



Trigonometría
5° San Marcos

Índice

I Bimestre

Capítulo 1	Sistema de medición angular I	5
Capítulo 2	Sistema de medición angular II	10
Capítulo 3	Longitud de arco	15
Capítulo 4	Área de un sector circular	20
Capítulo 5	Repaso	25
Capítulo 6	Razones trigonométricas de ángulos agudos I	28
Capítulo 7	Razones trigonométricas II de ángulos notables	33
Capítulo 8	Propiedades de las razones trigonométricas	38
Capítulo 9	Repaso	42

II Bimestre

Capítulo 10	Resolución de triángulos rectángulos	44
Capítulo 11	Razones trigonométricas de ángulos de cualquier medida	49
Capítulo 12	Reducción al primer cuadrante	55
Capítulo 13	Circunferencia trigonométrica I	58
Capítulo 14	Circunferencia trigonométrica II	65
Capítulo 15	Identidades trigonométricas de una variable	69
Capítulo 16	Repaso	73
Capítulo 17	Identidades trigonométricas de la suma y resta de ángulos	76
Capítulo 18	Repaso	80

III Bimestre

Capítulo 19	Identidades trigonométricas del ángulo doble	82
Capítulo 20	Identidades trigonométricas del ángulo mitad	86
Capítulo 21	Transformaciones trigonométricas I	90
Capítulo 22	Transformaciones trigonométricas II	94
Capítulo 23	Repaso	98
Capítulo 24	Ecuaciones trigonométricas	100
Capítulo 25	Resolución de triángulos oblicuángulos	105
Capítulo 26	Funciones trigonométricas I y II	110
Capítulo 27	Funciones trigonométricas I y II	110
Capítulo 28	Repaso	117

IV Bimestre

Capítulo 29	Complemento de funciones trigonométricas	119
Capítulo 30	Funciones trigonométricas inversas I y II	123
Capítulo 31	Funciones trigonométricas inversas I y II	123
Capítulo 32	Repaso	130
Capítulo 33	Complemento de razones trigonométricas de ángulos agudos	133
Capítulo 34	Complemento de identidades trigonométricas de una variable	137
Capítulo 35	Miscelánea de identidades	140
Capítulo 36	Repaso general	143

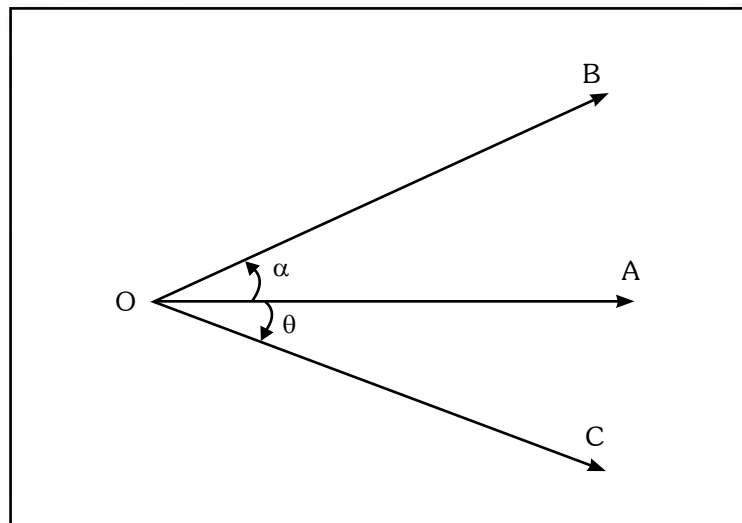
Trigonometría

1

Sistema de medición angular I

Ángulo trigonométrico

Es la figura que se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice desde una posición inicial (lado inicial) hasta una posición final (lado final).



Elementos

- * $O \longrightarrow$ vértice
- * $\overrightarrow{OA}$ $\longrightarrow$ lado inicial
- * $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} \longrightarrow$ lado final
- * $\alpha \longrightarrow$ ángulo trigonométrico positivo (rotación antihoraria).
- * $\theta \longrightarrow$ ángulo trigonométrico negativo (rotación horaria).

Sistema sexagesimal (Inglés)

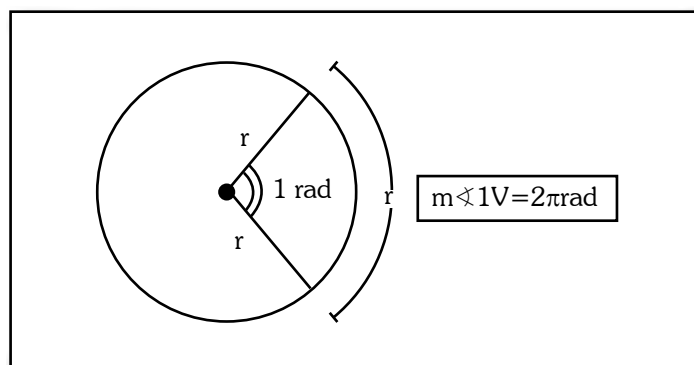
NOTACIÓN	EQUIVALENCIAS
Un grado sexagesimal: 1°	$1^\circ = 60'$
Un minuto sexagesimal: $1'$	$1' = 60''$
Un segundo sexagesimal: $1''$	$m \angle 1v = 360^\circ$

Sistema centesimal (francés)

NOTACIÓN	EQUIVALENCIAS
Un grado centesimal: 1^g	$1^g = 100^m$
Un minuto centesimal: 1^m	$1^m = 100^s$
Un segundo centesimal: 1^s	$m < 1V = 400^g$

Sistema radial (circular)

En este sistema la unidad se denomina RADIÁN que se define como la medida del ángulo central que subtiende un arco en una circunferencia con longitud igual al radio.



Equivalencias de conversión

$$m < \frac{1}{2}V = 180^\circ = 200^g = \pi \text{ rad}$$

Ejemplo: convertir 70^g a sexagesimales.

Ejercicios resueltos

1. Simplificar: $P = \frac{2^0 2'}{2'}$

a) 60

b) 61

c) 62

d) 64

e) 63

Resolución

De la expresión: $P = \frac{2^0 + 2'}{2'}$

(Tenemos que expresar en una misma unidad)(minutos).

Recordar: $1^\circ = 60'$ $2^\circ = 120'$

Luego:

$$P = \frac{120' + 2'}{2'}$$

$$P = \frac{122'}{2'}$$

$$\longrightarrow \therefore P = 61$$



2. ¿Cuántos segundos hay en $\beta = 2^\circ 4' 5''$?

- a) 7444 b) 7445 c) 7446 d) 7404 e) 7448

Resolución

Pasaremos a la misma unidad: $\beta = 2^\circ + 4' + 5''$

Recordar:

$$\begin{aligned} * \quad 1^\circ &= 3600'' \\ \Rightarrow 2^\circ &= 7200'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad 1' &= 60'' \\ \Rightarrow 4' &= 240'' \end{aligned}$$

Luego:

$$\beta = 7200'' + 240'' + 5''$$

$$\beta = 7445''$$



3. En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos miden $(40n)^\circ$ y $(24n)^\circ$. ¿Cuál es el valor de "n"?

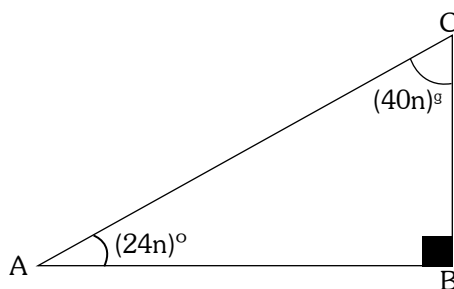
- a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

Resolución

Graficando la situación; note que para poder operar, los ángulos deben estar en las mismas unidades.

Convirtiendo:

$$C = (40n)^\circ \cdot \frac{9^\circ}{10^\circ} = (36n)^\circ$$



Luego sabemos que: $A + C = 90^\circ$ esto es:

$$(24n)^\circ + (36n)^\circ = 90^\circ$$

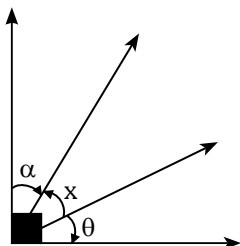
$$\longrightarrow \therefore 60n = 90$$

$$n = \frac{3}{2}$$



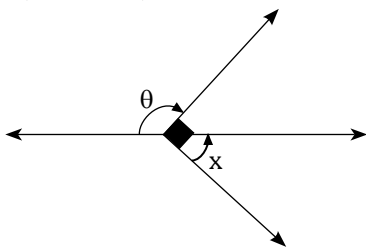
Práctica

1. En el gráfico hallar "x" en función de α y θ



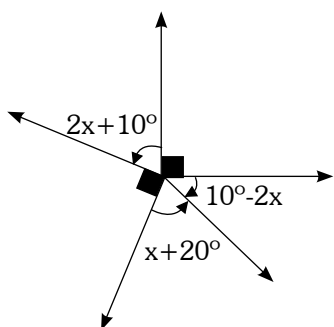
- a) $90^\circ - \alpha - \theta$ b) $90^\circ + \alpha + \theta$
c) $90^\circ - \alpha + \theta$ d) $90^\circ + \alpha - \theta$
e) $\alpha + \theta - 90^\circ$

2. En el gráfico, hallar "x", en función de " θ "



- a) $90^\circ - \theta$ b) $\theta - 90^\circ$ c) $-90^\circ - \theta$
d) $180^\circ - \theta$ e) $\theta - 180^\circ$

3. Del gráfico, hallar: "x".



- a) 24° b) 27° c) 30°
d) 32° e) 36°

4. Calcular: $E = \frac{25^\circ + 50^\circ + \frac{\pi}{3} \text{ rad}}{64^\circ + 40^\circ + \frac{\pi}{6} \text{ rad}}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

5. Si: $n = \frac{\frac{3\pi}{5} \text{ rad} - 28^\circ}{50^\circ - 5^\circ}$

Además: $\frac{\pi}{n+1} \text{ rad} = a^\circ$

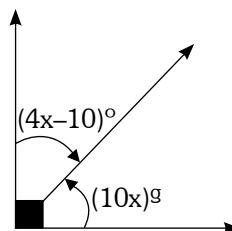
Determine a° en radianes

- a) $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$ b) $\frac{\pi}{20}$ c) $\frac{\pi}{30}$
d) $\frac{\pi}{60}$ e) $\frac{\pi}{90}$

6. Determine el valor de "x" en: $(7x+10)^\circ = (10x)^\circ$

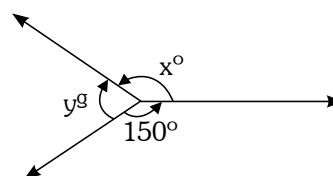
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

7. Del gráfico, hallar: x°



- a) 9 b) 12 c) 15
d) 16 e) 20

8. De la figura, calcular: $10x - 9y$



- a) 210 b) 2100 c) 21000
d) 120 e) 1200

9. Calcular:

$$E = \frac{U^\circ + N^\circ + M^\circ + S^\circ + M^\circ}{U^\circ + N^\circ + M^\circ + S^\circ + M^\circ}$$

- a) 90 b) $\frac{1}{90}$ c) $\frac{10}{9}$
d) $\frac{9}{10}$ e) 1

10. Hallar: "x" si se cumple: $\left[\frac{(x-3)^\circ}{5^\circ} \right]^\circ < > \left[\frac{(4x-18)^\circ}{15^\circ} \right]^\circ$

- a) 12 b) 17 c) 24
d) 20 e) 10

11. Si: $a^\circ b' c'' = x'y'' + y'x''$. Además: $x+y = 90$

Calcular: $E = \frac{b-a}{c}$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

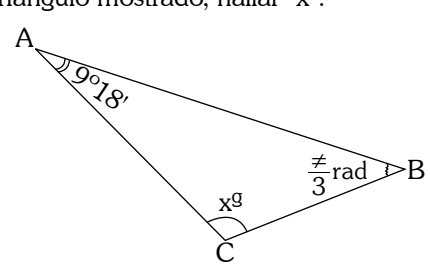
12. Si: $\frac{\pi}{32} \text{ rad} = a^\circ b' c''$

Calcular: $a^{-3} \sqrt{b+c-3}$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

Tarea domiciliaria

- Convertir 80^g al sistema radial.
 - $\frac{4\pi}{3}$ rad
 - $\frac{4\pi}{9}$
 - $\frac{4\pi}{5}$
 - $\frac{2\pi}{5}$
 - $\frac{3\pi}{5}$
- Convertir 50^g al sistema sexagesimal.
 - 43°
 - 45°
 - 47°
 - 48°
 - 52°
- Convertir 100^g al sistema sexagesimal.
 - 190°
 - 130°
 - 140°
 - 90°
 - 100°
- Convertir $\frac{\pi}{10}$ rad al sistema centesimal.
 - 20^g
 - 30^g
 - 18^g
 - 10^g
 - 15^g
- Calcular: $M = \frac{\pi}{3}$ rad + 50^g en el sistema sexagesimal.
 - 107°
 - 105°
 - 115°
 - 110°
 - 125°
- ¿Cuántos minutos centesimales hay en $\alpha = 32^g 32^m$?
 - 3322^m
 - 2323^m
 - 3232^m
 - 3622^m
 - 3632^m
- ¿Cuántos segundos sexagesimales hay en $\theta = 5^\circ 4' 32''$?
 - $18270''$
 - $18271''$
 - $18272''$
 - $18200''$
 - $18371''$
- Calcular: $P = \frac{5^\circ 5'}{5'}$
 - 60
 - 61
 - 62
 - 71
 - 51
- Si se sabe que: $x^\circ < (x+2)^g$
Hallar el valor de $(2x)$
 - 18
 - 30
 - 36
 - 46
 - 54
- Los ángulos de un triángulo son: $(y + 20)^\circ$; $(10y)^g$; $(\frac{\pi y}{6})$ rad. Hallar el mayor ángulo.
 - 90°
 - 120°
 - 135°
 - 140°
 - 150°
- Si se sabe que: $\omega = 50^\circ$; $\phi = 80^g$; $\delta = \frac{\pi}{6}$ rad
Ordenar de mayor a menor.
 - ω ; ϕ ; δ
 - ω ; δ ; ϕ
 - δ ; ϕ ; ω
 - δ ; ω ; ϕ
 - ϕ ; ω ; δ
- En un triángulo, uno de sus ángulos interiores mide 120^g y otro $\frac{3\pi}{10}$ rad. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
 - 2°
 - 4°
 - 6°
 - 16°
 - 18°
- Si 9° y $(10x)^g$ son ángulos complementarios.
Hallar el valor de $\sqrt{x}$
 - 5
 - 3
 - 1
 - 2
 - 4
- En el triángulo mostrado, hallar "x".



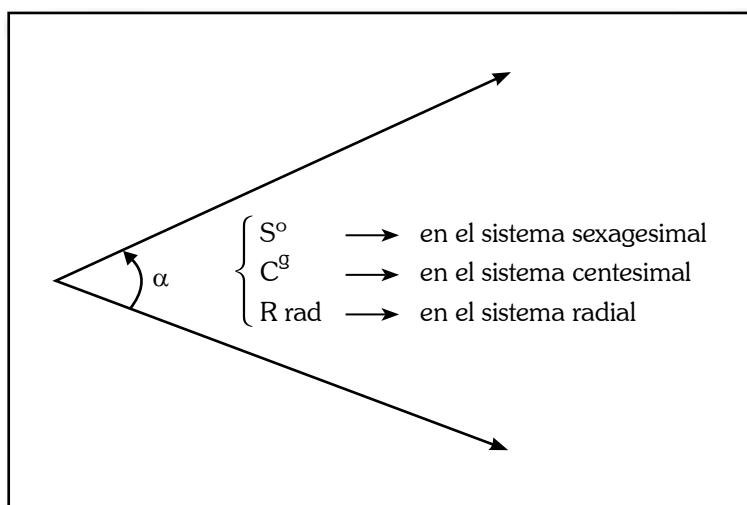
 - 100
 - 115
 - 123
 - 132
 - 144
- Se sabe que: $\frac{\pi}{24}$ rad $< > x^\circ y'$. Hallar: $C = y - x$
 - 21
 - 22
 - 23
 - 24
 - 25

2

Sistema de medición angular II

Fórmula general de conversión

Es aquella relación que existe entre los números que expresa la medida de un ángulo en los tres sistemas conocidos.



Demostrando:

Del gráfico: $\theta = S^\circ = C^g = R \text{ rad}$

$$\text{Luego: } \frac{\theta}{1 \text{vta}} = \frac{S^\circ}{1 \text{vta}} = \frac{C^g}{1 \text{vta}} = \frac{R \text{ rad}}{1 \text{vta}}$$

$$\text{De donde: } \frac{S^\circ}{360^\circ} = \frac{C^g}{400^g} = \frac{R \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

$$\text{Fórmula auxiliar: } \frac{S}{180} = \frac{C}{200} \Rightarrow \boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10}}$$

$$\text{Además: } \frac{S}{C} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\frac{\pi}{20}} = k$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 9k}; \boxed{C = 10k}; \boxed{R = \frac{\pi k}{20}}$$

Donde:

- * $S = \#$ de grados sexagesimales.
- * $C = \#$ de grados centesimales.
- * $R = \#$ de radianes.

Nota:

- * $\pi = 3,1416$
- * $\pi = \frac{22}{7}$
- * $\pi = \sqrt{10}$
- * $\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Observación:

- * # de minuto sexagesimal = 60S
- * # de segundo sexagesimal = 3600S
- * # de minuto centesimal = 100C
- * # de segundo centesimal = 10000C

Ejemplo aplicativo

1. Calcule: $M = 4\sqrt{\frac{C+S}{C-S}} - 3\sqrt{\frac{C+S}{C-S}} + 8$

Resolución:

Se sabe que: $\boxed{S = 9k} \wedge \boxed{C = 10k}$

Reemplazando en "M".

$$M = 4\sqrt{\frac{19k}{k}} - 3\sqrt{\frac{19k}{k}} + 8$$

$$M = 4\sqrt{19} - 3$$

$$M = 4\sqrt{16}$$

$$\therefore \boxed{M = 2} \text{ Rpta.}$$

2. Si la diferencia de los números de minutos centesimales y grados sexagesimales que contiene un ángulo es igual a 1982. Calcule la medida circular del ángulo.

Resolución:

Se sabe:

de minutos centesimales = 100C

de grados sexagesimales = S

$$100C - S = 1982$$

pero: $\boxed{C = 10k} \wedge \boxed{S = 9k}$

Luego reemplazando:

$$100(10k) - 9k = 1982$$

$$991k = 1982$$

$$k = 2$$

$$\text{Piden: } R = \frac{\pi k}{20}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\pi(2)}{20}$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{\pi}{10}} \text{ Rpta.}$$

Ejercicios resueltos

1. Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son números pares consecutivos, ¿cuál es la medida radial del ángulo?

- a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{20}$ rad d) $\frac{\pi}{10}$ rad e) $\frac{\pi}{8}$ rad

Resolución

En estos casos se debe interpretar el enunciado. Tenemos un ángulo medido en:

- * Sexagesimales = S
- * Centesimales = C
- * Radianes = R

Del enunciado: "S" y "C" $\longrightarrow$ pares consecutivos

Es decir, si: $\left. \begin{array}{l} S = n \\ C = n + 2 \end{array} \right\} C - S = 2$

Como piden "R": $C - S = 2$

$$200 \frac{R}{\pi} - 180 \frac{R}{\pi} = 2 \rightarrow 20 \frac{R}{\pi} = 2$$

$$R = \frac{\pi}{10}$$

$\therefore$ El ángulo mide $\frac{\pi}{10}$ rad

2. Señale la medida circular de un ángulo que verifica: $S + C + R = \frac{\pi}{4} + 95$; siendo "S", "C" y "R" lo conocido para dicho ángulo.

- a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{2}$ rad d) $\frac{\pi}{5}$ rad e) $\frac{\pi}{6}$ rad

Resolución

En la condición: $S + C + R = \frac{\pi}{4} + 95$ (1)

Como piden la medida circular "R" del ángulo, colocaremos todo en función de "R"; para ello usaremos:

$$S = 180 \frac{R}{\pi}; C = 200 \frac{R}{\pi}$$

En (1)

$$180 \frac{R}{\pi} + 200 \frac{R}{\pi} + R = 95 + \frac{\pi}{4}$$

$$380 \frac{R}{\pi} + R = 95 + \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \frac{380R + \pi R}{\pi} = \frac{380 + \pi}{4}$$

$$\frac{R(380 + \pi)}{\pi} = \frac{380 + \pi}{4} \rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ El ángulo mide $\frac{\pi}{4}$ rad

3. Halle la medida de un ángulo en radianes que cumple: $\frac{C}{10} = n + \frac{17}{\pi}$ y $\frac{S}{18} = n + \frac{7}{\pi}$; siendo "S" y "C" lo convencional.

- a) 1 rad b) 2 rad c) $\frac{2}{3}$ rad d) $\frac{3}{2}$ rad e) $\frac{1}{2}$ rad

Resolución

Tenemos:

$$\frac{C}{10} = n + \frac{17}{\pi} \text{ (1)}$$

$$\frac{S}{18} = n + \frac{7}{\pi} \text{ (2)}$$

$$\frac{C}{10} - \frac{S}{18} = \frac{10}{\pi}$$

De (1) - (2):

Como piden "R"; hacemos:

$$S = 180 \frac{R}{\pi}; C = 200 \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{200 \frac{R}{\pi}}{10} - \frac{180 \frac{R}{\pi}}{18} = \frac{10}{\pi}$$

$$\rightarrow 20 \frac{R}{\pi} - 10 \frac{R}{\pi} = \frac{10}{\pi}$$

$$10 \frac{R}{\pi} = \frac{10}{\pi} \rightarrow R = 1$$

$\therefore$ El ángulo mide: 1 rad

Práctica

1. Halle la medida circular de un ángulo si su número de grados sexagesimales aumentado con el doble de su número de grados centesimales es igual a 145.

- a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad
d) $\frac{\pi}{6}$ rad e) $\frac{\pi}{7}$ rad

2. Determine un ángulo en radianes, si se cumple:

$$\frac{S}{12} + \frac{C}{25} = 2,3$$

- a) $\frac{\pi}{5}$ rad b) $\frac{\pi}{10}$ rad c) $\frac{\pi}{15}$ rad
d) $\frac{\pi}{20}$ rad e) $\frac{\pi}{30}$ rad

3. Siendo: "S", "C" y "R", los convencionales. Además se cumple que: $S = x^3 + x^2 + x + 2$; $C = x^3 + x^2 + x + 7$
Hallar: "R"

- a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{4}$

4. Un ángulo es tal que el número que representa su suma en los sistemas sexagesimales y centesimales es igual a 29 más su número en grados sexagesimal dividido entre dos. Calcular dicho ángulo en el sistema radial.

