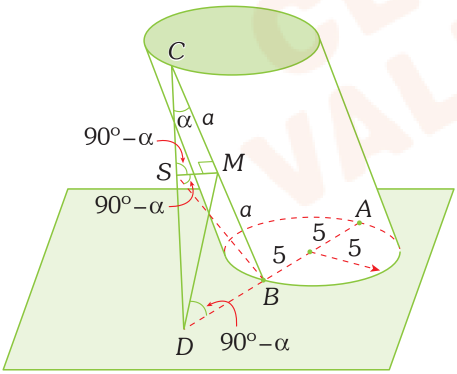
Se tiene un cilindro oblicuo con diámetro de la base $AB=10$ cm y generatriz $\overline{CB}$. Se prolonga $\overline{AB}$ hasta el punto D de tal forma que $CD=12$ cm, M punto medio de $\overline{BC}$, $m\sphericalangle BCD=\alpha$, $m\sphericalangle BDM=90^{o}-m\sphericalangle BCD$. Si $\alpha < m\sphericalangle CBD$, halle el volumen del cilindro (en cm^3).

A) 200π
B) 250π
C) 300π
D) 350π
E) 400π

Resolución

Tema: Cilindro

Análisis y procedimiento



Nos piden $\mathbb{V}_{\text{cil.}}$.

Dato: $CD=12$

En el $\triangle ABC$ se traza $\overline{SM} \perp \overline{CB}$.

Como $\overleftrightarrow{SM}$ es mediatriz de $\overline{CB}$, aplicamos el teorema de la mediatriz.

$\rightarrow$ $m\sphericalangle CSM=m\sphericalangle BSM=90^{o}-\alpha$

Ahora vemos que la

$m\sphericalangle MSB=m\sphericalangle MDB=90^{o}-\alpha$

Entonces $\square SMBD$ es inscriptible, de lo cual la $m\sphericalangle BDS=90^{o}$.

Considerando que $\overline{CD}$ es la altura

$\mathbb{V}_{\text{cil.}}=Bh$

$\mathbb{V}_{\text{cil.}}=\pi 5^2(12)$

$\mathbb{V}_{\text{cil.}}=300\pi$

Nota

En realidad $\overline{CD} \perp \overline{DB}$ y esto no asegura que $\overline{CD}$ sea perpendicular a las bases del cilindro; pero para llegar a una respuesta, hemos asumido que CD es la altura (debería ser dato).

Respuesta

300π

PREGUNTA N.º 37

Si una esfera de radio r cm se inscribe en un cono recto equilátero, cuyo radio de la base mide R cm, entonces la razón entre dichos volúmenes respectivamente es:

A) $\dfrac{5}{9}$

B) $\dfrac{4}{9}$

C) $\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{2}{9}$

E) $\dfrac{1}{9}$

Resolución

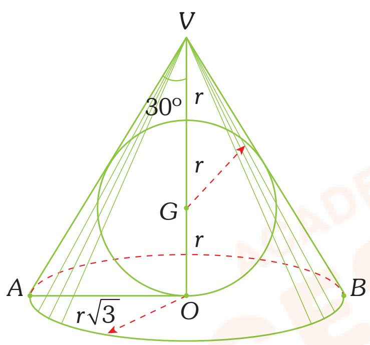
Tema: Cono-Esfera

Análisis y procedimiento

Nos piden

$$\frac{\mathbb{V}_{\text{esfera}}}{\mathbb{V}_{\text{cono}}}$$

Dato: Cono equilátero



$\triangle AVB$: equilátero

$\rightarrow$ G: baricentro del $\triangle AVB$

Como $GO=r$

$\rightarrow$ $AO=r\sqrt{3}$ $\wedge$ $VO=3r$

$$\mathbb{V}_{\text{esfera}}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\mathbb{V}_{\text{cono}}=\frac{1}{3}\pi\left(r\sqrt{3}\right)^2(3r)$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{V}_{\text{esfera}}}{\mathbb{V}_{\text{cono}}}=\frac{4}{9}$$

Respuesta

$\frac{4}{9}$

PREGUNTA N.° 38

Se tiene un tetraedro regular $ABCD$. Si la distancia del centro de la cara ABC a la altura del tetraedro trazada desde el vértice B es d, determine el volumen del tetraedro.

A) $\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}d^3$

B) $\frac{\left(25\sqrt{5}\right)}{4}d^3$

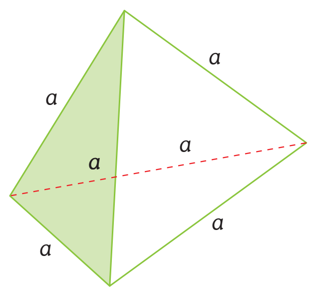
C) $\frac{27}{4}\sqrt{6}\,d^3$

D) $\frac{27\sqrt{7}}{14}d^3$

E) $\frac{27}{24}\sqrt{8}\,d^3$

Resolución

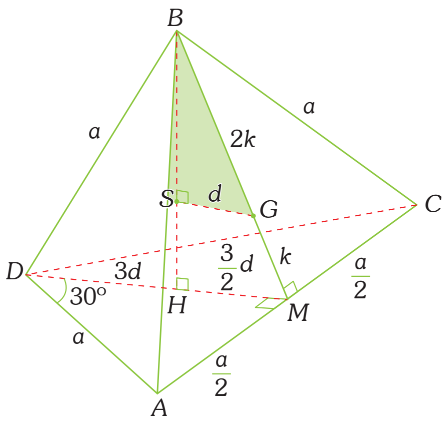
Tema: Poliedro regular



Recuerde que

$$\mathbb{V}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Análisis y procedimiento