- a) $\frac{\pi}{40}$ rad b) $\frac{\pi}{20}$ rad c) $\frac{\pi}{15}$ rad
d) $\frac{\pi}{10}$ rad e) $\frac{\pi}{12}$ rad

5. Señale el ángulo en radianes, si se cumple:

$$\left(\frac{S}{9} - 1\right)^5 + \left(\frac{C}{10} - 1\right)^5 + \left(\frac{20R}{\pi} - 1\right)^5 = 3$$

- a) $\frac{\pi}{20}$ rad b) $\frac{\pi}{10}$ rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad
d) $\frac{\pi}{4}$ rad e) $\frac{\pi}{40}$ rad

6. Si: S, C y R son los conocidos y además se cumple:

$$\frac{\sqrt{C} + \sqrt{S}}{\sqrt{C} - \sqrt{S}} = \frac{19 + 6\sqrt{10}}{\frac{R}{\pi}}; \text{ Calcule R}$$

- a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) $\pi/2$

7. Siendo "S", "C" y "R" los convencionales.

Simplificar:

$$Q = \sqrt{\frac{3\pi C - 2\pi S + 10R}{0,1\pi S - 8R}}$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

8. Indicar el valor de:

$$M = \sqrt{4 + \frac{5(C-S)^2}{C^2 - S^2}} + \sqrt{6 - \frac{14(C^2 - S^2)}{(C+S)^2}}$$

Siendo: "S"; "C" lo convencional

- a) $\sqrt{19}$ b) $\sqrt{10}$ c) 9
d) 19 e) 3

9. Si: S y C representan a los números de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimales y centesimal respectivamente. Si además se cumple:

$$\frac{S}{1 - \frac{S}{S+C}} + \frac{C}{1 - \frac{C}{S+C}} = \frac{S^2 + C^2}{360}$$

Hallar: $19(C - S)^{-1}$

- a) 0,25 b) 0,20 c) 0,50
d) 0,75 e) 0,10

10. Si se cumple: $RC(S)^{-1} + RS(C)^{-1} = \frac{181\pi}{180}$; siendo S, C

y R los números en los sistemas conocidos. Hallar la medida de dicho ángulo en el sistema radial.

- a) $\frac{\pi}{2}$ rad b) $\frac{\pi}{8}$ rad c) $\frac{\pi}{10}$ rad
d) $\frac{\pi}{20}$ rad e) $\frac{\pi}{40}$ rad

11. Siendo S y C lo convencional, hallar un ángulo en radianes, si:

$$S = n + 1$$

$$C = n + 2$$

- a) $\pi/5$ b) $\pi/10$ c) $\pi/15$
d) $\pi/20$ e) $\pi/25$

12. Siendo S, C y R lo convencional, simplificar:

$$E = \frac{2\pi S + \pi C - 10R}{(C - S)\pi}$$

- a) 11,5 b) 13,5 c) 15,5
d) 27,5 e) 20

Tarea domiciliaria

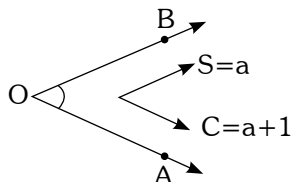
1. Hallar: $P = \sqrt{\frac{C+S}{C-S} + 6}$

S: Número de grados sexagesimales.

C: Número de grados centesimales

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 25

2. Calcular "a"



- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

3. Siendo "S" y "C" lo conocido para un ángulo no nulo, simplificar: $J = \sqrt{\frac{C+S}{C-S} + \sqrt{\frac{5S-2C}{C-S}}} + 1$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. Sabiendo que "S", "C" y "R" son lo conocido para un cierto ángulo no nulo; calcular: $J = \frac{2\neq C - \neq S + 40R}{2\neq S - \neq C - 30R}$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5. Siendo "S", "C" y "R" lo conocido para un mismo ángulo no nulo; reducir: $P = \frac{\neq^2(C-S)(C+S)}{380R^2}$

- a) 10 b) 20 c) 40 d) 60 e) 80

6. Señale la medida radial de un ángulo que verifica: $\frac{C-S}{2C-S} = \frac{4R}{11\neq}$ siendo "S", "C" y "R" lo conocido para dicho ángulo.

- a) $\frac{\neq}{3}$ rad b) $\frac{\neq}{4}$ rad c) $\frac{\neq}{5}$ rad
d) $\frac{\neq}{6}$ rad e) $\frac{\neq}{8}$ rad

7. Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son números pares consecutivos, ¿cuál es la medida del ángulo?

- a) $\frac{\neq}{6}$ rad b) $\frac{\neq}{4}$ rad c) $\frac{\neq}{20}$ rad
d) $\frac{\neq}{10}$ rad e) $\frac{\neq}{8}$ rad

8. Sean S, C y R los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente. Si: $CS^2 + S^3 = (C-S)^2$. Halle: "R".

- a) $\frac{\pi}{30780}$ b) $\frac{15\neq}{163}$ c) $\frac{17\neq}{198}$
d) $\frac{19\neq}{216}$ e) $\frac{21\neq}{365}$

9. La medida de un ángulo en el sistema sexagesimal y en el sistema centesimal son: $S = n^2 - \frac{1}{19}$ y $C = n^2 + \frac{1}{19}$; el valor del ángulo en radianes es:

- a) $\frac{\neq}{119}$ rad b) $\frac{\neq}{109}$ rad c) $\frac{\pi}{380}$ rad
d) $\frac{\neq}{19}$ rad e) $\frac{\neq}{190}$ rad

10. Halle la medida de un ángulo en radianes que cumple: $\frac{C}{10} = n + \frac{17}{\neq}$ y $\frac{S}{18} = n + \frac{7}{\neq}$. Siendo "S" y "C" lo convencional.

- a) $1\frac{1}{2}$ rad b) 2 rad c) $\frac{2}{3}$ rad
d) $\frac{3}{2}$ rad e) 1 rad

11. Señale la medida circular de un ángulo que cumple: $2S - C + 20R = 11,1416$. Siendo "S", "R" y "C" lo conocido para dicho ángulo. ($\pi = 3,1416$)

- a) $\frac{\neq}{10}$ rad b) $\frac{\neq}{5}$ rad c) $\frac{\neq}{20}$ rad
d) $\frac{\neq}{40}$ rad e) $\frac{\neq}{60}$ rad

12. Sabiendo que la suma de las inversas de los números de grados sexagesimal y centesimal de un ángulo, es a su diferencia; como 38 veces su número de radianes es a π . ¿Cuál es la medida circular de dicho ángulo?

- a) $\frac{\neq}{2}$ rad b) $\frac{\neq}{3}$ rad c) $\frac{\neq}{4}$ rad
d) $\frac{\neq}{6}$ rad e) $\frac{\neq}{5}$ rad

13. Señale la medida circular de un ángulo que verifica: $S + C + R = 95 + \frac{\neq}{4}$ siendo "S", "C" y "R" lo conocido para dicho ángulo.

- a) $\frac{\neq}{3}$ rad b) $\frac{\neq}{4}$ rad c) $\frac{\neq}{2}$ rad
d) $\frac{\neq}{5}$ rad e) $\frac{\neq}{6}$ rad

14. Calcule el número de radianes de un ángulo diferente de cero, para el cual sus números, de grados sexagesimales (S) y su número de grados centesimales (C) verifican la relación: $\frac{S}{\sqrt{C}} - \sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{C}} - \frac{\sqrt{C}}{S}$

- a) $\frac{\neq}{90}$ b) $\frac{\neq}{180}$ c) $\frac{\neq}{200}$
d) $\frac{\neq}{360}$ e) $\frac{\neq}{120}$

15. Señalar la medida circular de un ángulo que verifica: $\frac{S^3\neq}{9} + \frac{C^3\neq}{10} + 20R^3 = S^2 + C^2 + R^2$. Siendo "S", "R" y "C" los conocido para dicho ángulo.

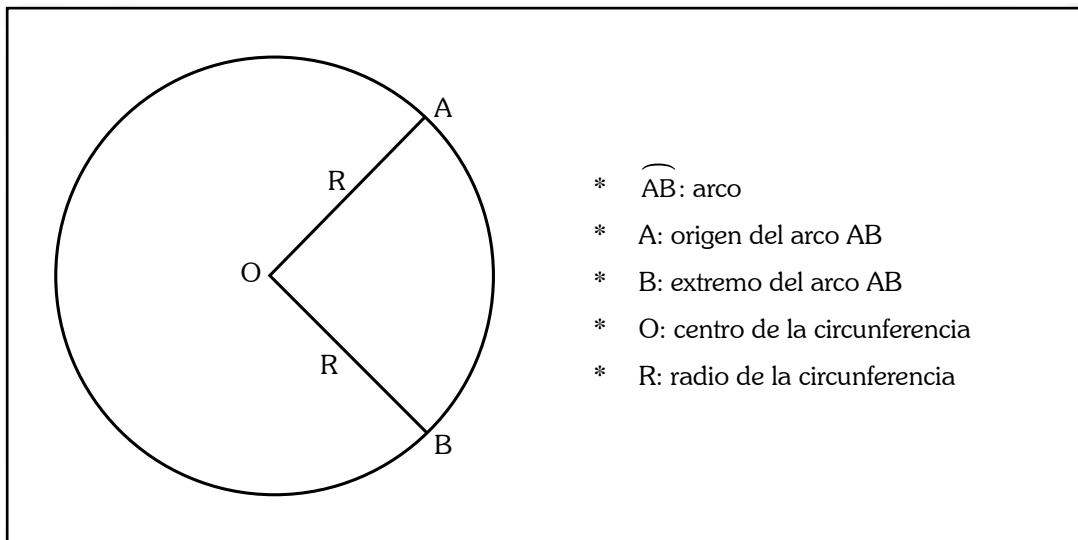
- a) $\frac{\neq}{2}$ rad b) $\frac{1}{20}$ rad c) $\frac{\neq}{5}$ rad
d) $\frac{1}{6}$ rad e) $\frac{\neq}{7}$ rad

3

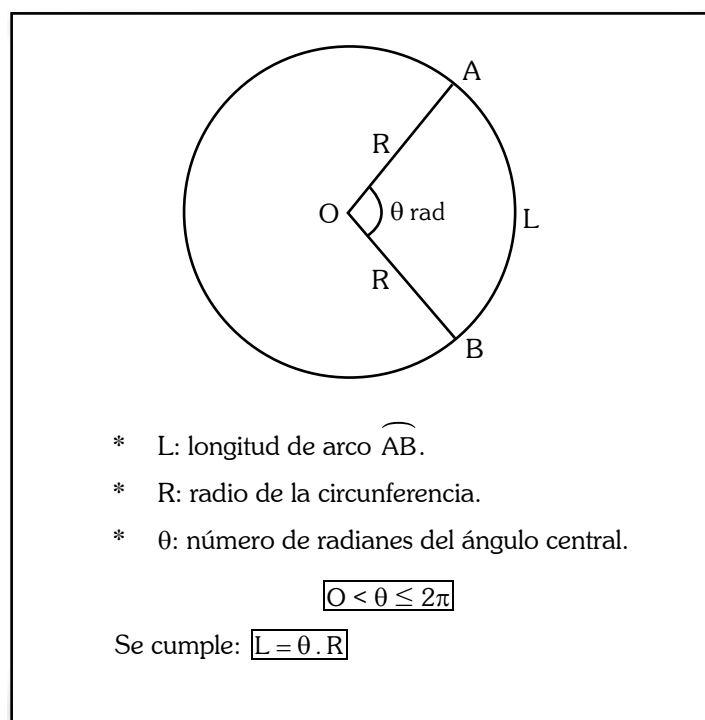
Longitud de arco

Arco

El arco de circunferencia es una porción cualquiera de dicha circunferencia.

**Longitud de arco**

En una circunferencia de radio "R" un ángulo central " θ " determina una longitud de arco "L"; que se calcula multiplicando el número de radianes " θ " y el radio "R".



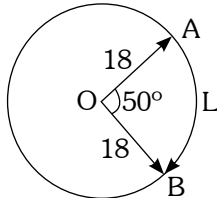
Ejercicios resueltos

1. Calcular la longitud de arco que corresponde a un ángulo central de 50° en una circunferencia de diámetro 36m.

- a) $25\pi m$ b) $5\pi m$ c) $10\pi m$ d) $20\pi m$ e) $15\pi m$

Resolución

Graficando; y convirtiendo el ángulo central en radianes.



$$\theta = 50^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$$

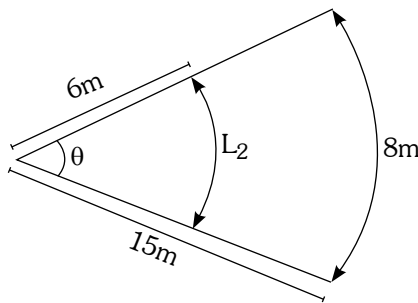
Calculamos la longitud:

$$L = \theta R = \frac{5\pi}{18} \times 18$$

$$\therefore L = 5\pi m$$

2. Un arco con radio 15m mide 8m. ¿Qué diferencia en metros existe entre la longitud de este arco y la de otro arco del mismo valor angular pero con 6m de radio?

Resolución



Se observa:

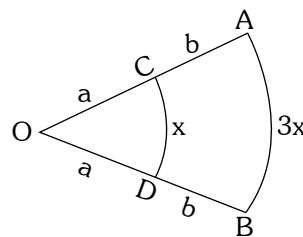
$$\Rightarrow \theta = \frac{L_2}{6} = \frac{8}{15} \Rightarrow L_2 = 3,2$$

$$\text{Piden: } L_1 - L_2 = 8m - 3,2m$$

$$\rightarrow \therefore L_1 - L_2 = 4,8m$$

- a) 4,5m b) 4,7 c) 4,8 d) 5,2 e) 6,2

3. De la figura; hallar: $M = \frac{a}{b}$



- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 2 e) $\frac{1}{3}$

Resolución

Asumiendo que: $m\angle AOB = \theta$

$$\Rightarrow \text{recordemos: } \theta = \frac{L}{r}$$

Para cada sector:

$$\theta = \frac{x}{a} \dots\dots\dots (1)$$

$$\theta = \frac{3x}{a+b} \dots\dots\dots (2)$$

Iguando: 1 y 2

$$\frac{x}{a} = \frac{3x}{a+b}$$

$$a+b=3a$$

$$b=2a$$

Piden:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2a}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

Práctica

1. En un sector circular, el arco mide 2π cm y el radio 6 cm. ¿Cuál es la medida sexagesimal del ángulo central?

a) 30° b) 45° c) 60°
d) 75° e) 15°

2. En un sector circular, el ángulo central mide 20° y el radio mide 45 cm. ¿Cuál es el perímetro del sector?

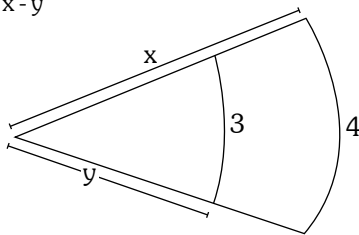
a) $5(18+\pi)$ b) $6(18+\pi)$ c) $5(16+\pi)$
d) 4π e) $4(25+\pi)$

3. En un sector circular, el ángulo central mide 10° y el radio mide 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del sector?

a) $2(\pi+20)$ b) $2(\pi+40)$ c) $4(\pi+20)$
d) $4(\pi+40)$ e) $2(\pi+25)$

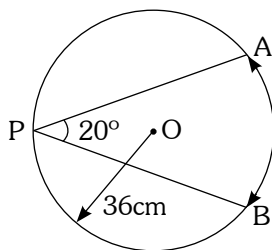
4. Del gráfico, adjunto:

Evaluar: $\frac{x+y}{x-y}$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 7

5. De acuerdo al gráfico, calcule: " L_{AB} "



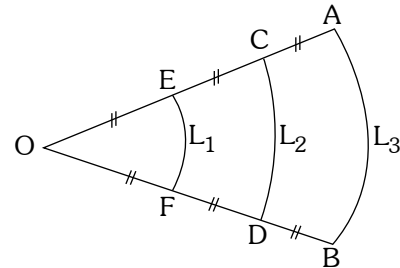
a) π cm b) 8π cm c) 16π cm
d) 4π cm e) 2π cm

6. En un sector circular el arco mide " L ". Si el ángulo central se reduce en su tercera parte y el radio se incrementa en el triple, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

a) $\frac{1}{6}L$ b) $\frac{2}{3}L$ c) $\frac{4}{3}L$
d) $\frac{8}{3}L$ e) $\frac{8}{9}L$

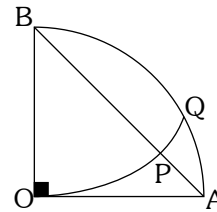
7. Según la figura, calcule: $Q = \frac{L_1 + L_2}{L_3}$

Si: L_1 , L_2 y L_3 son arcos con centro en "O"



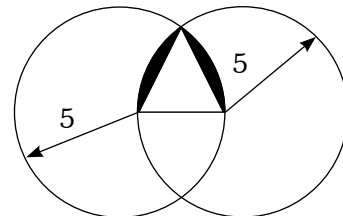
a) 1 b) 2 c) 3
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

8. Si la longitud del arco PQ es π m. Calcule la longitud del $\overline{OA}$



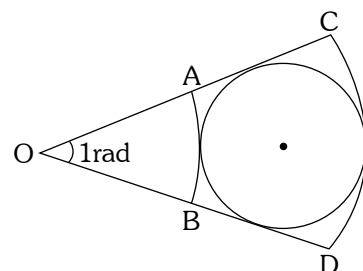
a) 6 m b) 8 m c) 10 m
d) 12 m e) 14 m

9. Del gráfico, calcule el perímetro de la región sombreada.



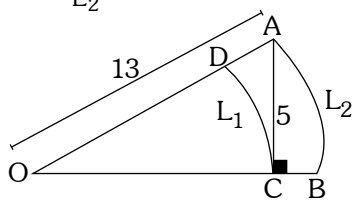
a) $10(\frac{\pi}{3} - 1)$ b) $3(\frac{\pi}{3} + 2)$ c) $10(\frac{\pi}{3} + 1)$
d) $6(\frac{\pi}{3} + 2)$ e) $5(\frac{\pi}{3} + 1)$

10. Calcular la longitud de la circunferencia inscrita si la longitud de los arcos AB y CD miden 2 y 5 respectivamente.



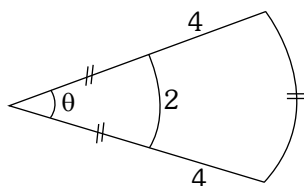
a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

11. Determinar: $K = \frac{L_1}{L_2}$



- a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{12}{13}$ c) $\frac{13}{12}$
d) $\frac{5}{13}$ e) $\frac{13}{5}$

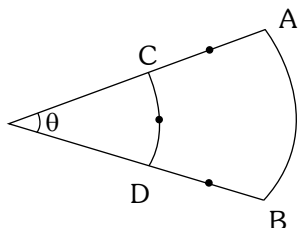
12. Del gráfico, calcular " θ " (en radianes)



- a) $1/2$ b) $3/4$ c) $2/3$
d) $5/2$ e) $4/3$

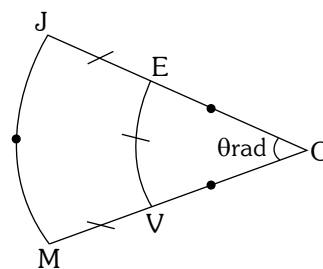
13. Hallar θ

Si $\widehat{AB} = 3\widehat{CD}$



- a) 2 b) 3 c) 1
d) $1/2$ e) $1/3$

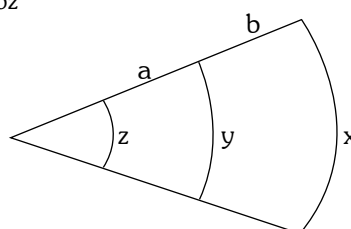
14. Del gráfico, calcular: $P = \theta^2 + \theta$



- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
d) 3 e) $\frac{2}{3}$

15. De la figura mostrada, determine el valor de:

$M = \frac{ay + by}{ax + bz}$



- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2
d) $\frac{1}{3}$ e) 3

Tarea domiciliaria

1. Calcular la longitud de arco de un sector de 96 cm de radio y que subtiende un ángulo central de $3^\circ 45'$

- a) π cm b) 2π cm c) 3π cm
d) 4π cm e) 5π cm

2. Calcular la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 40° en una circunferencia de 36cm de diámetro.

- a) π cm b) 2π cm c) 3π cm
d) 4π cm e) 5π cm

3. Hallar la medida del ángulo central cuyo arco correspondiente mide 11cm y radio 14cm

(usar: $\pi = \frac{22}{7}$)

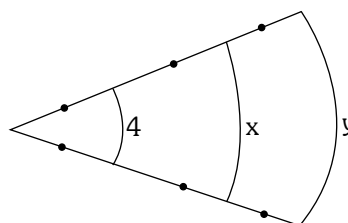
- a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{2}$ rad

- d) $\frac{\pi}{6}$ rad e) $\frac{3\pi}{2}$ rad

4. Dado un sector circular de arco $9(x - 1)$ cm, de radio $(x + 1)$ cm y ángulo central $(x^2 - 1)$ radianes. Calcular "x"

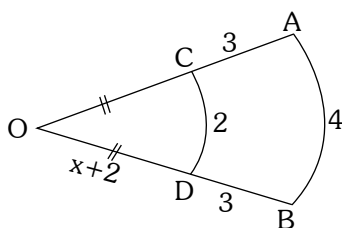
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

5. Del gráfico, calcular $(y - x)$



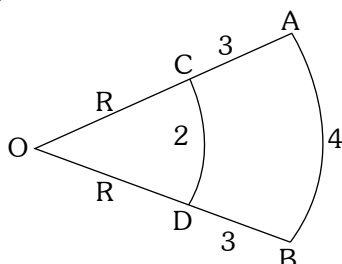
- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

6. Del gráfico mostrado. Hallar "x"



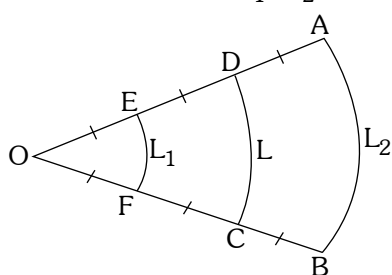
- a) 1 b) 2 c) 4
a) 4 b) 0,5

7. Del gráfico, determinar "R".



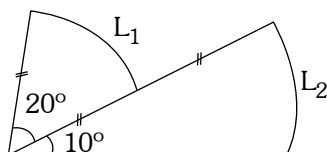
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 1 e) 5

8. En el gráfico, calcular "L". Si: $L_1 + L_2 = 16\pi$



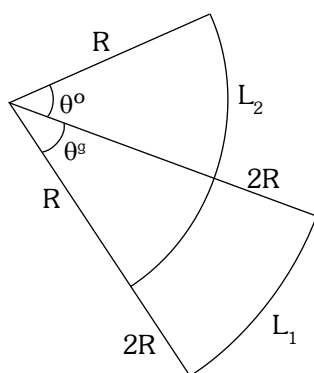
- a) 4π b) 8π c) 12π
d) 16π e) 6π

9. Hallar: $\frac{L_2}{L_1}$



- a) $1/3$ b) $2/3$ c) 1
d) $3/2$ e) $4/3$

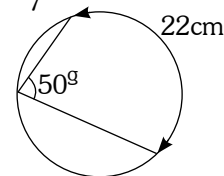
10. Del gráfico. Calcular: $K = \frac{L_2}{L_1}$



- a) $\frac{27}{10}$ b) $\frac{10}{27}$ c) $\frac{3}{7}$
d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{5}{9}$

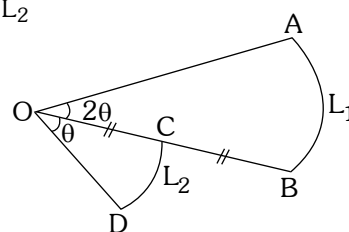
11. Del gráfico la medida del diámetro es:

(considerar: $\pi = \frac{22}{7}$)



- a) 11cm b) 22cm c) 28cm
d) 24cm e) 33cm

12. Calcular: $\frac{L_1}{L_2}$



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

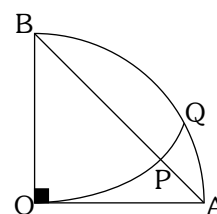
13. En un sector circular, el arco mide 10cm. Si duplicamos el ángulo central y aumentamos el radio en su doble, se obtiene un nuevo sector cuyo arco mide:

- a) 40cm b) 60cm c) 80cm
d) 10cm e) 120cm

14. Se tiene un sector circular de 6m de radio y 12m de longitud de arco. Si el radio aumenta en 2m sin que el ángulo varíe. ¿Cuál será la nueva longitud de arco?

- a) 8m b) 10m c) 12m
d) 14m e) 16m

15. En la figura mostrada: $OA = OB = 60$; O y B son centros. Calcular: $m\widehat{PQ}$

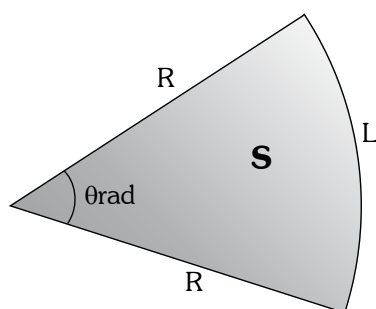


- a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

4

Área de un sector circular

Es aquella porción de área de un círculo que se mide en unidades cuadradas (cm^2 ; m^2 ; km^2 ;)



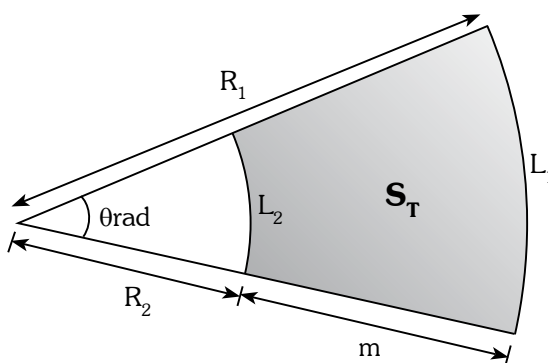
Se cumple:

$$S = \frac{\theta \times R^2}{2}$$

$$S = \frac{L \times R}{2}$$

$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

Área de un trapecio circular



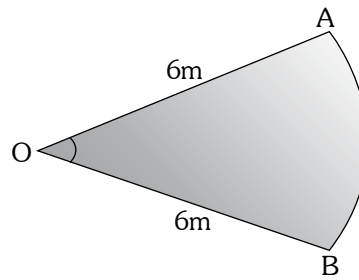
$$S_T = \frac{\theta (R_1^2 - R_2^2)}{2}$$

$$S_T = \frac{(L_1 + L_2) \times m}{2}$$

$$S_T = \frac{L_1^2 - L_2^2}{2\theta}$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del sector circular mostrado.



Resolución

Convertimos 30° a radianes:

$$30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

El número de radianes es:

$$\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

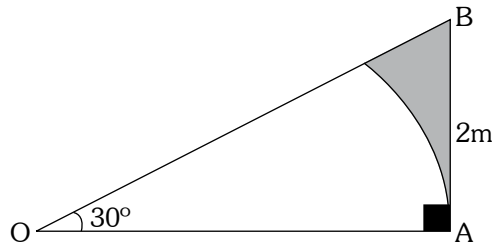
La longitud del radio es:

$$6\text{m} \Rightarrow r=6$$

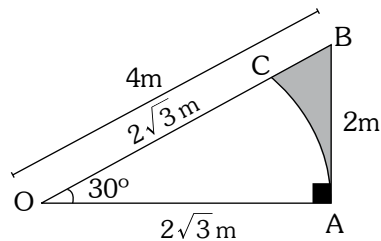
$$\text{Aplicamos la fórmula: } A = \frac{r^2}{2} \cdot \theta \rightarrow A = \frac{(6)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \rightarrow A = 3\pi$$

El área del sector circular es: $3\pi\text{m}^2$.

2. Calcular el área de la figura sombreada si "O" es centro del arco AC



Resolución



$$A_s = A_{\triangle OAB} - A_{\text{sector } OAC}$$

$$A_s = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} - \frac{(2\sqrt{3})^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$A_s = 2\sqrt{3} - \pi$$

El área de la figura sombreada es:

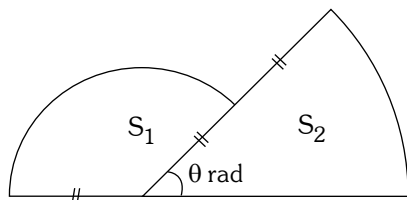
$$A_s = (2\sqrt{3} - \pi)\text{m}^2$$

Práctica

1. Si la longitud del arco de un sector circular es de 15m y la del radio es 6m. Calcular el área del sector.

a) $40m^2$ b) $45m^2$ c) $90m^2$
d) $50m^2$ e) $55m^2$

2. Calcular: " θ ". Si: $2S_1 = S_2$.



a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{6}$

3. El perímetro de un sector circular al ser elevado al cuadrado se obtiene 16 veces su área. Calcular la medida de su ángulo central.

a) 1rad b) 2rad c) 3rad
d) 4rad e) 5rad

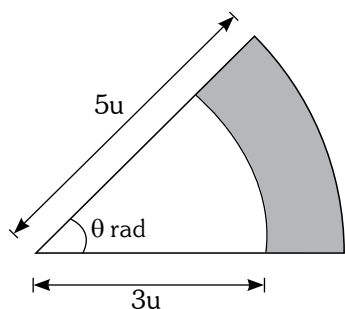
4. El ángulo central de un sector circular es igual a 16° , si se desea disminuir en 7° . ¿En cuánto hay que aumentar el radio del sector para que su área no varíe, si su longitud inicial era igual a 27m?

a) 3m b) 6m c) 9m
d) 12m e) 15m

5. ¿Cuánto debe medir el radio de un sector circular para que su área sea numéricamente igual a la longitud del arco?

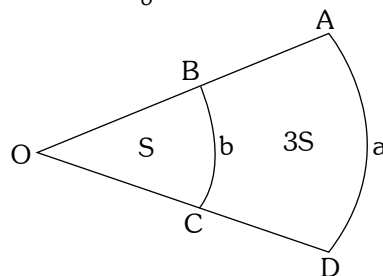
a) 1u b) 2u c) 3u
d) 4u e) 5u

6. Calcular: " θ " si el área de la región sombreada es $16u^2$



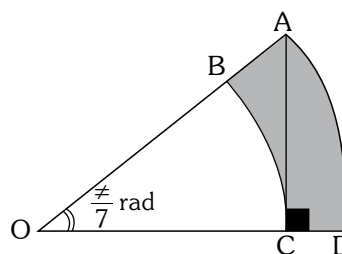
a) 1,5 b) 2 c) 2,5
d) 3 e) 3,5

7. Del gráfico, calcular: $\frac{a}{b}$



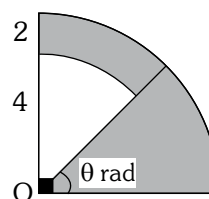
a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Calcular el área de la figura sombreada, siendo $AC = \sqrt{14}m$



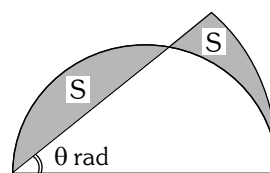
a) $\frac{\pi}{4}m^2$ b) $\frac{\pi}{2}m^2$ c) πm^2
d) $2\pi m^2$ e) $4\pi m^2$

9. En el gráfico, el área de la región sombreada es 8π . Calcular: " θ "



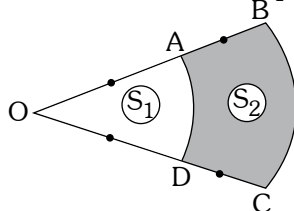
a) $\frac{3\pi}{11}$ b) $\frac{4\pi}{9}$ c) $\frac{3\pi}{8}$
d) $\frac{5\pi}{12}$ e) $\frac{3\pi}{7}$

10. Del gráfico, calcular: " θ "



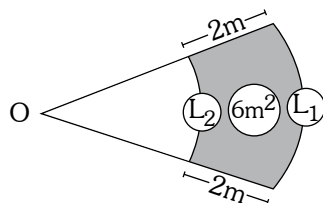
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{6}$

11. Del gráfico mostrado, calcular: $M = \frac{S_2}{S_1}$



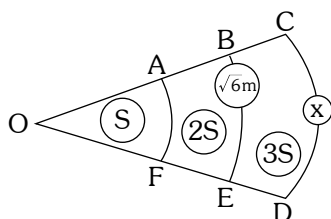
- a) 1 b) 1/2 c) 1/3
d) 2 e) 3

12. Del sector circular mostrado. Calcular: $(L_1 + L_2)$



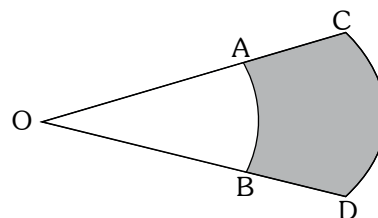
- a) 2m b) 4m c) 6m
d) 8m e) 10m

13. Del gráfico mostrado, calcular: "x" (S: Área).



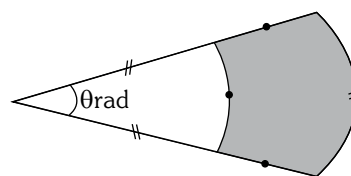
- a) 1m b) $2\sqrt{6}$ m c) $2\sqrt{3}$ m
d) $3\sqrt{6}$ m e) $3\sqrt{3}$ m

14. Del gráfico mostrado, el área de la región sombreada es igual al área de la región no sombreada, además la longitud del arco AB es 4u. Halle la longitud del arco DC (en u).



- a) $3\sqrt{2}$ u b) $4\sqrt{2}$ u c) 6u
d) $6\sqrt{2}$ u e) 8u

15. Del gráfico mostrado, hallar el valor de: $E = \theta^{-1} - \theta$



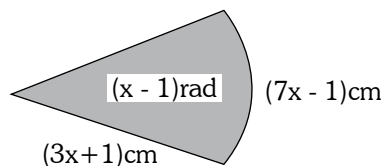
- a) 1 b) 6 c) 8
d) 3 e) 2

Tarea domiciliaria

1. Hallar el área de un sector circular cuya longitud de arco es 8cm y radio 4cm.

- a) 8cm^2 b) 4cm^2 c) 12cm^2
d) 16cm^2 e) 32cm^2

2. Del gráfico mostrado. Hallar el área del sector circular sombreado.

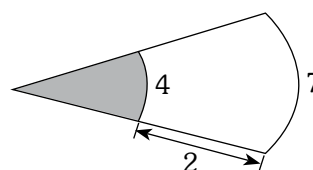


- a) 110cm^2 b) 230cm^2 c) 100cm^2
d) 140cm^2 e) 200cm^2

3. Hallar el área de un sector circular de radio 8m, que es igual al área de un cuadrado, cuyo lado es igual a la longitud de dicho sector.

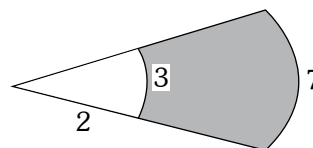
- a) 2m^2 b) 4m^2 c) 16m^2
d) 8m^2 e) 10m^2

4. Calcule el área sombreada.



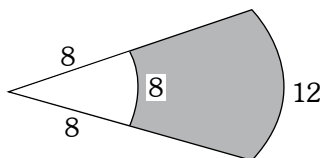
- a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{13}{3}$ c) $\frac{14}{3}$
d) $\frac{16}{3}$ e) $\frac{17}{3}$

5. Calcular el área de la región sombreada.



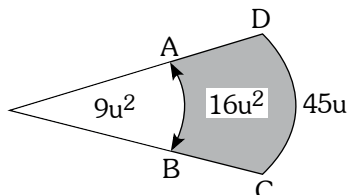
- a) $\frac{10}{3}$ b) $\frac{20}{3}$ c) $\frac{40}{3}$
d) $\frac{50}{3}$ e) $\frac{70}{3}$

6. Calcular el área sombreada.



- a) 20 b) 30 c) 40
d) 50 e) 60

7. Calcule la medida del arco AB en el gráfico adjunto.

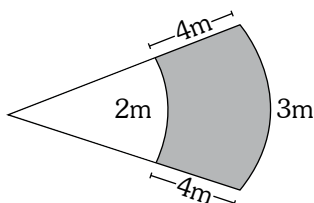


- a) 13 b) 14 c) 27 d) 35 e) 15

8. El perímetro de un sector circular de 2 cm, de radio es numéricamente igual a 3 veces el número de radianes de su ángulo central. Hallar el área de dicho sector.

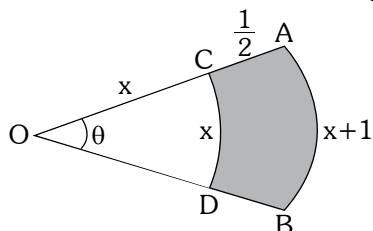
- a) 4cm^2 b) 6cm^2 c) 8cm^2
d) 10cm^2 e) 16cm^2

9. Del sector circular mostrado. Calcular el área de la figura sombreada.



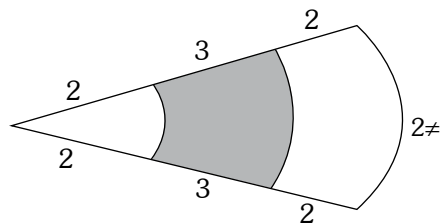
- a) 8m^2 b) 10m^2 c) 2m^2
d) 14m^2 e) 16m^2

10. Dada la figura, determinar el perímetro del sector circular COD, sabiendo además que el área de la región limitada por el trapecio circular es $\frac{7}{4}u^2$



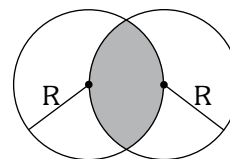
- a) 3 b) 9 c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{9}$ e) 6

11. Calcular el perímetro de la figura sombreada.



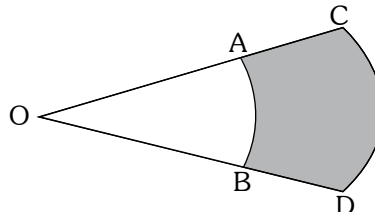
- a) $2(\pi+3)$ b) $2(\pi+1)$ c) $2(\pi+2)$
d) $3(\pi+3)$ e) $2(\pi+5)$

12. Calcular el perímetro de la región sombreada. $R=12$



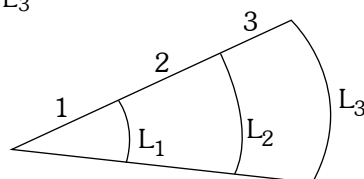
- a) $5\pi R$ b) $8\pi R$ c) $12\pi R$
d) $16\pi R$ e) $24\pi R$

13. Del gráfico mostrado, el área de la región sombreada es igual al área de la región no sombreada, además $L_{\widehat{AB}}=8u$. Halle la longitud del arco DC



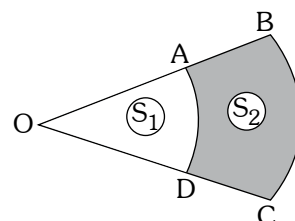
- a) $3\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $6\sqrt{2}$
d) 6 e) $8\sqrt{2}$

14. Hallar: $\frac{L_1 + L_2}{L_3}$.



- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

15. Del gráfico mostrado, calcular: $M = \frac{S_2}{S_1}$
Si: $AB=2OA$



- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

5

Repaso

1. En un triángulo ABC, se tiene que dos de sus ángulos internos son: $A = \left(\frac{2^0 3^1}{3^1}\right)^g$; $B = \left(\frac{3^g 2^m}{2^m}\right)^g$

Determine la medida del ángulo "C".

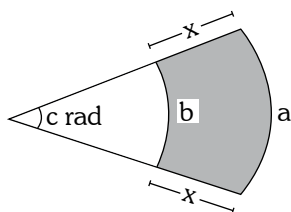
- a) 4^g b) 8^g c) 12^g
d) 16^g e) 20^g

2. Siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo. Hallar: su medida sexagesimal. Si se cumple:

$$\frac{S^3}{27} + \frac{C^3}{30} - \frac{20R^3}{3} = S^2 + C^2 - R^2$$

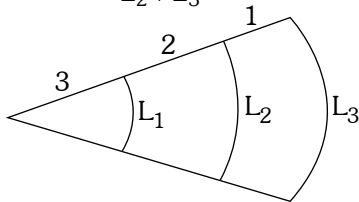
- a) 30° b) 60° c) 45°
d) 53° e) 27°

3. De la figura mostrada, calcule "x"



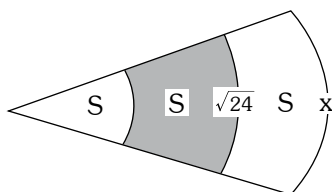
- a) $(a - b) \cdot c$ b) $(a + b) \cdot c$
c) $(a - b) \cdot c^{-1}$ d) $(a + b) \cdot c^{-1}$
e) $(a + b)^{-1} \cdot c$

4. En el gráfico, hallar: $\frac{L_1 + L_3}{L_2 + L_3}$



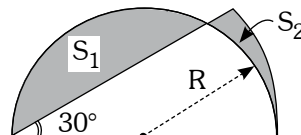
- a) $15/11$ b) $9/11$ c) $13/7$
d) $17/9$ e) $15/7$

5. Del gráfico mostrado, calcule "x". (S → área)



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

6. Siendo S_1 y S_2 áreas, calcule: $E = S_1 - S_2$; si: $R = \sqrt{6}$



- a) π b) 2π c) 3π
d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{5\pi}{2}$

7. Calcular: $\frac{R^\circ + E^\circ + P^\circ + A^\circ + S^\circ + O^\circ}{R^g + E^g + P^g + A^g + S^g + O^g}$

- a) $10/9$ b) $9/10$ c) 9
d) 10 e) 90

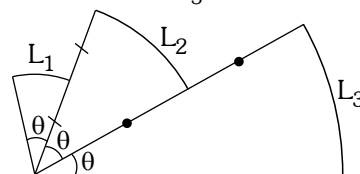
8. Calcular: $E = \frac{150^g + 15^\circ}{\frac{\pi}{12} \text{ rad}}$

- a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

9. Calcular: $E = \frac{T^\circ}{T^g} + \frac{R^g}{R^m} - \frac{I^g}{I^m} + \frac{I^m}{I^s} - \frac{C^\circ}{C^g} + \frac{E^g}{E^m}$

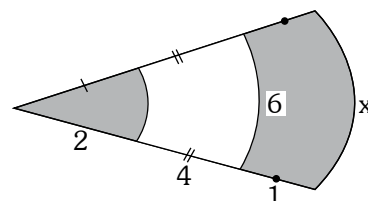
- a) $\frac{3150}{7}$ b) $\frac{3260}{27}$ c) $\frac{1603}{27}$
d) $\frac{137}{9}$ e) $\frac{251}{27}$

10. En el gráfico, hallar: $\frac{L_1 + L_2}{L_3}$



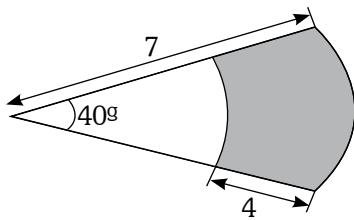
- a) 1 b) 2 c) 3
d) $3/4$ e) $2/3$

11. Calcular el área de la región sombreada.



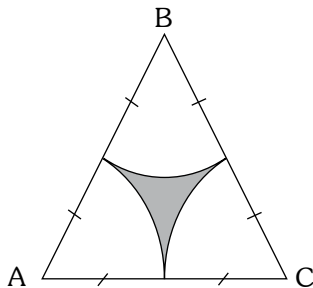
- a) $\frac{11}{2}$ b) $\frac{13}{2}$ c) $\frac{15}{2}$
d) $\frac{17}{2}$ e) $\frac{19}{2}$

12. Hallar el área sombreada.



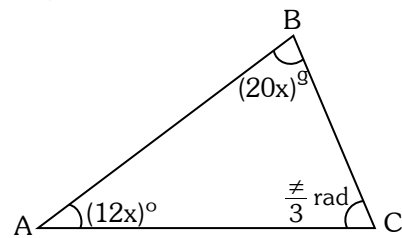
- a) π b) 2π c) 4π
d) 8π e) 16π

13. Si ABC es equilátero de lado 6 cm, hallar el área sombreada.



- a) $\frac{\sqrt{3}-\pi}{4}$ b) $\frac{18}{5}(\sqrt{3}-\pi)$ c) $\frac{9}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$
d) $\sqrt{3}+2\pi$ e) $9(\sqrt{3}-\pi)$

14. En el gráfico, hallar "x"



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. Determine: $a + b - c$, si:

$$a^\circ b' c'' = 40^\circ 35' 42'' + 20^\circ 47' 32''$$

- a) 50 b) 60 c) 70
d) 80 e) 100

Tarea domiciliaria

1. Hallar el equivalente de 54° en el sistema centesimal.

- a) 50^g b) 60^g c) 70^g
d) 40^g e) 30^g

2. Hallar el equivalente de $\frac{\pi}{36}$ rad en el sistema sexagesimal.

- a) 2° b) 3° c) 4° d) 5° e) 6°

3. Convierte 40° al sistema radial.

- a) $\frac{\pi}{5}$ rad b) $\frac{2\pi}{9}$ c) $\frac{2\pi}{7}$
d) $\frac{\pi}{9}$ e) $\frac{5\pi}{9}$

4. Determine: $a+b$, si: $\frac{3\pi}{8}$ rad = $a^\circ b'$

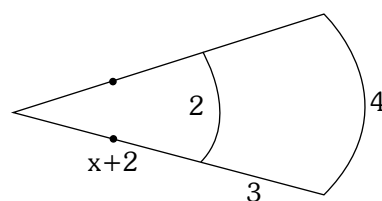
- a) 81 b) 83 c) 97
d) 105 e) 107

5. Siendo: S, C y R lo conocido, simplificar:

$$U = \frac{\pi S + \pi C + 20R}{(C-S)\pi}$$

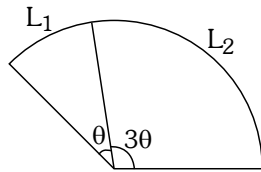
- a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

6. Hallar "x"



- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$
d) 2 e) 3

7. Calcular: $\frac{L_1}{L_2}$

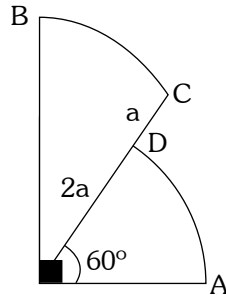


- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$
d) 2 e) 3

8. Un camino está conformado por 2 arcos cuyos radios son 9 y 3 y los ángulos centrales son 20° y 60° respectivamente.

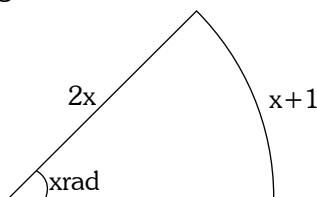
- a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

9. Hallar: $\frac{L_{AD}}{L_{BC}}$



- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{4}{3}$ e) 1

10. Hallar el ángulo central en el sector mostrado.



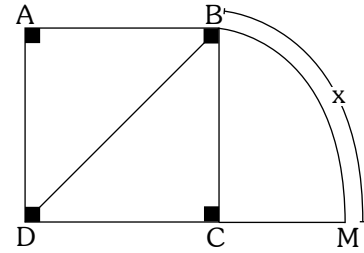
- a) 1rad b) 2rad c) 3rad
d) 0,5rad e) 0,25rad

11. Un sector circular de ángulo central θ radianes tiene el radio de igual medida que el lado de un triángulo rectángulo isósceles. Si sus perímetros son también iguales.