Piden

$$\mathbb{V}_{\substack{\text{tetraedro}\\\text{regular}}}=\mathbb{V}$$

$\triangle BHM \sim \triangle BSG$

$$\frac{MH}{d}=\frac{3k}{2k} \rightarrow MH=\frac{3}{2}d$$

En el $\triangle ACD$ se sabe que

$DH=2(HM)$

$DH=3d$

$\triangle AMD$:

$$\frac{a}{2}\sqrt{3}=3d+\frac{3d}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{9d}{2} \rightarrow d=3\sqrt{3}\,d$$

$$\mathbb{V}=\left(3\sqrt{3}\,d\right)^3\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\therefore\ \mathbb{V}=\frac{27\sqrt{6}}{4}d^3$$

Respuesta

$\frac{27}{4}\sqrt{6}\,d^3$

PREGUNTA N.° 39

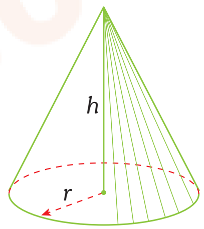
Determine el volumen generado por el segmento que une los puntos (0;0) y (3;4) al ser rotado en torno de la recta diagonal del primer cuadrante del plano.

A) $\frac{7\pi}{6}$ B) $\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$ C) $\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$

D) $\frac{7\pi}{4\sqrt{2}}$ E) $\frac{7\pi}{2\sqrt{3}}$

Resolución

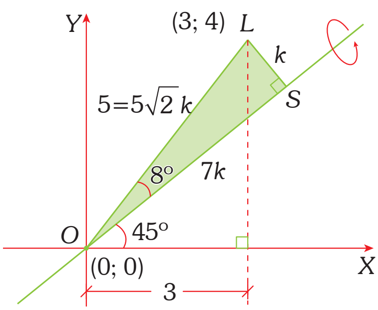
Tema: Sólido de revolución



Recuerde que

$$\mathbb{V}=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

Análisis y procedimiento



Nos piden

$$\mathbb{V}_{\text{Sol. G}}=\mathbb{V}_x$$

$$\mathbb{V}_x=\pi k^2\frac{(7k)}{3}$$

$$\mathbb{V}_x=\frac{7}{3}\pi k^3 \qquad (*)$$

Pero del gráfico vemos que en $\overline{OL}$

$$5=5\sqrt{2}k$$

$$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En (*)

$$\mathbb{V}_x=\frac{7}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore\ \mathbb{V}_x=\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$$

Nota

Para llegar a una respuesta, se ha asumido que la región triangular *OLS* gira y genera dicho sólido.

Respuesta

$\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}$

PREGUNTA N.° 40

Se tienen dos planos *P* y *Q* perpendiculares entre sí, se cortan según una recta $\mathscr{L}$. La recta que une un punto *A* de *P* con un punto *B* de *Q* forma con *P* un ángulo de 30° y con *Q* de 45°. Calcule la medida de $\overline{AB}$ si la distancia mínima entre la recta $\mathscr{L}$ y $\overline{AB}$ es $4(\sqrt{3}-1)$ cm.

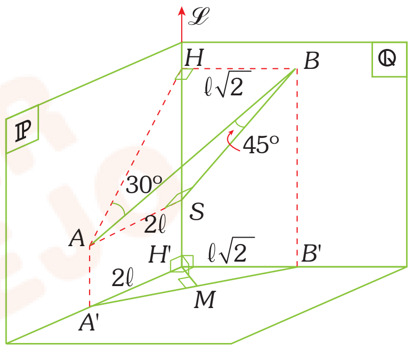
A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 10 cm
E) 12 cm

Resolución

Tema: Geometría del espacio

Análisis y procedimiento

Dato: $H'M=4(\sqrt{3}-1)$



Se traza un plano perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y se proyectan ortogonalmente la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.

Sea $AB=2\ell\sqrt{2}$.

$\rightarrow$ $\triangle AHB$: $BH=\ell\sqrt{2}$

$\triangle ASB$: $AS=2\ell$

Ahora, en el $\triangle A'H'B'$: $A'B'=\ell\sqrt{6}$

Aplicando el teorema del producto de catetos

$$(2\ell)(\ell\sqrt{2})=(H'M)(\ell\sqrt{6})$$

Entonces

$$2\ell\sqrt{2}=AB=4(\sqrt{3}-1)\sqrt{6}$$

$$\therefore\ AB\approx 7{,}17\text{ cm}$$

Respuesta

No hay clave.