Calcule: $E = \theta + \frac{4}{\theta}$

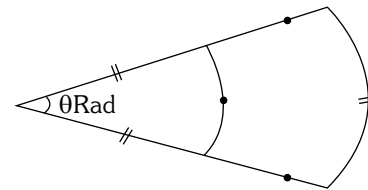
- a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$

12. Si ABCD es un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$, hallar "x", si es arco del sector BDM.



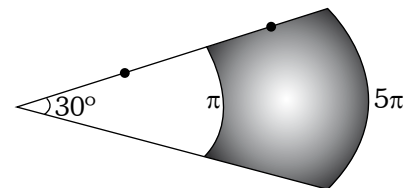
- a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{5}$

13. Calcular " $\theta^2 + \theta$ "



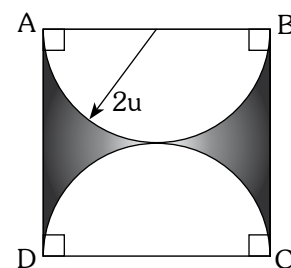
- a) 1 b) 2 c) 3
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

14. Determine el área sombreada.



- a) 21π b) 24π c) 36π
d) 72π e) 81π

15. Determine el área sombreada; ABCD es un cuadrado:



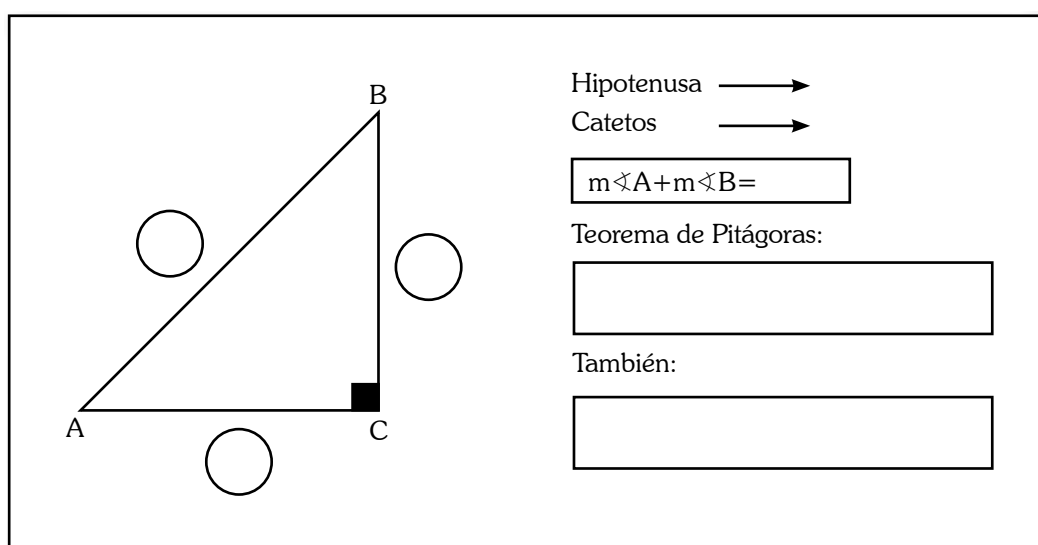
- a) $2(4 - \pi)$ b) $4(4 - \pi)$ c) $2(2 - \frac{\pi}{2})$
d) $4(1 - \pi)$ e) $4(4 - \frac{2\pi}{3})$

6

Razones trigonométricas de ángulos agudos I

Definición

Son relaciones obtenidas al dividir dos lados de un triángulo rectángulo tomados con respecto a uno de los ángulos agudos.



Definimos

Seno(sen)=	Cosecante (csc)=
Coseno(cos)=	Secante(sec)=
Tangente(tg)=	Cotangente(ctg)=

Del gráfico anterior: $c^2 = a^2 + b^2$ ó $a^2 = c^2 - b^2$

a) $\text{sen}A =$ _____

b) $\text{tg}B =$ _____

c) $\text{sec}A =$ _____

d) $\text{sen}B =$ _____

e) $\text{tg}A =$ _____

f) $\text{sec}B =$ _____

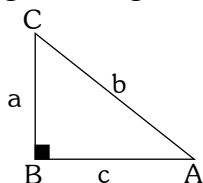
Ejercicios resueltos

1. Se tiene un triángulo rectángulo ABC. Calcular: $P = \frac{b}{a} \operatorname{sen} A + \frac{b}{c} \operatorname{sen} C + \frac{c}{a} \operatorname{tg} A$

a) $a+b+c$ b) $2a$ c) b d) $2c$ e) 3

Resolución

Se tiene un triángulo rectángulo ABC.



Reemplazando en:

$$P = \frac{b}{a} \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{b}{c} \left(\frac{c}{b} \right) + \frac{c}{a} \left(\frac{a}{c} \right)$$

$$\Rightarrow P = 1 + 1 + 1$$

$$\therefore P = 3$$

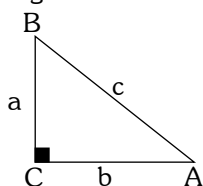


2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "C" reducir: $J = c \operatorname{sen} B - a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{csc} B$

a) $2a$ b) $2b$ c) a d) b e) c

Resolución

Graficando el triángulo ABC



Reemplazando en:

$$J = c \left(\frac{b}{c} \right) - a \left(\frac{b}{a} \right) + b \left(\frac{c}{b} \right)$$

$$\Rightarrow J = b - b + c$$

$$\therefore J = c$$

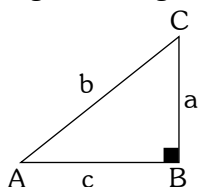


3. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se cumple que: $3 \tan A = 2 \operatorname{csc} C$. Calcular: $M = \sqrt{5} \operatorname{tg} A + 6 \sec C$

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

Resolución

Graficando el triángulo rectángulo.



Del dato: $3 \left(\frac{a}{c} \right) = 2 \left(\frac{b}{c} \right)$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} * a = 2 \\ * b = 3 \\ * c = ? \end{array} \right.$$

Para hallar "c", aplicamos el teorema de Pitágoras:

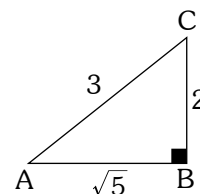
$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$$

Reemplazando:

$$3^2 = 2^2 + c^2$$

$$\therefore c = \sqrt{5}$$

Luego:



Reemplazando: $M = \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + 6 \left(\frac{3}{2} \right)$

$$\Rightarrow M = 2 + 3(3)$$

$$\therefore M = 11$$



Práctica

1. Si: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$. Determinar:

$$E = \sqrt{26} \operatorname{sen} x + \operatorname{ctg} x$$

- a) 1 b) 5 c) 6
d) 7 e) 9
2. En un triángulo rectángulo, un cateto es el doble del otro. Calcular el coseno del mayor ángulo agudo del triángulo.

- a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

3. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}=90^\circ$); reducir:

$$L = (b - a \operatorname{sen} A) \operatorname{csc} C$$

- a) a b) b c) c
d) c^2 e) 1

4. Sabiendo que: $2^{3+\operatorname{tg} \phi} = 4^3$; donde " ϕ " es un ángulo agudo, calcular:

$$C = 2 \sec^2 \phi + 10 \operatorname{sen}^2 \phi$$

- a) 17 b) 19 c) 21
d) 25 e) 29

5. Si: $p \cdot \operatorname{ctg} \theta = \sqrt{q^2 - p^2}$. Hallar: $\operatorname{sen} \theta$

- a) $\frac{p}{q}$ b) $\frac{q}{p}$
c) $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}$ d) $\frac{\sqrt{q^2 + p^2}}{q}$
e) pq

6. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}=90^\circ$) se sabe que: $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} C$, calcular:

$$L = \sec^2 A + 4 \sec^2 C$$

- a) 5 b) 6 c) 8
d) 9 e) 10

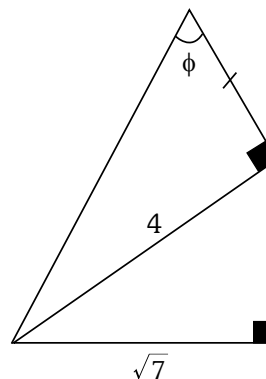
7. En un triángulo ABC, recto en "C" se sabe que: $\frac{\sec A}{\sec B} = \frac{2}{3}$

Calcular:

$$E = \sqrt{13} \cos A + 3 \operatorname{ctg} B$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

8. Del gráfico, calcular: $\operatorname{sen} \phi$



- a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6
d) 0,8 e) 1

9. Siendo " α " un ángulo agudo, tal que: $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$. Calcular:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

10. Los lados de un triángulo rectángulo son $x - 1$; x ; $x + 1$; determinar la tangente del mayor ángulo agudo del triángulo.

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$
d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{6}{7}$

11. En el trapecio ABCD: $BC \parallel AD$. Si: $AB = BC = 8$, $CD = 15$ y $AD = 25$ y la medida del ángulo $\hat{CDA} = D$, el valor de: $K = \operatorname{csc} D + \operatorname{ctg} D$, es:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

12. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}=90^\circ$) señale el equivalente de:

$$K = \left(\operatorname{tg} A \operatorname{tg} \frac{A}{2} + 1 \right) \left(\tan A \operatorname{ctg} \frac{A}{2} - 1 \right)$$

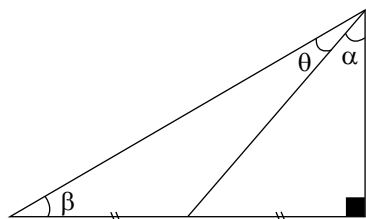
- a) $\operatorname{sen}^2 A$ b) $\cos^2 A$ c) $\operatorname{tg}^2 A$
d) $\operatorname{ctg}^2 A$ e) $\sec^2 A$

13. En un triángulo rectángulo los lados miden: $a + b$; $a - b$; $\sqrt{a^2 + b^2}$

Calcular la secante del mayor ángulo agudo.

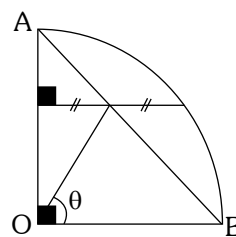
- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
d) 3 e) 2

14. Del gráfico, calcular: $W = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \theta}$



- a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

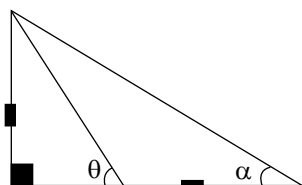
15. Siendo "O" centro, hallar: $\operatorname{tg} \theta$



- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{6}{5}$

Tarea domiciliaria

1. En la figura mostrada, calcular: $K = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \theta$



- a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

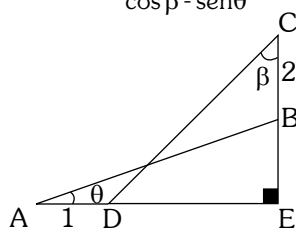
2. Si: $\frac{\operatorname{tg} A + 1}{\operatorname{tg} A - 1} = 2$; $0^\circ < A < 90^\circ$

Calcular: $N = 6 \operatorname{ctg} A + \sqrt{40} \cos A$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

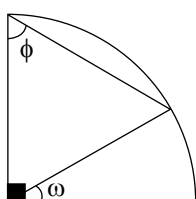
3. Del gráfico, si: $AB = CD$. Calcular:

$$M = \frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta - \operatorname{sen} \theta}$$



- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$

4. Del gráfico, calcular: $\operatorname{tg} \phi$, si: $\operatorname{tg} \omega = \frac{5}{12}$



- a) 0,5 b) 1 c) 1,5
d) 2 e) 2,5

5. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B). Reducir:
 $K = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C) \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 40m. Si " θ " es uno de sus ángulos agudos y $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Hallar su perímetro.

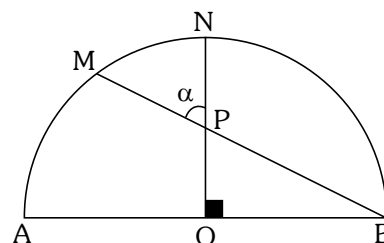
- a) 96m b) 64m c) 120m
d) 86m e) 69m

7. Si: "A" y "B" son ángulos agudos de un triángulo rectángulo, simplificar:

$$R = \left[\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{csc} B} + \frac{\cos B}{\sec A} \right] \operatorname{csc} B \operatorname{csc} A$$

- a) 6 b) 3 c) 2 d) 8 e) 5

8. De la figura, calcular: $\operatorname{sen} \alpha$. (O $\rightarrow$ centro), $MP = 1$; $PB = 2$



- a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

9. En un triángulo ABC, recto en C, se sabe: $\frac{\sec A}{\sec B} = \frac{2}{3}$. Calcular: $E = \sqrt{13} \cos A + 3 \operatorname{ctg} B$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10. Calcule el área de la región triangular ABC

Donde: $AC=36m$; si, además:

$$\csc A = \sqrt{17} \wedge \csc C = \sqrt{26}$$

- a) $72m^2$ b) $144m^2$ c) $108m^2$
d) $18m^2$ e) $360m^2$

11. Dado un triángulo ABC (recto en C) donde se cumple:

$$\frac{a-b+c}{a-b+7c} = \frac{1}{7}$$

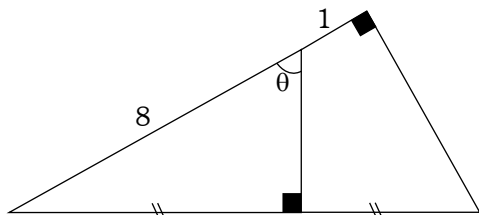
Calcular: $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} - \operatorname{sen} A \sec B$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2}$

12. En un triángulo rectángulo el área y el perímetro son iguales numéricamente, si el coseno de uno de los ángulos agudos es 0,8. Hallar la longitud del lado mayor.

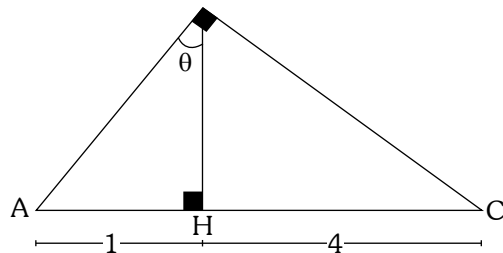
- a) 5 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10

13. Calcular: $\operatorname{ctg} \theta$.



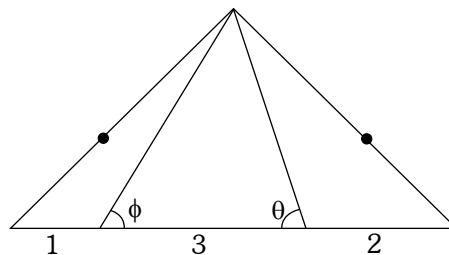
- a) 2 b) 3 c) $\sqrt{7}$
d) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

14. Del gráfico, calcular: $\operatorname{ctg} \theta$



- a) 2 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

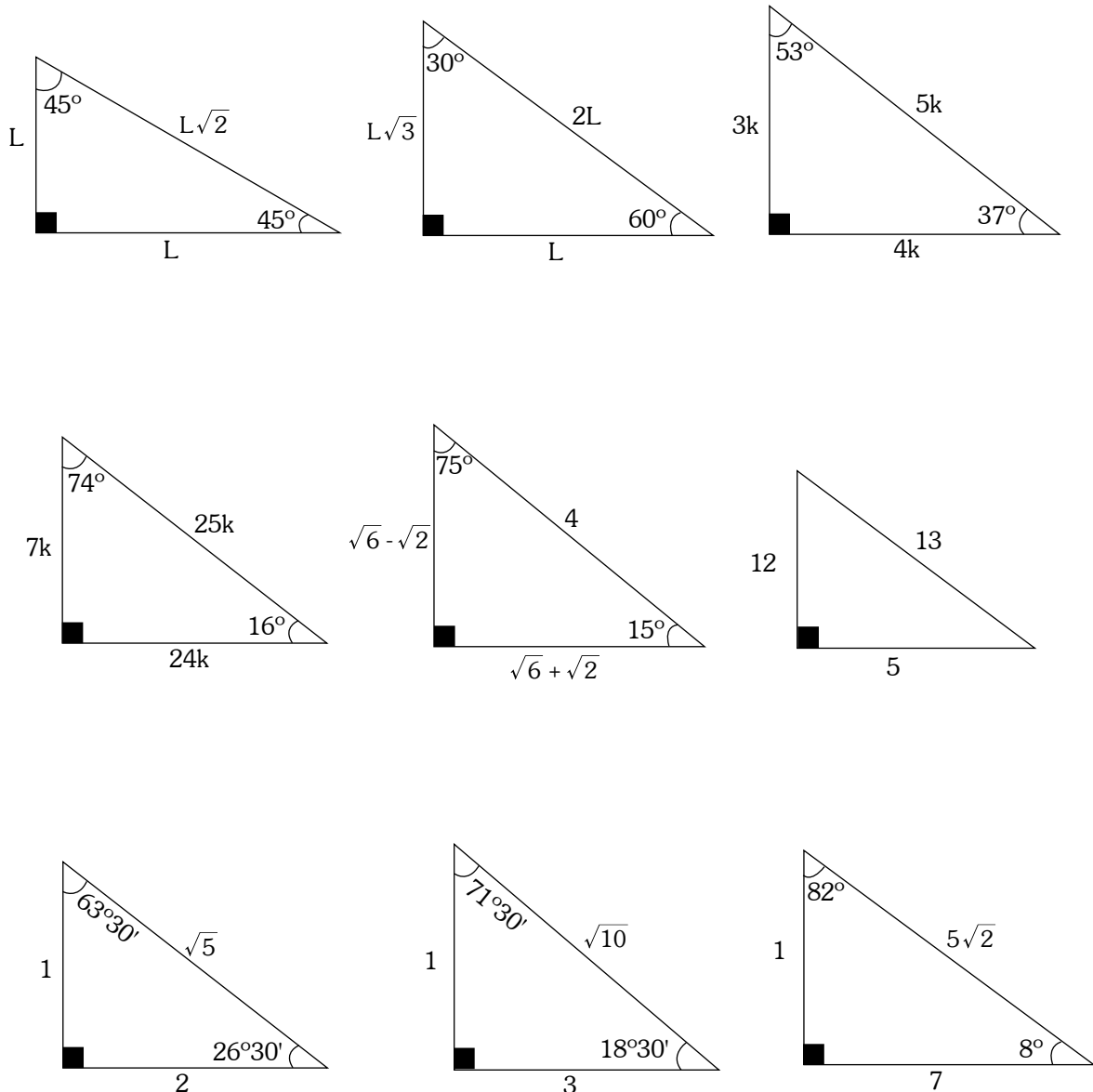
15. Del gráfico, calcular: $\operatorname{tg} \phi \operatorname{ctg} \phi$



- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 3 e) 2

7

Razones trigonométricas II de ángulos notables



Ejercicios resueltos

1. Calcular: $A = \frac{\operatorname{tg}^2 45^\circ + \sec^2 60^\circ}{5 - 3\operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ}$

- a) 5 b) 5,3 c) 2,5 d) 2,7 e) 2,8

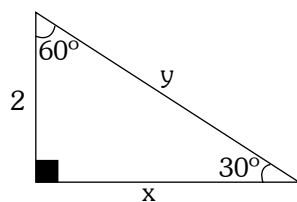
Resolución

Reemplazando los valores:.

$$A = \frac{(1)^2 + (2)^2}{5 - 3(\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

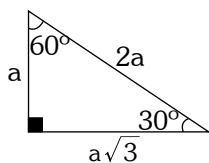
$$\rightarrow A = \frac{1+4}{5-3} \rightarrow A = 2,5$$

2. Del gráfico mostrado. Hallar "x+y"



- a) 1 b) $2 + \sqrt{3}$ c) $4 + \sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$ e) $4 + 2\sqrt{3}$

Resolución



Recordar:

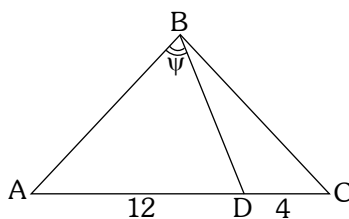
* Se nota: $a=2$

$$\Rightarrow x = a\sqrt{3} \rightarrow \therefore x = 2\sqrt{3}$$

$$y = 2a \rightarrow \therefore y = 4$$

$$\text{Luego: } x+y = 4 + 2\sqrt{3}$$

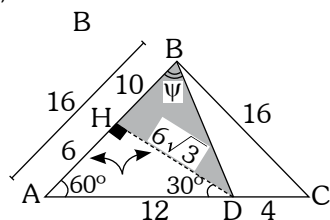
3. En un triángulo ABC equilátero mostrado. Calcular " $\operatorname{tg} \psi$ "



- a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

Resolución

Como el ángulo " ψ " no está en un triángulo rectángulo, entonces trazamos la altura DH. ($DH \perp AB$)



$$* \triangle BHD \rightarrow \operatorname{tg} \psi = \frac{6\sqrt{3}}{10}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \psi = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

Práctica

1. Hallar el valor de: $E = (\sec 45^\circ)^{\sec 60^\circ} + 5 \sin 37^\circ$
 a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

2. Calcular:

$$M = \frac{\sqrt{6} \sec 45^\circ \sec 30^\circ + 5(\sin 37^\circ + \sin 53^\circ)}{\tan 45^\circ + 3 \sec 53^\circ}$$

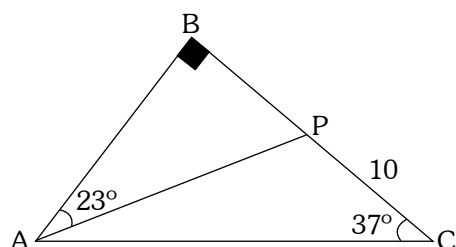
- a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{13}{6}$ c) $\frac{11}{6}$
 d) $\frac{17}{6}$ e) $\frac{17}{5}$

3. Calcular el valor de "x" en:

$$\frac{x \cos 60^\circ + \tan 45^\circ}{x \cos 60^\circ - \tan 45^\circ} = \csc 53^\circ$$

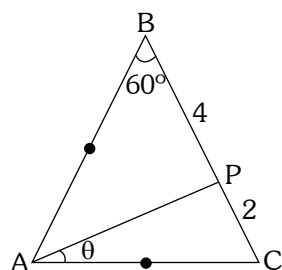
- a) 10 b) 12 c) 16 d) 18 e) 20

4. Del gráfico, hallar: AP



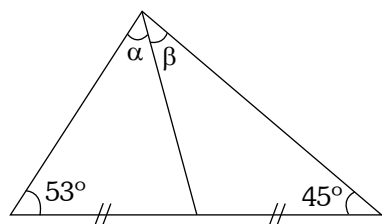
- a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 18

5. Del gráfico, hallar: " $\tan \theta$ ".



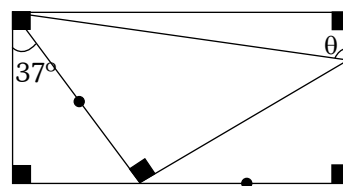
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

6. De la figura, hallar: $P = 5 \sin \alpha \csc \beta$



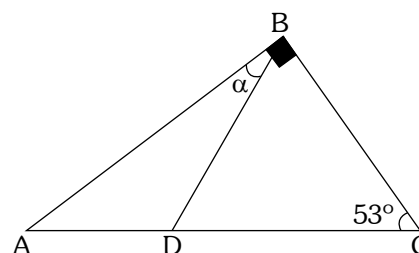
- a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$
 d) $4\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$

7. De la figura, hallar: $\tan \theta$



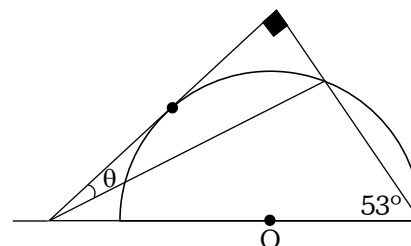
- a) 24 b) 28 c) 30 d) 32 e) 36

8. En el gráfico, $DC = 2AD$. Calcular: " $\tan \alpha$ "



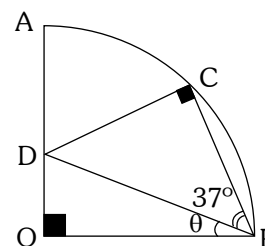
- a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{8}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{8}$

9. Del gráfico, hallar: $\tan \theta$



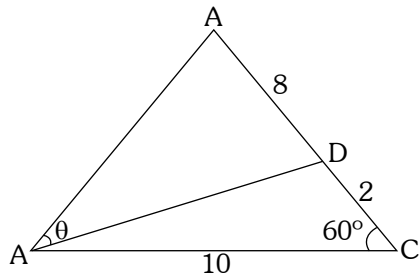
- a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{5}{16}$
 d) $\frac{7}{16}$ e) $\frac{9}{16}$

10. Del gráfico, hallar: $\tan \theta$



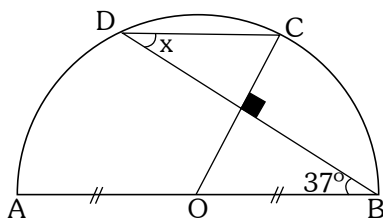
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{7}$

11. Calcular $\text{ctg}\theta$, de acuerdo al gráfico mostrado.



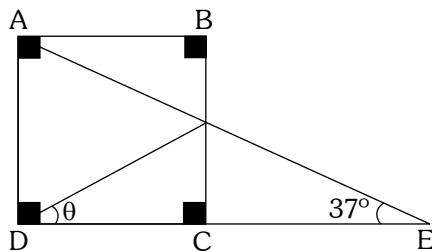
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. Del gráfico, calcular $\text{tg}x$; además "O" es el centro de la semicircunferencia.



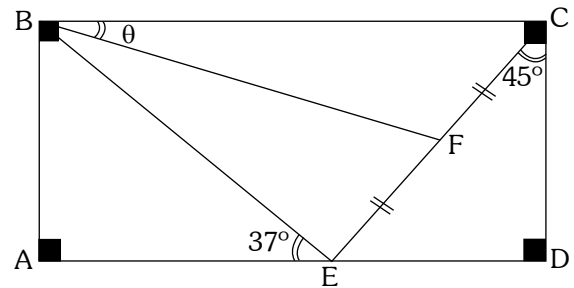
- a) 2 b) 1 c) $\sqrt{3}$
 d) 0,5 e) $\frac{3}{4}$

13. Del gráfico, hallar $\text{tg}\theta$ (ABCD es cuadrado).



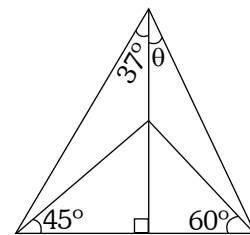
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

14. Del gráfico, calcular: " $11\text{tg}\theta$ "



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

15. Encontrar: $\sqrt{\text{tg}\theta}$ del gráfico mostrado.



- a) $\frac{4\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
 d) $\frac{2^4\sqrt{27}}{3}$ e) $\frac{3}{16}$

Tarea domiciliaria

1. Calcular: $E = 3\sec 53^\circ - \text{tg} 45^\circ \sec 60^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

2. Hallar "x" en: $5x\text{sen} 37^\circ - \csc 30^\circ = x + \text{ctg} 45^\circ$

- a) 0,5 b) 1 c) 1,5
 d) 2 e) 2,5

3. Si: $\text{ctg}\alpha = \sec 37^\circ$. Determine:

$$E = \sqrt{41} \text{sen}\alpha + 8\text{ctg}\alpha$$

- a) 11 b) 12 c) 13
 d) 14 e) 15

4. Reducir:

$$\frac{\text{sen} 30^\circ + \csc 30^\circ + \sec 60^\circ + \cos 60^\circ}{\text{tg} 45^\circ + \text{ctg} 45^\circ} - \frac{\text{tg}^2 60^\circ}{3}$$

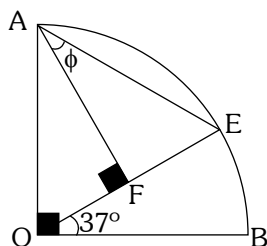
- a) 1 b) 1,2 c) 1,3
 d) 1,4 e) 1,5

5. Halle el valor de x en la ecuación:

$$6(x-1)\cos^2(45^\circ) - (x-4)\csc(30^\circ) = \frac{x}{2}\text{tg}^2(60^\circ), \text{ es:}$$

- a) 10 b) $\frac{21}{5}$ c) 15
 d) $\frac{21}{4}$ e) 14

6. Del gráfico, calcular: " $\text{ctg}\phi$ "



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

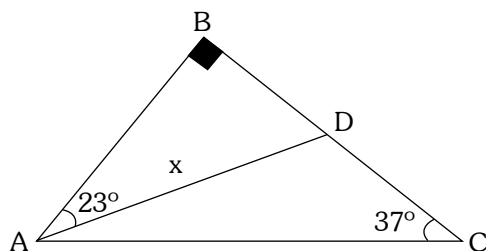
7. En un triángulo rectángulo ACB, recto en C, se tiene que $\sec A = 2\cos B$; entonces la medida del ángulo B es:

- a) 80° b) 60° c) 45°
d) 53° e) 37°

8. El perímetro de un triángulo rectángulo es 20m y uno de sus ángulos agudos mide 37° . Hallar la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

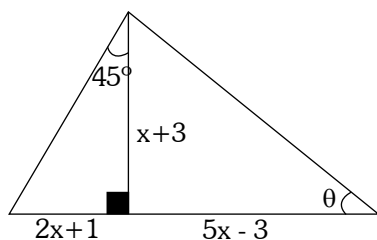
- a) 8m b) 3m c) 4m
d) 5m e) 6m

9. En el gráfico mostrado, hallar "x". Si : $DC = 10$



- a) 13 b) 12 c) 11 d) 9 e) 6

10. Del gráfico, hallar: " $\text{ctg}\theta$ "



- a) 1,6 b) 1,7 c) 0,4
d) 0,6 e) 1,4

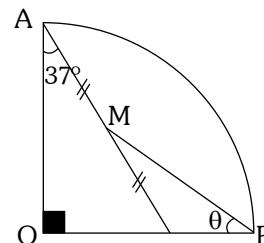
11. Calcular: $\text{tg}\frac{53^\circ}{2}$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

12. Calcular: $\text{tg}\frac{45^\circ}{2}$

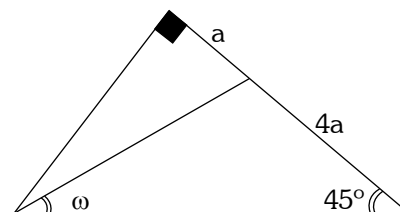
- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + 1$ c) $\sqrt{2} - 2$
d) $1 - \sqrt{2}$ e) $\sqrt{2} + 2$

13. Del gráfico, obtener: " $\text{tg}\theta$ "



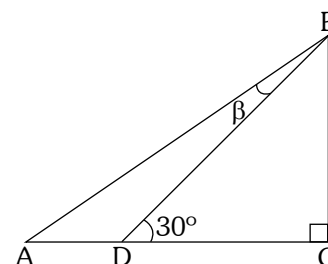
- a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{4}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{5}$

14. Del gráfico, calcular: " $\text{ctg}\omega$ "



- a) 1 b) 1,5 c) 2
d) 2,5 e) 3

15. En la figura, $BD = 10\text{cm}$ y $\text{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{13}$. La longitud de AD es:



- a) $\frac{5}{2}\sqrt{3}\text{cm}$ b) $\sqrt{3}\text{cm}$ c) $4\sqrt{3}\text{cm}$
d) $3\sqrt{3}\text{cm}$ e) $2\sqrt{3}\text{cm}$

8

Propiedades de las razones trigonométricas

Razones recíprocas (inversas)

a) sen ; csc		$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$	} <i>Ángulos iguales</i>
b) cos ; sec	→	$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$	
c) tg ; ctg		$\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1$	

Razones de ángulos complementarios (co – razones)

		Si: $m\angle A + m\angle B = 90^\circ$	} <i>Ángulos complementarios</i>
a) sen ; cos		Entonces: $\text{sen}A = \text{cos}B$	
b) sec ; csc		$\text{sec}A = \text{csc}B$	
c) tg ; ctg		$\text{tg}A = \text{ctg}B$	

Ejercicios resueltos

1. Sabiendo que: $\cos(60^\circ - x) \sec 2x = 1$; $\sin 3x = \cos 3y$. Hallar " $2y - x$ "

- a) 10° b) 30° c) 60° d) 40° e) 0°

Resolución

* Por: R.T.R.

$$\Rightarrow 60^\circ - x = 2x \Rightarrow x = 20^\circ$$

* Por: R.T.C.

$$\sin 3x = \cos 3y$$

$$\Rightarrow 3(20^\circ) + 3y = 90^\circ \Rightarrow y = 10^\circ$$

$$\text{Piden: } 2y - x = 0^\circ$$



2. Si: $\sin 2x \sec y = 1$; calcular: $P = \csc^2\left(\frac{2x+y}{3}\right) + \csc^2\left(\frac{2x+y}{2}\right)$

- a) 4 b) 6 c) 8 d) 5 e) 10

Resolución

$$\text{Del dato: } \sin 2x \underbrace{\sec y}_{\csc(90^\circ - y)} = 1$$

$$\text{Luego: } \sin 2x \csc(90^\circ - y) = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 90^\circ - y \Rightarrow 2x + y = 90^\circ$$

Reemplazando en:

$$P = \csc^2\left(\frac{90^\circ}{3}\right) + \csc^2\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$$

$$P = \csc^2 30^\circ + \csc^2 45^\circ$$

$$P = 2^2 + \sqrt{2}^2$$

$$\therefore C = 6$$



3. Si: $\sin(4x + 10^\circ) \operatorname{tg}(3x + 30^\circ) \sec x = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3x)$. Calcular: $P = 6 \tan^2(3x - 18^\circ) + 7 \operatorname{tg}^6(x + 29^\circ)$

- a) 2 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

Resolución

Del dato:

$$\sin(4x + 10^\circ) \operatorname{tg}(3x + 30^\circ) \sec x = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3x) \dots (1)$$

$$(3x + 30^\circ) + (60^\circ - 3x) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(3x + 30^\circ) = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3x)$$

En (1):

$$\sin(4x + 10^\circ) \operatorname{ctg}(60^\circ - 3x) \cdot \sec x = \operatorname{ctg}(60^\circ - 3x)$$

$$\sin(4x + 10^\circ) \csc(90^\circ - x) = 1$$

$$\Rightarrow 4x + 10 = 90^\circ - x$$

$$5x = 80^\circ$$

$$x = 16^\circ$$

Piden:

$$P = 6 \operatorname{tg}^2(3x - 18^\circ) + 7 \operatorname{tg}^6(x + 29^\circ)$$

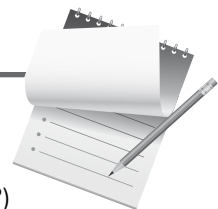
$$P = 6 \operatorname{tg}^2(48^\circ - 18^\circ) + 7 \operatorname{tg}^6(16^\circ + 29^\circ)$$

$$P = 6 \operatorname{tg}^2 30^\circ + 7 \operatorname{tg}^6 45^\circ$$

Reemplazando:

$$P = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 7(1)^6$$

$$P = 6\left(\frac{1}{3}\right) + 7 \rightarrow \therefore P = 9$$



Práctica

1. Determinar con "V" si es verdadera o "F" si es falsa la proposición:

- I. $\sec 20^\circ = \csc 70^\circ$ ()
 II. $\operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{ctg} 50^\circ$ ()
 III. $\operatorname{sen} 27^\circ \cdot \csc 27^\circ = 1$ ()
 IV. $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{ctg} 65^\circ = 1$ ()
 a) VFVV b) VVFF c) VFVV
 d) VFVF e) FVVF

2. Si: $\operatorname{tg}(80^\circ - 2x) \operatorname{ctg}(7x + 8^\circ) = 1$

Halle: $R = \sec(8x - 4^\circ) + \csc^2(5x + 5^\circ)$

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 6 e) 8

3. Si: $\operatorname{sen} 7x = \cos 2x$

Calcular: $A = \operatorname{tg}^2 6x + \csc 3x$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

4. Si: $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 4x = 1$

Calcular: $\operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen} 2x$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{4}{3}$

5. Siendo " α " un ángulo agudo, tal que:

$$3\cos\alpha = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 89^\circ$$

Calcular: $C = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha + 8\csc^2 \alpha$

- a) 10 b) 11 c) 12
 d) 13 e) 14

6. Siendo x e y complementarios y además:

$$(\cos y)^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} 45^\circ$$

Calcular: $E = \operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} y + \sec x$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

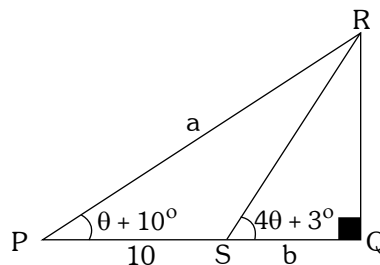
7. Calcular:

$$A = (2\operatorname{sen} 20^\circ + 3\cos 70^\circ)(5\csc 20^\circ - 3\sec 70^\circ)$$

- a) 2 b) 3 c) 5
 d) 10 e) 15

8. Si: $\operatorname{sen}(6\theta + 20^\circ) = \cos(2\theta + 2^\circ)$. Calcular:

$$M = b^2 \cdot \frac{a^2}{6}$$



- a) 2 b) 4 c) 6
 d) 8 e) 10

9. Si: $\cos \theta = \frac{\operatorname{sen} 50^\circ \cdot \sec 40^\circ}{3\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ + 2\operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ}$

Calcular: $M = \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

10. Sabiendo: $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} x \right)$

Señale el valor de: $T = \operatorname{tg}^5 x + \operatorname{ctg}^5 x$

- a) 2 b) 4 c) 33
 d) 25 e) 26

11. Si: $\operatorname{sen}(x + 20^\circ) \sec(30^\circ + 3x) = 1$. Calcular:

$$W = \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} 3x}{\cos 7x - \operatorname{ctg} 6x} - \frac{\sec 4x}{\csc 5x}$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2

12. Si: $\operatorname{tg}(2x + y) \operatorname{ctg} 40^\circ = 1$; $\operatorname{sen}(x - y) = \cos 70^\circ$. Calcular:

$$E = 2x - 5y$$

- a) 40° b) 20° c) 24°
 d) 32° e) 36°

13. Si: $\sec \alpha = \csc 2\phi$. Hallar:

$$R = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \phi \right) + \sec(330^\circ - 3\alpha - 6\phi)$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

14. Si: $\operatorname{tg}(2x + 25^\circ) = \operatorname{ctg}(5x - 5^\circ) + \operatorname{tg} 45^\circ - 2\cos 60^\circ$. Hallar " x " (agudo)

- a) 10° b) 20° c) 30°
 d) 40° e) 45°

15. Si: $A + 2B = 90^\circ$. Calcular:

$$Q = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{ctg} 2B} + \frac{3\operatorname{tg}(A + B)}{\operatorname{ctg} B} + \frac{7\operatorname{tg}(A - B)}{\operatorname{ctg} 3B} + 2$$

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Tarea domiciliaria

- ¿Para qué valor de "x" se cumple que:
 $\cos(60^\circ - x) = \sin(70^\circ - 3x)$?
 a) 5° b) 15° c) 25°
 d) 10° e) 50°
- Calcular: $E = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ} + \frac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ}$
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- Si: $\sin 2x = \cos 3x$, "x" agudo, calcular:
 $E = 4 \tan(2x + 1^\circ) + 3 \tan(3x - 1^\circ)$
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9
- Siendo: $\sin(3x - 17^\circ) \csc(x + 13^\circ) = 1$. Calcular:
 $E = \csc 2x + \cot 3x + \sec 4x$
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9
- Calcular: $E = (5 \sin 20^\circ + 3 \cos 70^\circ)(5 \csc 20^\circ - 2 \sec 70^\circ)$
 a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 28
- Reducir: $P = \left(\frac{3 \sin 40^\circ}{\cos 50^\circ} + \frac{2 \tan 29^\circ}{\cot 61^\circ} + \frac{4 \sec 22^\circ}{\csc 68^\circ} \right)^{\cos 60^\circ}$
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- Reducir: $P = (5 \cos 20^\circ - 3 \sin 70^\circ) \csc 70^\circ$
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- Hallar "x".
 $\sin 40^\circ \cos 45^\circ \sec(x + 30^\circ) = \cos 50^\circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \csc(x + 30^\circ)$
 a) 12° b) 13° c) 14°
 d) 15° e) 18°
- Sabiendo que: $\tan(3x - 10^\circ) \tan 40^\circ = 1$. Calcular:
 $E = 3 \sec 3x + 5 \sin(2x - 3^\circ)$
 a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9
- Calcular: $\alpha + \beta$, si: $\sin \alpha - \cos 2\beta = 0$; $\sin \beta \csc 4\alpha = 1$
 a) 50° b) 40° c) 30°
 d) 60° e) 80°
- Si: $\tan(2x + 20^\circ) \tan(80^\circ - 3x) = 1$. Calcular:
 $M = \frac{\sin 3x}{\cos(50^\circ + x)} + \tan 70^\circ \tan(3x - 10^\circ)$
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- Si: $n = \frac{\sin 42^\circ}{\cos 48^\circ} + \frac{\tan 32^\circ}{\cot 58^\circ}$. Calcular: $P = \sin \frac{\pi}{3n} + \tan \frac{\pi}{2n}$.
 a) 1 b) 1,5 c) 2
 d) 2,5 e) 2
- Si: " α " $\wedge$ " β " son complementarios.
 Además: $16 \sin \alpha = \sec \beta$. Hallar: $\sqrt[4]{\sin \alpha}$
 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{3}$
- Siendo " α ", " β " y " θ " las medidas de tres ángulos agudos que verifican el siguiente sistema de ecuaciones:
 $\cos(\alpha + \beta) = \sin 20^\circ$
 $\cos(\beta - \theta) = \sin 40^\circ$
 $\cot(\alpha - \theta) = \tan 80^\circ$
 Luego, uno de ellos será:
 a) 75° b) 65° c) 55°
 d) 45° e) 25°
- Para: $x = 15^\circ$; calcular:
 $H = \frac{\sin(2x + 5^\circ)}{\cos(3x + 10^\circ)} + \frac{\tan 30^\circ}{\tan(5x - 15^\circ)} + \frac{\csc(2x + 10^\circ)}{\sec(4x - 10^\circ)}$
 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

9

Repaso

1. En un triángulo, " θ " es uno de los ángulos agudos. Si: $\cos\theta = \frac{1}{3}$, calcule el valor de: $E = \sqrt{2} (\csc\theta - \operatorname{ctg}\theta)$

a) 1 b) 0,5 c) 0,3
d) 0,4 e) 0,2

2. En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), calcule: $H = (\operatorname{tg}B + \operatorname{ctg}B)^2 - (\operatorname{ctg}A - \operatorname{tg}A)^2$

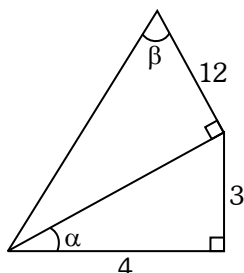
a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 8

3. En un triángulo ABC, recto en B se cumple:

$\operatorname{tg} A = 40/9$; calcule: $E = \sqrt{\frac{41(\operatorname{sen} A + \cos)}{\operatorname{tg} A + \sec A}}$
a) $7/3$ b) $3/7$ c) $5/4$
d) $4/5$ e) 1

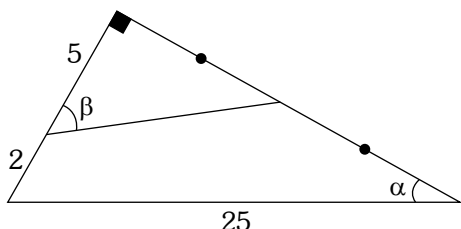
4. Del gráfico, calcular: $M = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \csc \beta}{\sec \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}$

a) $16/19$
b) $16/15$
c) $48/5$
d) $5/48$
e) $15/16$



5. Del gráfico, calcular: $G = \sqrt{\operatorname{tg} B - \cos \alpha}$

a) $5/6$
b) $6/5$
c) $1/5$
d) 5
e) $3/5$



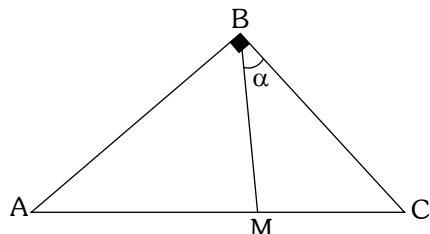
6. En un triángulo rectángulo ABC recto en B; se cumple que: $\operatorname{tg} A = 1,333\dots$

Calcular: $N = \frac{2 \sec A - 3 \operatorname{ctg} A}{3 \csc A - 2 \operatorname{tg} A}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

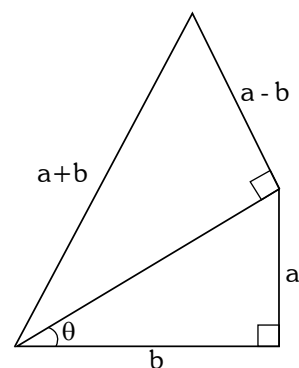
7. En el gráfico $\overline{BM}$ es mediana y mide 15m. Si: $5 \operatorname{sen} \alpha - 3 = 0$, halle el perímetro del triángulo.

a) 60 m
b) 64 m
c) 80 m
d) 72 m
e) 75 m



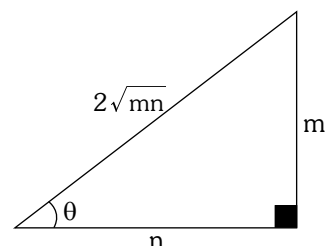
8. Del gráfico, calcule: $E = \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5



9. De la figura, hallar: $E = (\operatorname{tg}\theta - 2)^2$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4



10. Calcular: $M = (7^\circ \operatorname{sen} 40^\circ - 5 \cos 50^\circ)(9 \csc 40^\circ - 7 \sec 50^\circ)$
a) 1 b) 2 c) 4 d) 12 e) 18

11. Calcular: $M = \frac{\operatorname{ctg}^2 30^\circ \cdot \sec 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ}{2 \operatorname{tg}^2 30^\circ + \sec^2 45^\circ}$

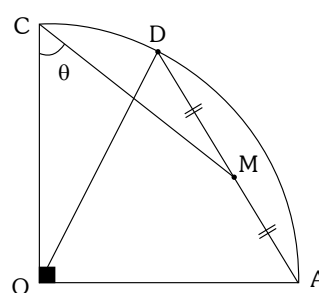
a) 2 b) 2,25 c) 2,5 d) 2,75 e) 3

12. En la igualdad: $\left[\left[(\operatorname{sen} 60^\circ)^{\cos 45^\circ} \right]^{\sec 37^\circ} \right]^{m - \cos 60^\circ} = 1$
halle: $Q = m^{\frac{1}{2}}$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1
d) 0 e) $\frac{1}{2}$

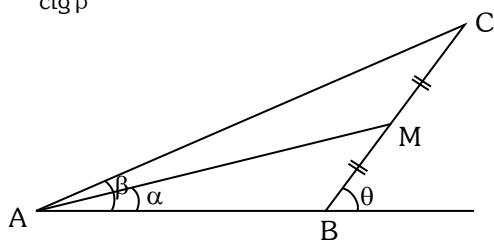
13. Si AOC es un cuadrante, calcular: $M = 4\sqrt{3 \operatorname{ctg}\theta + \sqrt{3}}$ y AOD es equilátero.

a) 1
b) 2
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) 3



14. De acuerdo al gráfico, determine:

$$Q = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \beta}$$



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

15. Siendo " α " un ángulo agudo, tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} + \sqrt{4x+1}$$

$$\text{Calcular: } M = \frac{\sec \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\csc \alpha + \cos \alpha}$$

- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) 3
d) 6 e) 9

Tarea domiciliaria

1. Siendo: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$, " α " es agudo. Calcular " $\csc \alpha$ "

- a) $\frac{17}{15}$ b) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{17}{8}$ d) $\frac{17}{12}$ e) $\frac{2}{7}$

2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "A", reducir: $R = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{tg} B a^2$

- a) a^2 b) b^2 c) c^2 d) ab e) bc

3. En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$), reducir: $S = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C + \operatorname{sen} A \sec C + \cos A \csc C$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$), reducir: $Q = \sec^2 A - \operatorname{ctg}^2 C + \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 C$

- a) 1 b) -1 c) 2 d) 0 e) -2

5. En un triángulo rectángulo, un cateto es el doble del otro. Calcular la secante del menor ángulo agudo.

- a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\sqrt{5}$

6. En un triángulo rectángulo, un cateto es el triple del otro cateto. Calcular la cosecante de su menor ángulo agudo.

- a) $\sqrt{10}$ b) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

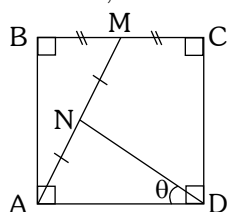
7. En un triángulo rectángulo, el coseno de uno de sus ángulos agudos es el doble del coseno del otro ángulo agudo. Determinar el coseno de su mayor ángulo agudo.

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2}{5}$

8. En un cuadrado ABCD se traza ("E" en BC), tal que: $\angle BAE = \alpha$ y $\angle EDC = \theta$. Calcular: $K = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta$

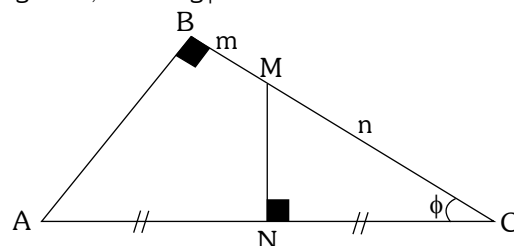
- a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

9. Si ABCD es un cuadrado, calcular " $\operatorname{tg} \theta$ "



- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

10. Del gráfico, hallar: $\operatorname{tg} \phi$



- a) $\frac{n-m}{n+m}$ b) $\frac{n+m}{n-m}$ c) $\frac{2n-m}{n+m}$
d) $\sqrt{\frac{n-m}{n+m}}$ e) $\sqrt{\frac{2n-m}{2n+m}}$

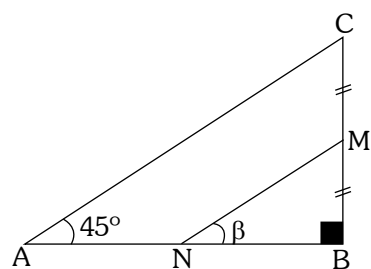
11. Calcular: $M = \frac{25 \operatorname{sen} 37^\circ + 4 \cos 60^\circ}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ - 2 \operatorname{tg}^3 45^\circ}$

- a) 17 b) 16 c) 14 d) 13 e) 12

12. Calcular: $M = \frac{\sec^4 45^\circ - 8 \operatorname{sen}^2 30^\circ}{5 \operatorname{sen} 37^\circ - \operatorname{ctg}^3 45^\circ}$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

13. Si $BN = 2AN$, calcule $\operatorname{tg} \beta$



- a) 0,25 b) 0,5 c) 0,6
d) 0,8 e) 0,75

14. Calcular: $E = 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + 3 \cos \frac{\pi}{3}$

- a) 5,5 b) 6,5 c) 6
d) 5 e) 9,5

15. Calcular: $f(2)$; si: $f(n) = \csc \frac{\pi}{3n} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} + 2 \cos \frac{\pi}{n+1}$

- a) 0 b) 1 c) 4 d) 2 e) 8

10

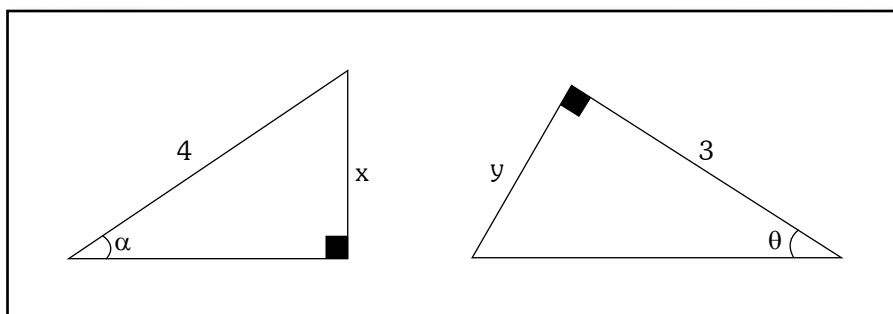
Resolución de triángulos rectángulos

En este tema debemos determinar los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo a partir de otros que si sean conocidos, establecemos esta regla general:

$$\frac{\text{Lado incógnita}}{\text{Lado dato}} = R.T (\theta)$$

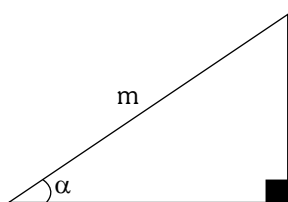
$$\Rightarrow \text{Lado Incógnita} = (\text{Lado dato}) \times R.T (\theta)$$

Ejemplo: determine: x e y

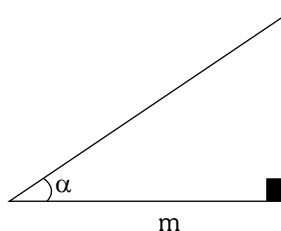


Si queremos agilizar el proceso de solución en problemas podemos utilizar los siguientes casos:

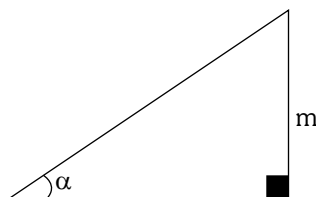
Caso I:



Caso II:

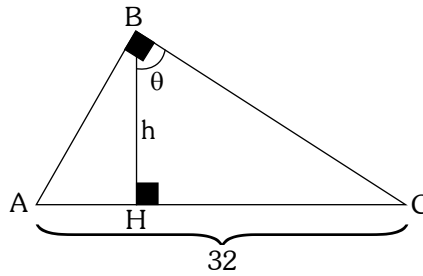


Caso III:



Ejercicios resueltos

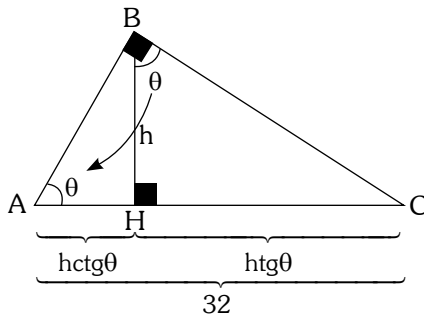
1. Calcular "h" de la figura, si: $\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta = \frac{8}{3}$



- a) 64 b) 32 c) 16 d) 12 e) 6

Resolución

Trasladando el ángulo " θ "



* $\triangle AHB \rightarrow AH = h \operatorname{ctg}\theta$

* $\triangle BHC \rightarrow HC = h \operatorname{tg}\theta$

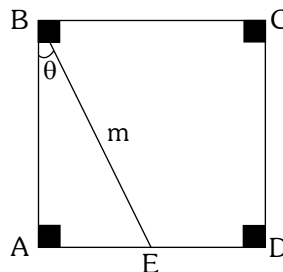
Se observa: $\overline{AH} + \overline{HC} = \overline{AC}$

Reemplazando: $h \operatorname{ctg}\theta + h \operatorname{tg}\theta = 32$

$h(\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{tg}\theta) = 32$

$h\left(\frac{8}{3}\right) = 32 \Rightarrow h = 12$

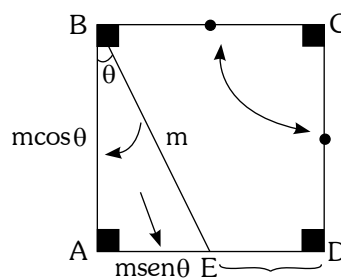
2. Del cuadrado ABCD; hallar "ED"



- a) $m(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta)$ b) $m(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{cos}\theta)$ c) $m(\operatorname{cos}\theta - \operatorname{sen}\theta)$ d) $m \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\theta$ e) $m(\operatorname{cos}\theta - \operatorname{sec}\theta)$

Resolución

Del gráfico:

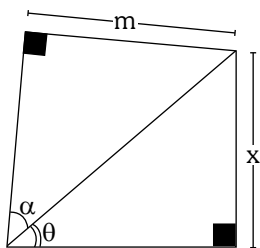


Luego: $\overline{AD} = \overline{AB}$ (lados del cuadrado); Piden ED; pero: $ED = AD - AE$

$ED = m \operatorname{cos}\theta - m \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \therefore ED = m(\operatorname{cos}\theta - \operatorname{sen}\theta)$

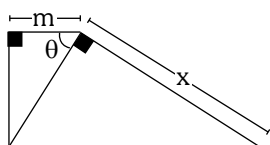
Práctica

1. Determine: "x"



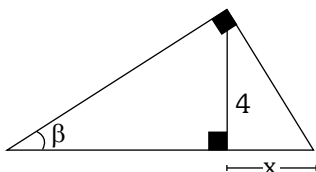
- a) $m \csc \alpha \operatorname{ctg} \theta$ b) $m \sec \alpha \cos \theta$
 c) $m \sec \alpha \operatorname{sen} \theta$ d) $m \csc \alpha \operatorname{tg} \theta$
 e) $m \csc \alpha \operatorname{sen} \theta$

2. Del gráfico, determine: "x"



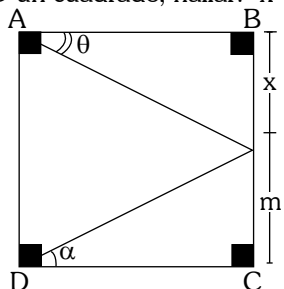
- a) $m \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ b) $m \sec \theta \operatorname{tg} \theta$
 c) $m \sec \theta \csc \theta$ d) $m \csc \theta \operatorname{ctg} \theta$
 e) $m \sec^2 \theta$

3. Hallar: "x"



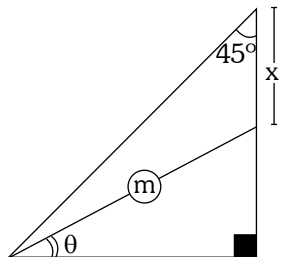
- a) $4 \operatorname{sen} \beta$ b) $4 \cos \beta$ c) $4 \operatorname{tg} \beta$
 d) $4 \operatorname{ctg} \beta$ e) $4 \sec \beta$

4. Siendo ABCD un cuadrado, hallar: "x"



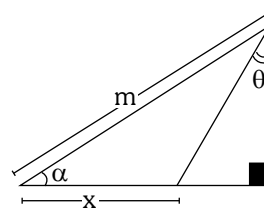
- a) $m \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta$ b) $m \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \theta$
 c) $m \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \theta$ d) $m \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \theta$
 e) $m \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta$

5. Hallar: "x"



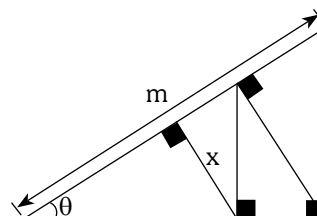
- a) $m(\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$ b) $m(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$
 c) $m(\sec \theta - \csc \theta)$ d) $m \operatorname{tg} \theta$
 e) $\sqrt{2} m \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

6. Del gráfico, hallar: "x"



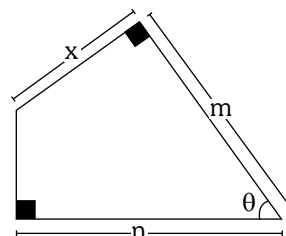
- a) $m(\cos \alpha - \operatorname{tg} \theta)$
 b) $m(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \theta)$
 c) $m(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \theta)$
 d) $m(\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \theta)$
 e) $m(\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha \operatorname{ctg} \theta)$

7. Determine "x" en el gráfico



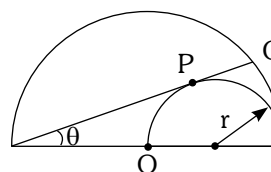
- a) $m \operatorname{sen}^3 \theta$ b) $m \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta$
 c) $m \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta$ d) $m \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$
 e) $m \sec \theta \csc \theta$

8. Del gráfico, hallar: "x"



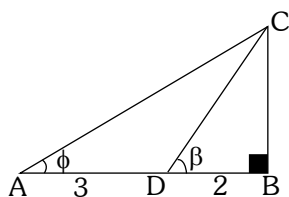
- a) $(n - m \operatorname{sen} \theta) \sec \theta$
 b) $(n - m \cos \theta) \csc \theta$
 c) $(n \operatorname{sen} \theta - m \cos \theta) \operatorname{tg} \theta$
 d) $(n \cos \theta - m \operatorname{sen} \theta) \sec \theta$
 e) $(n - m \cos \theta) \sec \theta$

9. Del gráfico mostrado determinar PQ en términos de θ y r



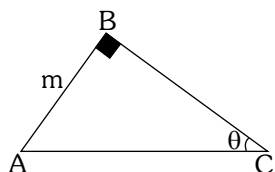
- a) $r \operatorname{sen} \theta$ b) $r \cos \theta$ c) $r \operatorname{tg} \theta$
 d) $r \operatorname{ctg} \theta$ e) $r \csc \theta$

10. Del gráfico, hallar " $\text{tg}\phi$ " en función de β



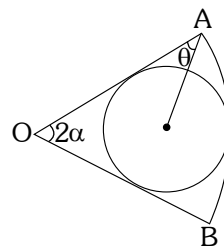
- a) $0,2\text{tg}\beta$ b) $0,3\text{tg}\beta$ c) $0,4\text{tg}\beta$
d) $0,5\text{tg}\beta$ e) $0,6\text{tg}\beta$

11. Hallar el perímetro del triángulo ABC



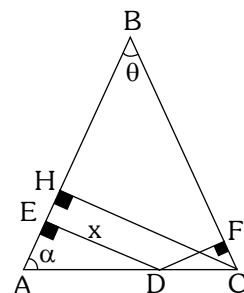
- a) $m(1 + \text{sen}\theta + \cos\theta)$ b) $m(1 + \text{tg}\theta + \sec\theta)$
c) $m(1 + \text{ctg}\theta + \csc\theta)$ d) $m(\text{sen}\theta + \cos\theta)$
e) $m(\text{tg}\theta + \text{ctg}\theta)$

12. Del gráfico calcular: $E = \frac{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\theta}{1 + \csc\alpha}$



- a) 1 b) 2 c) 3
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

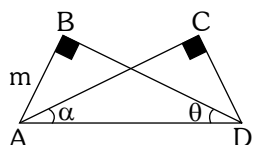
13. Triángulo ABC isósceles ($AB=BC=a$); $DC=n$
Hallar " x "



- a) $a\text{sen}\theta + n\text{sen}\alpha$ b) $a\text{sen}\theta - n\text{sen}\alpha$
c) $a\text{sen}\theta + 2n\text{sen}\alpha$ d) $2a\text{sen}\theta - n\text{sen}\alpha$
e) $2(a\text{sen}\theta - n\text{sen}\alpha)$

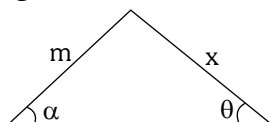
Tarea domiciliaria

1. Determine DC



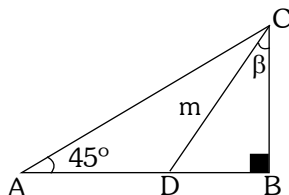
- a) $m\text{sen}\alpha \cdot \csc\theta$ b) $m\cos\alpha \cdot \sec\theta$
c) $m\text{sen}\alpha \cdot \sec\theta$ d) $m\cos\alpha \cdot \csc\theta$
e) $m\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\theta$

2. Hallar " x " en el gráfico:



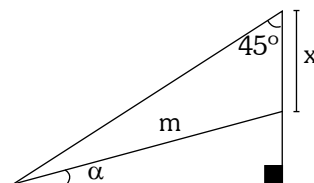
- a) $m\text{sen}\alpha \sec\theta$ b) $m\text{sen}\alpha \csc\theta$
c) $m\cos\alpha \sec\theta$ d) $m\cos\alpha \csc\theta$
e) $m\text{tg}\alpha \text{ctg}\theta$

3. Del gráfico, hallar AD en función de " m " y " β "



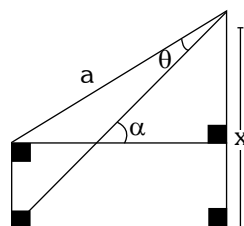
- a) $m(\text{sen}\beta - \cos\beta)$ b) $m(\text{sen}\beta + \cos\beta)$
c) $m(\cos\beta - \text{sen}\beta)$ d) $m(\sec\beta - \csc\beta)$
e) $m(\csc\beta - \sec\beta)$

4. Halle: " x "



- a) $m(\text{sen}\alpha - \cos\alpha)$ b) $m(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)$
c) $m(\text{tg}\alpha - \text{sen}\alpha)$ d) $m(\text{tg}\alpha - \cos\alpha)$
e) $m(\text{ctg}\alpha - \text{tg}\alpha)$

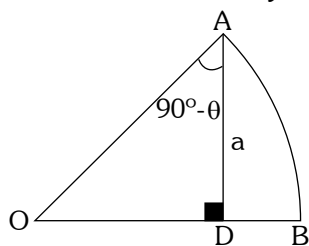
5. Hallar " x ":



- a) $a\cos(\alpha - \theta)\text{tg}\alpha$ b) $a\cos(\alpha - \theta)\text{ctg}\alpha$
c) $a\cos(\theta - \alpha)\text{tg}\theta$ d) $a\cos(\theta - \alpha)\text{ctg}\theta$

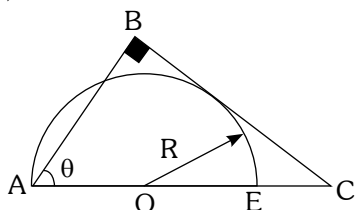
e) $\cos(\theta + \alpha) \tan \alpha$

6. Halle el arco $\widehat{AB}$ en términos de "a" y " θ ". (O: centro)



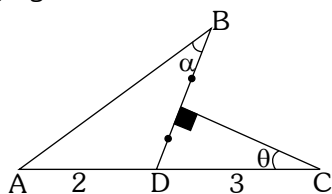
- a) $a \alpha \csc \theta$ b) $a \theta \sec \theta$ c) $\frac{a \theta \pi \csc \theta}{180}$
 d) $\frac{a \theta \pi \sec \theta}{180}$ e) $a \theta \tan \theta$

7. Del gráfico, hallar "R". Si: $EC = m$



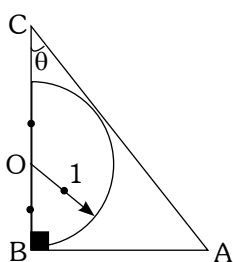
- a) $\frac{m}{\tan \theta - 1}$ b) $\frac{m}{\csc \theta - 1}$
 c) $\frac{m}{\sec \theta - 1}$ d) $m(\sec \theta - 1)$
 e) $m(\csc \theta - 1)$

8. Calcular: $\tan \theta \tan \alpha$



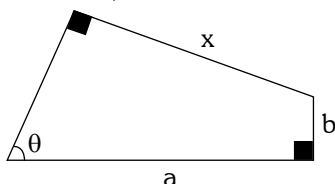
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

9. Calcular: AB



- a) $\tan \theta (\sec \theta + 1)$ b) $\tan \theta (\sec \theta + 1)$
 c) $\cot \theta (\sec \theta + 1)$ d) $\tan \theta (\csc \theta + 1)$
 e) $\cot \theta (\csc \theta - 1)$

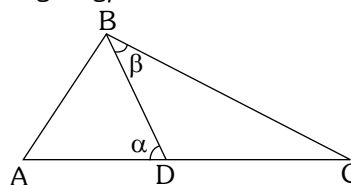
10. Del gráfico mostrado, hallar "x":



- a) $a \sec \theta + b \cos \theta$ b) $a \sec \theta - b \cos \theta$
 c) $a \cos \theta + b \sec \theta$ d) $a \cos \theta - b \sec \theta$
 e) $a \sec \theta - \csc \theta$

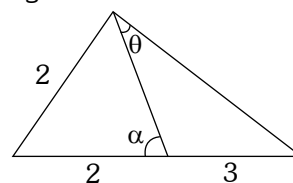
11. Si: $AD = AB = 1$ y $CD = 2$

Obtener: $K = \tan \alpha \cot \beta$



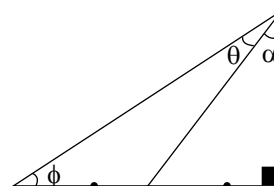
- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 2 e) 4

12. Calcular: $\tan \theta \cot \alpha$



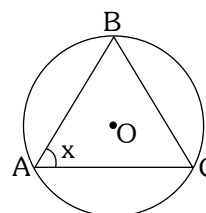
- a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{7}$

13. Dado el siguiente gráfico simplificar: $N = \frac{\sin \alpha \sin \phi}{\sin \theta}$



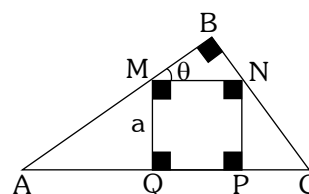
- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

14. En la siguiente figura, el triángulo ABC está inscrito en la circunferencia de radio "R" la longitud del lado BC es:



- a) $R \sin \frac{x}{2}$ b) $R \cos \frac{x}{2}$ c) $R \tan x$
 d) $2R \sin x$ e) $2R \cos x$

15. En el gráfico mostrado, MNPQ es un cuadrado de lado "a". Halle $\widehat{AC}$ en términos de " θ " y "a"



- a) $a(1 + \sin \theta + \cos \theta)$ b) $a(1 + \tan \theta + \cot \theta)$
 c) $a(1 + \sec \theta + \csc \theta)$ d) $a(\sec \theta + \tan \theta)$
 e) $a(1 + \sin \theta + \tan \theta)$

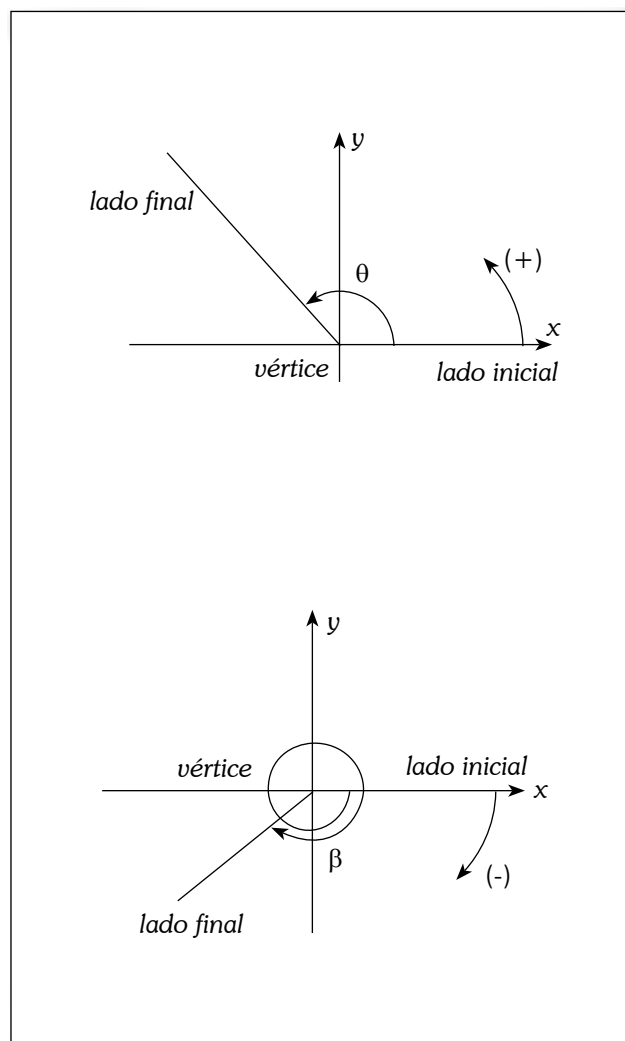
11

Razones trigonométricas de ángulos de cualquier medida

Ángulo en posición normal

Llamado también ángulo en posición canónica o standar. Es aquel ángulo trigonométrico cuyo vértice coincide con el origen del sistema cartesiano y su lado inicial coincide con el eje "x" positivo.

Cuando un ángulo está en posición normal, el lado final puede estar en uno de los cuadrantes, en cuyo caso se dice que éste pertenece a tal cuadrante.

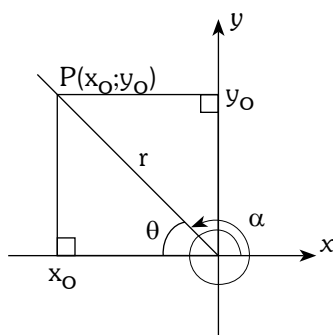


Del gráfico:

- θ : es un ángulo en posición normal
- $\theta \in \text{IIC}$; $\theta > 0$
- β : es un ángulo en posición normal
- $\beta \in \text{IIIC}$; $\beta < 0$

Definición de las razones trigonométricas

Para determinar el valor de las RT de un ángulo en posición normal tomaremos un punto $P(x_0; y_0)$ perteneciente a su lado final.



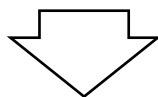
Se define:

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y_0}{r}$	$\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$
$\cos \alpha = \frac{x_0}{r}$	$\sec \alpha = \frac{r}{x_0}$
$\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$	$\csc \alpha = \frac{r}{y_0}$

- $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$
- θ : se denomina ángulo de referencia.

Signo de las RT en los cuadrantes

Dependiendo del cuadrante al que permanezca un ángulo en posición normal, sus RT pueden ser positivas o negativas. Es así como se obtiene el cuadro adjunto.



(+) { seno y cosecante	(+) { todas son positivas
(-) { tangente y cotangente	(-) { coseno y secante

Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

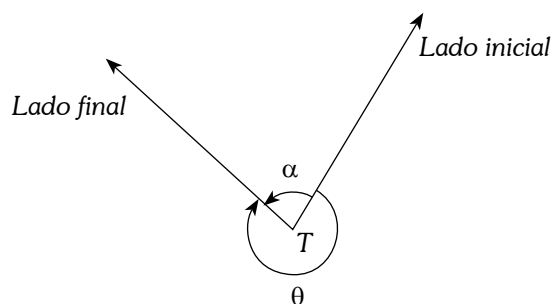
θ (radianes)	θ (grados)	Sen θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
$0 \wedge 2\pi$	0	0	1	0	N.D.	1	N.D.
$\pi/2$	90°	1	0	N.D.	0	N.D.	1
π	180°	0	-1	0	N.D.	-1	N.D.
$3\pi/2$	270°	-1	0	N.D.	0	N.D.	-1

Nota: N.D.: No definido

Ángulos coterminales

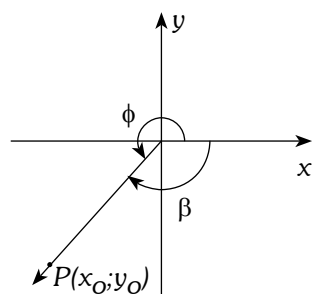
Son aquellos ángulos trigonométricos que poseen el mismo vértice, el mismo lado inicial y final. Así tenemos que:

I.



T: vértice

II.



Se tiene que:

- α y θ : son coterminales
- β y ϕ : son coterminales (están en posición normal)

Propiedades

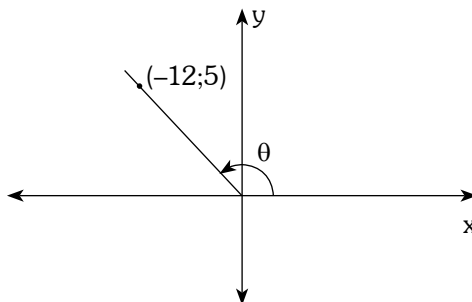
Si α y θ son coterminales se cumple que:

I. $\alpha - \theta = 360^\circ n$; $n \in \mathbb{Z}$

II. $R.T.(\alpha) = R.T.(\theta)$

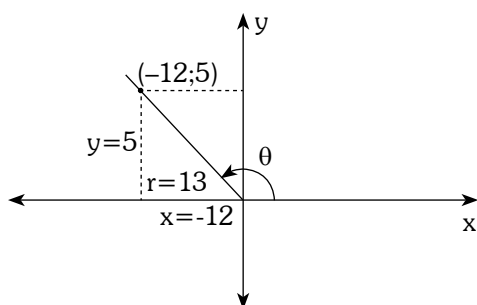
Ejercicios resueltos

1. Del gráfico mostrado, calcular: $E = \sec \theta + \tan \theta$



- a) $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{3}$

Resolución



Reemplazando:

$$E = \frac{13}{-12} + \frac{5}{-12} = \frac{18}{-12}$$

$$\therefore E = -\frac{3}{2}$$

2. Calcular el valor de: $E = (\cos 270^\circ)^{\sec 90^\circ} - \frac{\tan 360^\circ}{\cos 0^\circ} + (\sec 180^\circ)^{\cot 90^\circ}$

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) -2

Resolución

Aplicando las razones trigonométricas de ángulos cuadrantales:

$$E = (0)^{(1)} - \frac{(0)}{(1)} + (-1)^0$$

$$\rightarrow E = 1$$

3. Hallar el mayor de los dos ángulos coterminales, si la suma de ambos es 2480° y el menor de ellos está comprendido entre 304° y 430°

- a) 3160° b) 2140° c) 2350° d) 2150° e) 3240°

Resolución

Como son ángulos coterminales, entonces:

$$\alpha - \beta = 360^\circ n$$

Por condición:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 2480^\circ \dots (1) \\ \alpha - \beta = 360^\circ n \dots (2) \end{array} \right\} \text{restando: } 2\beta = 2480^\circ - 360^\circ n$$

$$\rightarrow \beta = 1240^\circ - 180^\circ n$$

Entonces:

$$304^\circ < 1240^\circ - 180^\circ n < 430^\circ \rightarrow \frac{-810^\circ}{-180^\circ} < n < \frac{-936^\circ}{-180^\circ}$$

$$4,5 < n < 5,2 \quad n=5$$

Reemplazando en (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 2480^\circ \\ \alpha - \beta = 1800^\circ \end{array} \right\} \text{sumando: } \alpha = 2140^\circ$$

Práctica

1. El lado final de un ángulo canónico " θ " pasa por el punto $(-3; 5)$

Calcular: $J = 5 \cot \theta + \sqrt{34} \cos \theta$

- a) 0 b) 6 c) 4
d) -4 e) -6

2. Si el punto $(m+1; m)$ pertenecen al lado final de un ángulo canónico " θ ", tal que: $\sin \theta = -0,8$; $\theta \notin \text{IVC}$

Calcular: $m^{-1} \cdot \tan \theta$

- a) 3 b) -3 c) -1/3
d) 1/3 e) -1/4

3. Si: $(\tan \theta)^{(\tan \theta)^2} = 2$, además $\theta \in \text{III C}$

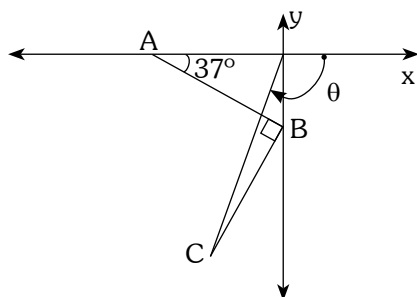
Calcular: $E = \sqrt{6} \cdot \sin \theta + \sqrt{2} \cot \theta$

- a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) -2

4. Si: $|\sin \theta| = -\sin \theta \wedge |\cos \theta| = \cos \theta$, entonces:

- a) $\theta \in \text{IC}$ b) $\theta \in \text{IIC}$ c) $\theta \in \text{IIIC}$
d) $\theta \in \text{IVC}$ e) No se puede precisar

5. Si: $\overline{BC} = 2 \overline{AB}$. Calcular: $\tan \theta$



- a) 7/6 b) 4/3 c) 3/2
d) 11/6 e) 4/9

6. Si: $\sin \theta < \cos \frac{\pi}{2} \wedge \tan \theta > \sin \pi$

Halle el signo de:

$E = \left(\frac{\cot \theta - \cos \theta}{\sin \theta - \tan \theta} \right) + \left(\frac{\cot \theta}{\csc \theta} \right)$

- a) (+) b) (-) c) (+) ó (-)
d) FD. e) (+) y (-)

7. Si: $\tan \theta \cdot \sqrt{-\cos \theta} < 0$, ¿en qué cuadrante está " θ "?

- a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) En ningún cuadrante

8. Si: $(27)^{\cot \alpha} = 9$; $\alpha \in \text{IIIC}$

Calcular: $A = \sqrt{13} \sin \alpha + 6 \tan \alpha$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

9. Siendo: $f(x) = a^2 \sin x + b^2 \cos 2x$

Calcular: $E = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{f(\pi)}$

- a) $\frac{a^2}{b^2}$ b) $a - b$ c) $a + b$
d) $-\frac{2b^2}{a^2}$ e) -2

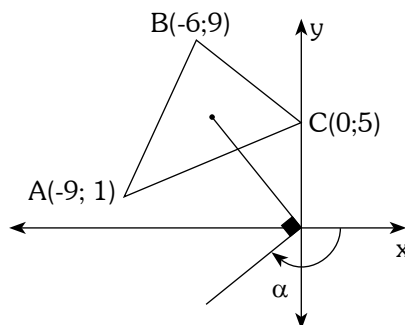
10. Calcular el mayor de dos arcos coterminales, sabiendo que el mayor de ellos es seis veces el menor y el menor de ellos está comprendido entre 200° y 300° .

- a) 1248° b) 1340° c) 1296°
d) 1200° e) 1250°

11. Siendo "G" baricentro del triángulo ABC.

Calcular:

$R = \frac{\tan \alpha + \cot \alpha}{\sec \alpha + \csc \alpha}$



- a) $-\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $-2\sqrt{2}$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$

12. Si: $2^{2 \tan \theta + 2} - 6^{\tan \theta} = 2(3^{2 \tan \theta + 2})$, además: $\sec \theta < 0$. Calcular: $E = \sec \theta - \csc \theta$

- a) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ b) $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ c) $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

Tarea domiciliaria

1. Si:

$$\csc \theta = -\frac{3}{2} \wedge \theta \in \text{IVC}$$

$$\text{Calcular: } E = 3\sqrt{5} \cos \theta + \sqrt{5} \sec \theta$$

- a) 1 b) 4 c) 8
d) -8 e) 0

2. Si se cumple: $3 \tan x + 4 = 0$; $x \in \text{IVC}$

$$\text{Calcular: } A = \csc x - \cot x$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{4}$

3. Si " θ " es un ángulo de posición standar del II cuadrante, donde: $\tan \theta = -1,5$

$$\text{Calcular: } A = 3 + \sqrt{13} (\sin \theta + \cos \theta)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

4. Dar el signo de:

$$K = \frac{\sin 300^\circ \cos 200^\circ}{\cot 121^\circ - 2}; J = \frac{\csc 140^\circ + \sec 340^\circ}{\cot 92^\circ}$$

$$C = \frac{\tan 225^\circ + \sec 330^\circ}{\sin 210^\circ}$$

- a) +; -; - b) +; +; - c) -; -; -
d) -; -; + e) -; +; -

5. Si:

$$(\tan \theta)^{(\tan \theta)^{\cdot \cdot \cdot (\tan \theta)^2}} = 2; \theta \in \text{IIIC}$$

$$\text{Calcular: } \sin \theta$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$
d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

6. Hallar el valor de la expresión:

$$L = \frac{5\sqrt{2}}{\sec \theta} - \frac{1}{\tan \theta}$$

Sabiendo que " θ " es un ángulo del segundo cuadrante y que: $\sqrt{2} - 10 \sin \theta = 0$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) -2 e) 3

7. Si: $8^{\tan \theta} = [\sec 45^\circ]^2 \tan \theta - 3$ y $\theta \in \text{IVC}$

$$\text{Calcular: } E = \sec \theta - \tan \theta$$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2
d) 3 e) 4

8. ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo en posición normal " θ "; que cumple: $\sec \theta < 0 \wedge \tan \theta > 0$?

- a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) No se puede precisar

9. Señale el signo de:

$$J = \frac{\sin 170^\circ \cos 240^\circ + \tan 210^\circ \cos 100^\circ}{\sec 200^\circ}$$

- a) (+) b) (-) c) (+) ó (-)
d) (+) y (-) e) No se puede precisar

10. Si: $\sin \alpha < 0 \wedge \cot \alpha > 0$. Indicar el cuadrante del " α "

- a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) F.D.

11. Si: $|\sin \beta| = -\sin \beta$; $|\cos \beta| = \cos \beta$

$$\text{Señale el signo de: } L = \tan \beta + \cot \beta$$

- a) (+) b) (-) c) (+) y (-)
d) (+) ó (-) e) No se puede precisar

12. Calcular:

$$J = \frac{a^2 \sin 90^\circ - b^2 \cos 180^\circ - 2ab \sin 270^\circ}{a \sin^4 270^\circ - b \cos^3 180^\circ}$$

- a) a b) b c) a + b
d) a - b e) ab

13. Al reducir:

$$\frac{a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + b^2 \cos \pi}{a \cdot \sin \frac{3\pi}{2} + b \cos 2\pi}; \text{ se obtiene:}$$

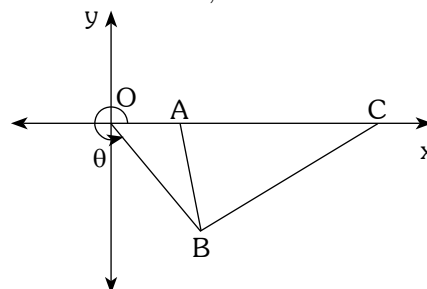
- a) a + b b) a - b c) b - a
d) $a^2 - b^2$ e) $-(a + b)$

14. Siendo: $F(x) = \frac{\sin x + \cos 2x - \tan \frac{x}{2}}{\cos x + \sin 3x}$

$$\text{Evaluar para: } x = \frac{\pi}{2}$$

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

15. En el gráfico mostrado ABC es un triángulo equilátero de lado 2. Calcular: $\tan \theta$, si: $OA = 3$



- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

12

Reducción al primer cuadrante

Casos

1. **Ángulos negativos:** Se aplica el siguiente criterio:

$\text{Sen } (-x) = -\text{Sen } x$	$\text{Csc } (-) = -\text{Csc } x$
$\text{Cos } (-x) = \text{cos } x$	$\text{Sec } (-x) = \text{Sec } x$
$\text{Tan } (-x) = -\text{Tan } x$	$\text{Cot } (-x) = -\text{Cot } x$

2. **Ángulos mayores que 360° :** Aquí se divide el ángulo en consideración entre 360° , descartando el cociente pero tomando el residuo en lugar del ángulo original.

Ejemplo: $\text{Sen } 1140^\circ = \text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{array}{r} 1140^\circ \quad | \quad 360^\circ \\ 1080^\circ \quad | \quad 3 \\ \hline 60^\circ \end{array}$$

3. **Ángulos menores que 360° :** Aquí se descompone el ángulo original como la suma o resta de un ángulo cuadrantal con un ángulo agudo; para luego aplicar el siguiente criterio.

$$\text{R.T. } (x) = \begin{cases} \text{R.T. } \left(\begin{smallmatrix} 90^\circ \\ 270^\circ \end{smallmatrix} \pm x \right) = \pm \text{Co} - \text{R.T. } (x) \\ \text{R.T. } \left(\begin{smallmatrix} 180^\circ \\ 360^\circ \end{smallmatrix} \pm x \right) = \pm \text{R.T. } (x) \end{cases}$$

El signo ($\pm$) dependerá del cuadrante en el que se ubique el ángulo original y de la RT original.

Ejercicios resueltos

1. Calcular: $C = \frac{\text{sen } 240^\circ}{\text{cos } 120^\circ}$

a) 1 b) -1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolución

En la expresión, por partes:

$$\text{Sen } 240^\circ = \text{Sen } \underbrace{(180^\circ + 60^\circ)}_{\text{III}} = -\text{Sen } 60^\circ \Rightarrow \text{Sen } 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 120^\circ = \text{Cos } \underbrace{(180^\circ - 60^\circ)}_{\text{II}} = -\text{Cos } 60^\circ \Rightarrow \text{Cos } 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Reemplazando:

$$C = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \rightarrow \therefore C = \sqrt{3}$$



2. Calcular: $\tan 2580^\circ$

Resolución

Dividimos el ángulo entre 360° :

Reemplazando:

$$\begin{array}{r} \tan 2580^\circ = \tan 60^\circ \\ 2580^\circ \quad | \quad 360^\circ \\ \underline{2520^\circ} \quad 7 \\ 60^\circ \end{array}$$

$$\therefore \tan 2580^\circ = \sqrt{3}$$

3. ¿A qué es igual: $\sin (36\pi + x)$

Resolución

$$\sin (36\pi + x) = \sin (0 + x)$$



$$\therefore \sin (36\pi + x) = \sin x$$

Práctica

1. Calcular: $E = 2 \cos 120^\circ + 4 \tan 217^\circ$

- a) 2 b) 3 c) 0
d) 1 e) -2

2. Simplificar:

$$E = \frac{\sin (90^\circ + x)}{\cos (-x)} + \frac{\tan (180^\circ + x)}{\tan (-x)} - \frac{\sec (270^\circ - x)}{\csc (-x)}$$

- a) 1 b) 2 c) -1
d) 4 e) 9

3. Simplificar:

$$E = \frac{\tan (-x) \cot (2\pi - x) \sin (\frac{3\pi}{2} + x)}{\cos (\pi + x) \sec (2\pi - x)}$$

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) -1
d) $-\sin x$ e) $-\cos x$

4. Reducir:

$$E = \sin 200^\circ \csc (-20^\circ) + \cos (-10^\circ) \sec 170^\circ$$

- a) 1 b) -1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) 0 e) 2

5. Calcular: $E = \tan 750^\circ - \sin 1860^\circ$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{-\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

6. Calcular: $\tan 123 \frac{\pi}{4}$

- a) 1 b) -1 c) $\sqrt{2}$
d) $-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

7. Si: $x - y = \pi$; Reducir: $E = \sin x \cdot \csc y + \frac{\tan x}{\tan y}$

- a) 0 b) 2 c) -2
d) 1 e) -1

8. Si: $x + y = \frac{3\pi}{2}$; Simplificar: $E = \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sec x}{\csc y} - \frac{\tan x}{\cot x}$

- a) -2 b) -3 c) -1
d) 2 e) 3

9. En un triángulo ABC, simplificar:

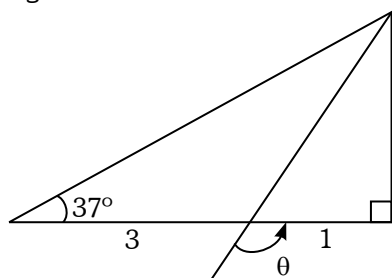
$$E = \frac{\tan (2A + 2B + C)}{\tan (A + B)} + \cos (B + C) \cdot \sec A$$

- a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) -2

10. Calcular: $E = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8}$

- a) 0 b) 1 c) -1
d) $2 \cos \frac{\pi}{8}$ e) $-2 \cos \frac{\pi}{8}$

11. Calcular "Tg θ "



- a) 3 b) -3 c) 183
d) -1/3 e) 4/3

12. Si: $\tan(135^\circ - x) = m$. Calcular: $\cot(45^\circ - x)$

- a) -1 b) 1 c) m
d) 2m e) -m

13. Si: $x + y = \frac{\pi}{2}$. Calcular: $\frac{\sin 2x}{\sin 2y} + \frac{\cos 2y}{\cos 2x}$

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

14. Si: $x - y = \frac{3\pi}{2}$. Simplificar: $\frac{\tan x}{\cot y} + \frac{\sin x}{\cos y}$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) -2 e) $2 \tan x$

15. En un triángulo ABC, simplificar:

- $\frac{\sin(A+B)}{\sin C} + \frac{\tan(B+C)}{\tan A}$
a) 0 b) 2 c) -2
d) $2 \tan A$ e) $2 \tan B$

Tarea domiciliaria

1. Calcular el valor de:

- $\sin 150^\circ - \cos 120^\circ + \tan 135^\circ$
a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

2. Reducir: $E = \frac{\tan x}{\cot(-x)} + \frac{\sec x}{\cos(-x)}$

- a) 1 b) -1 c) $2 \tan^2 x$
d) $2 \sec^2 x$ e) 2

3. Simplificar:

- $E = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc(\frac{\pi}{2} + x)}$
a) -1 b) 1 c) $\sin x$
d) $-\sin x$ e) $-\tan x$

4. Simplificar: $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x)}{\sec(\frac{\pi}{2} + x)} - \frac{\cos(2\pi - x)}{\sec(\pi + x)}$

- a) 1 b) $2 \sin^2 x$ c) $2 \cos^2 x$
d) $-\sin^2 x$ e) $-\cos^2 x$

5. Reducir: $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x) \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{\cot(2\pi - x) \sin(2\pi + x)}$

- a) 1 b) 2 c) -1
d) -2 e) 3

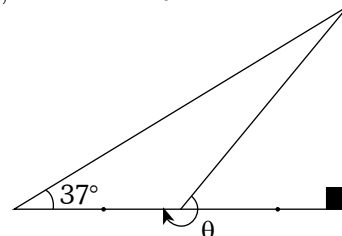
6. Reducir: $K = \frac{\cos(330^\circ) \cdot \cot(300^\circ) \cdot \csc(135^\circ)}{\sec(315^\circ) \cdot \sin(300^\circ) \cdot \tan(330^\circ)}$

- a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) 1 e) $\sqrt{2}$

7. Simplificar: $16 \tan^2 397^\circ - 9 \sec^4 210^\circ - (2 \cot 315^\circ)^3$

- a) 0 b) 1 c) -10
d) -13 e) -24

8. Del gráfico, calcular: $\tan \theta$



- a) 4/3 b) 3/4 c) -3/2
d) 2/3 e) 2/7

9. Simplificar: $\frac{3 \sin 20^\circ - 2 \cos 110^\circ}{\cos 70^\circ}$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10. Calcular: $\sqrt{3} \sec 180330^\circ$

- a) 1 b) -2 c) $-\sqrt{2}$
d) -1 e) 2

11. Calcular: $E = 2 \sin 1470^\circ + \tan 1125^\circ$

- a) 2 b) 0 c) -2
d) 1 e) -1

12. Calcular: $\tan^2 1140^\circ + \cot 765^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

13. Calcular: $(\cos 810^\circ + \cot 405^\circ) \sin 450^\circ$

- a) 1 b) -1 c) 0
d) 2 e) -2

14. Calcular: $E = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

- a) 0 b) -1 c) 1
d) 2 e) -2

15. Calcular:

$$\tan 10^\circ + \tan 40^\circ + \tan 70^\circ + \tan 110^\circ + \tan 140^\circ + \tan 170^\circ$$

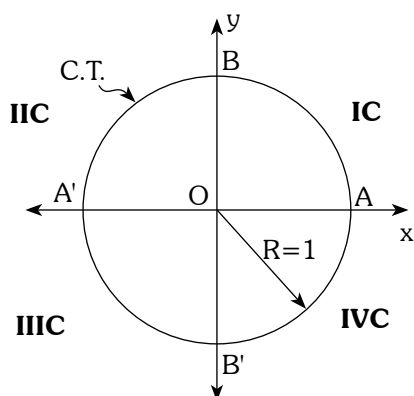
- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

13

Circunferencia trigonométrica I

Circunferencia trigonométrica

Es aquella circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas de un sistema bidimensional y considera como radio la unidad de dicho sistema.



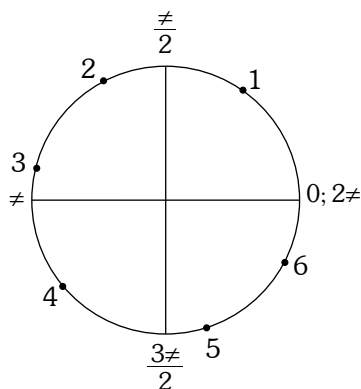
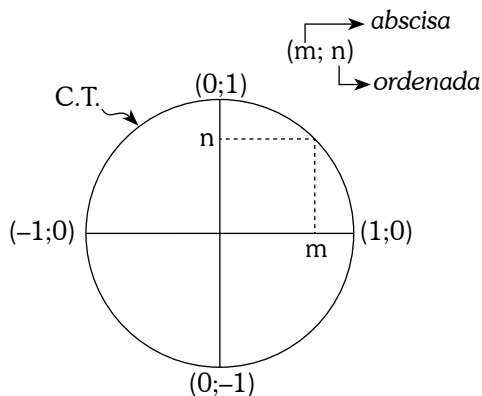
A: origen de arcos

B: origen de complementos

A': origen de suplementos

B': sin especificación particular

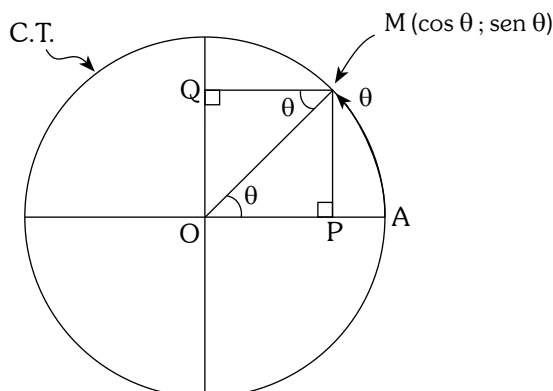
• **Importante:**



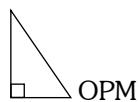
- $\frac{\pi}{6} \approx 3,14$
- $\frac{3\pi}{4} \approx 4,71$
- $\frac{\pi}{3} \approx 1,57$
- $2\pi \approx 6,28$

Representación de la razón trigonométrica seno y coseno

La razón trigonométrica seno de un arco en posición normal está representada por la ordenada del extremo final de dicho arco y la del coseno por la abscisa del mismo extremo.

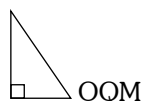


Demostración



$$\text{sen } \theta = \frac{MP}{OM}$$

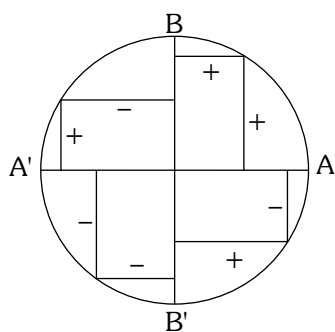
como: $OM = 1 \Rightarrow \boxed{\text{sen } \theta = MP}$



$$\text{cos } \theta = \frac{MQ}{OM}$$

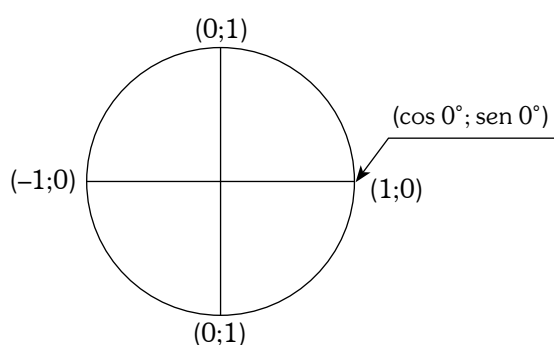
como: $OM = 1 \Rightarrow \boxed{\text{cos } \theta = MQ}$

Signos



	IC	IIC	IIIC	IVC
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+

Variación analítica

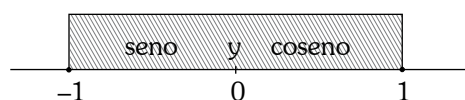


	IC	IIC	IIIC	IVC
Seno	↗	↘	↘	↗
	0 → 1	1 → 0	0 → -1	-1 → 0
Coseno	↘	↘	↗	↗
	1 → 0	0 → -1	-1 → 0	0 → 1

Extensión

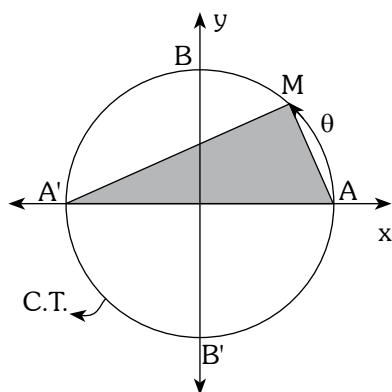
$-1 \leq \text{sen } \theta \leq 1$
$-1 \leq \text{cos } \theta \leq 1$

$$\Rightarrow \text{Rango} = [-1; 1]$$



Ejercicios resueltos

1. En la CT mostrada, hallar el área de la región sombreada en función de " θ ".



- a) $\sin \theta$ b) $\cos \theta$ c) $\frac{1}{2} \sin \theta$ d) $\frac{1}{2} \cos \theta$ e) $2 \sin \theta$

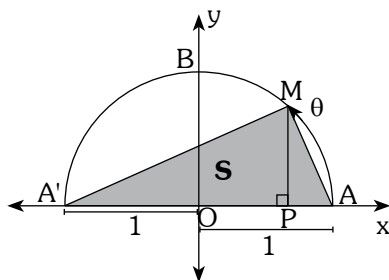
Resolución

En estos tipos de problemas se usarán líneas trigonométricas para determinar lo pedido; por ello es necesario aplicarle valor absoluto a la LT usada, para garantizar el signo positivo del segmento utilizado.

En el gráfico:

I. $A'A = 2$

II. $S = \frac{A'A \cdot MP}{2}$



$MP = \underbrace{|\sin \theta|}_{+} \Rightarrow MP = \sin \theta$ Reemplazando: $S = \frac{2 \sin \theta}{2} \rightarrow \therefore S = \sin \theta$

2. Poner V ó F, en:

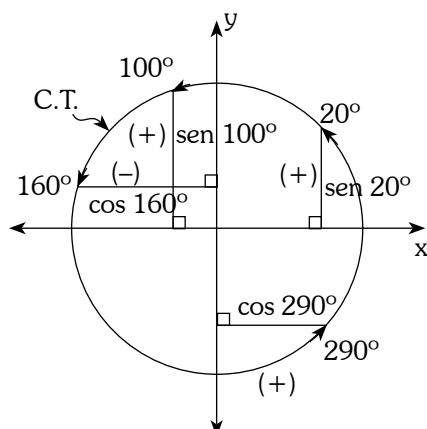
I. $\sin 20^\circ < \sin 100^\circ$

II. $\cos 160^\circ > \cos 290^\circ$

- a) VF b) FV c) VV d) Faltan datos e) FF

Resolución

Graficando en la C.T.



Del gráfico:

I. $\text{sen } 20^\circ < \text{sen } 100^\circ \dots (V)$

II. $\text{cos } 160^\circ < \text{cos } 290^\circ \dots (F)$

3. Con la ayuda de una circunferencia trigonométrica, señale la expresión de mayor valor:

a) $\text{sen } 50^\circ$

b) $\text{sen } 70^\circ$

c) $\text{sen } 100^\circ$

d) $\text{sen } 210^\circ$

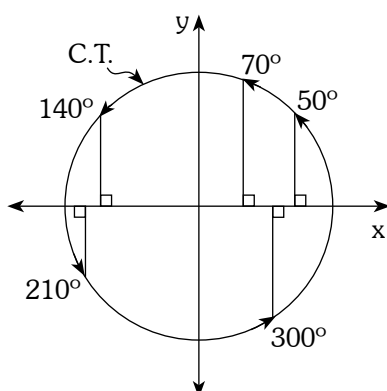
e) $\text{sen } 300^\circ$

Resolución

Graficamos una C.T. y ubicamos en ella los arcos mencionados; luego trazamos una línea trigonométrica seno correspondiente a cada uno de ellos y notamos que:

$\text{sen } 210^\circ$ y $\text{sen } 300^\circ$: (-)

$\text{sen } 50^\circ$, $\text{sen } 70^\circ$ y $\text{sen } 140^\circ$: (+)



Como piden el mayor, sólo comparamos entre los positivos (el porqué? es obvio), y notamos que el mayor es: $\text{sen } 70^\circ$

Práctica

1. En qué cuadrante(s) el seno decrece y es negativo:

- a) I b) III c) IV
d) III y IV e) II y III

2. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

$$\text{sen } 250^\circ \quad \square \quad \text{cos } 250^\circ$$

- a) $>$ b) $<$ c) $=$
d) $\geq$ e) $\leq$

3. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

$$\text{sen } 200^\circ \quad \square \quad \text{sen } 300^\circ$$

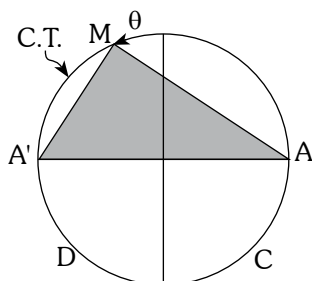
- a) $>$ b) $<$ c) $=$
d) $\geq$ e) $\leq$

4. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

$$|\text{sen } 300^\circ| \quad \square \quad \text{cos } 30^\circ$$

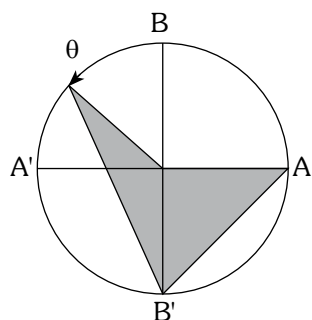
- a) $>$ b) $<$ c) $=$
d) $\geq$ e) $\leq$

5. Calcular el área del triángulo AMA' en la C.T. mostrada



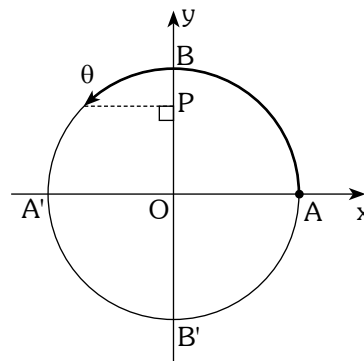
- a) $\text{sen } \theta$ b) $\cos \theta$ c) $2 \text{ sen } \theta$
d) $2 \cos \theta$ e) $0,5 \text{ sen } \theta$

6. Calcular el área sombreada en la C.T.:



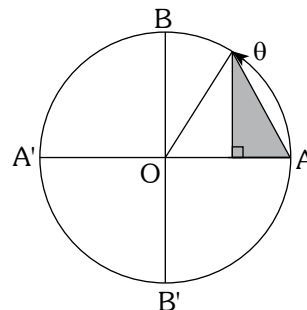
- a) $0,5(1 + \text{sen } \theta)$ b) $0,5(1 + \cos \theta)$
c) $0,5(1 - \text{sen } \theta)$ d) $0,5(1 - \cos \theta)$
e) $0,5$

7. En el gráfico, determine BP



- a) 0,5 b) $\text{sen } \theta$ c) $-\cos \theta$
d) $1 - \text{sen } \theta$ e) $1 + \text{sen } \theta$

8. Determinar el área sombreada en la C.T. mostrada:



- a) $\frac{(1 - \text{sen } \theta) \cdot \cos \theta}{2}$ b) $\frac{(1 - \cos \theta) \cdot \text{sen } \theta}{2}$
c) $\frac{(1 + \text{sen } \theta) \cdot \cos \theta}{2}$ d) $\frac{(1 + \cos \theta) \cdot \text{sen } \theta}{2}$
e) $\frac{(1 - \text{sen } \theta) \cdot (1 - \cos \theta)}{2}$

9. Indicar lo correcto, si: $180^\circ < x_1 < x_2 < 270^\circ$

- I. $\text{sen } x_1 > \text{sen } x_2$
II. $\cos x_1 < \cos x_2$
III. $|\text{sen } x_1| > |\text{sen } x_2|$
a) I y II b) II y III c) I y III
d) solo I e) solo II

10. Indicar con "V" lo verdadero y "F" lo falso:

- I. $\text{sen } 1 < \text{sen } 3$
II. $\cos 5 > \cos 6$
III. $\text{sen } 1 = \cos 1$
a) VFV b) FFV c) VFF
d) FFF e) FVV

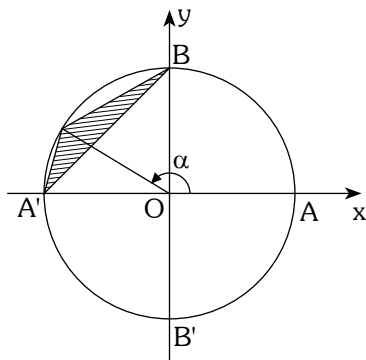
11. En qué cuadrante(s) el seno y coseno crecen.

- a) I b) II c) III
d) IV e) No se puede precisar

12. Señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- I. $\sin 70^\circ > \sin 140^\circ$
 II. $\sin 260^\circ > \sin 200^\circ$
 a) VV b) VF c) FV
 d) FF e) No se puede precisar

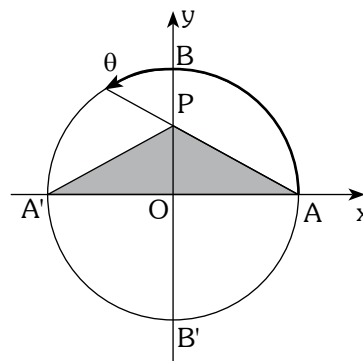
13. Determine en la C.T. mostrada el área sombreada.



- a) $\frac{1}{2} (1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$
 b) $\frac{1}{2} (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)$
 c) $\frac{1}{2} (1 - \sin \alpha - \cos \alpha)$
 d) $\frac{1}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha - 1)$

e) $\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha$

14. En la C.T. mostrada, determine el área sombreada:



- a) $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$ b) $-\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$
 c) $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ d) $\frac{-\cos \theta}{1 - \cos \theta}$
 e) $\frac{-\cos \theta}{1 - \sin \theta}$

15. Indicar el mayor valor:

- a) $\sin 1$ b) $\sin 2$ c) $\sin 3$
 d) $\sin 4$ e) $\sin 5$

Tarea domiciliaria

1. Indique el signo de: $A = \sin 100^\circ$; $B = \cos 200^\circ$

- a) + ; + b) + ; - c) - ; +
 d) - ; - e) N.A.

2. Determine la distancia del origen de complemento al origen de suplementos.

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2
 d) $\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2}$

3. En la C.T., calcular la distancia del origen de arcos al origen de complementos.

- a) 1u b) $\sqrt{2}$ c) 2
 d) $2\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{2}$

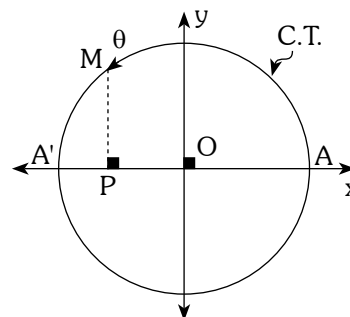
4. Indicar el menor valor, (graficar)

- a) $\cos 20^\circ$ b) $\cos 110^\circ$ c) $\cos 200^\circ$
 d) $\cos 280^\circ$ e) $\cos 360^\circ$

5. Señale verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

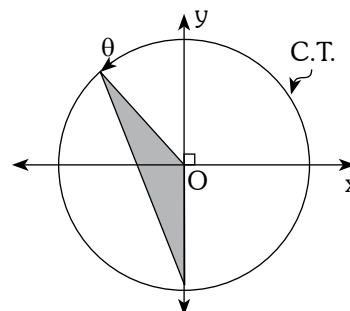
- I. $\sin 70^\circ > \sin 20^\circ$
 II. $\sin 216^\circ > \sin 254^\circ$
 III. $|\sin 300^\circ| > |\sin 320^\circ|$
 a) VVV b) VVF c) FVF
 d) FFV e) FFF

6. En la C.T. mostrada, hallar la longitud de $\overline{PA}$.



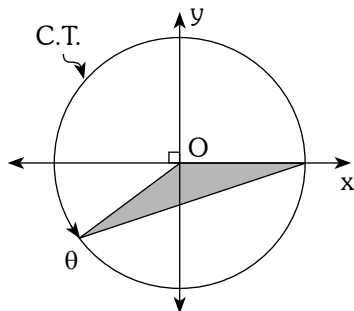
- a) $1 - \cos \theta$ b) $1 + \cos \theta$ c) $1 + \sin \theta$
 d) $1 - \sin \theta$ e) $-2 \cos \theta$

7. En la C.T., mostrada, hallar el área de la región sombreada.



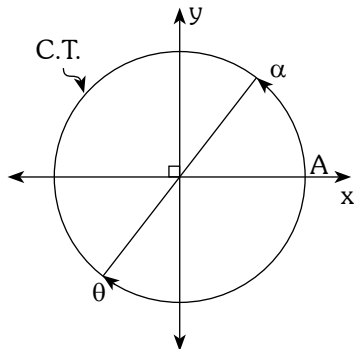
- a) $\sin \theta$ b) $\frac{1}{2} \sin \theta$ c) $\cos \theta$
 d) $-\frac{1}{2} \cos \theta$ e) $\frac{1}{2}$

8. Determine el área de la región sombreada.



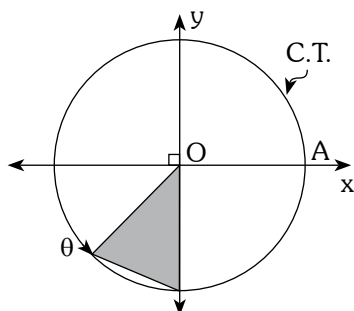
- a) $\sin \theta$ b) $-\sin \theta$ c) $-\frac{1}{2} \sin \theta$
 d) $-\frac{1}{2} \cos \theta$ e) $-2 \sin \theta$

9. Del gráfico mostrado, calcular: $\sin \alpha + \sin \theta$



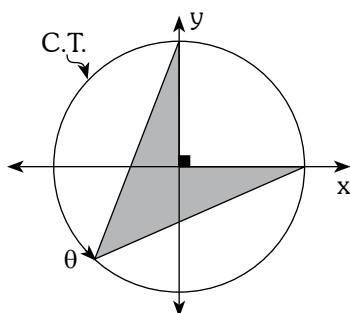
- a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) -2

10. Calcular el área de la región sombreada.



- a) $\cos \theta$ b) $-\cos \theta$ c) $\frac{1}{2} \cos \theta$
 d) $-\frac{1}{2} \cos \theta$ e) $-2 \cos \theta$

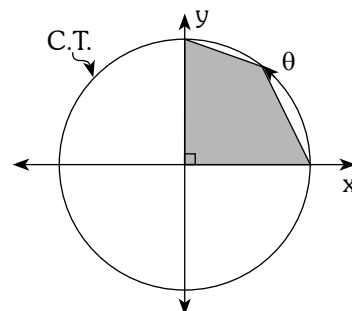
11. Del gráfico mostrado, calcular el área del cuadrilátero sombreado.



- a) $0,5(\sin \theta + \cos \theta)$ b) $0,5(\sin \theta - \cos \theta)$

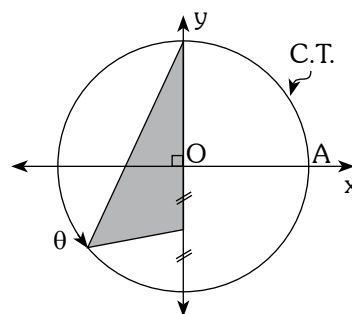
- c) $0,5(\cos \theta - \sin \theta)$ d) $-0,5(\sin \theta + \cos \theta)$
 e) $\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$

12. Del gráfico mostrado, calcular el área del cuadrilátero sombreado.



- a) $0,5(\sin \theta + \cos \theta)$ b) $0,5(\sin \theta - \cos \theta)$
 c) $0,5(\cos \theta - \sin \theta)$ d) $0,5 \sin \theta$
 e) $0,5 \cos \theta$

13. En la C.T. mostrada, halle el área de la región sombreada.



- a) $\frac{3}{4} \sin \theta$ b) $\frac{3}{4} \cos \theta$ c) $-\frac{3}{4} \sin \theta$
 d) $-\frac{3}{4} \cos \theta$ e) $-\frac{1}{2} \sin \theta$

14. Indicar verdadero "V" o falso "F": Si: $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$

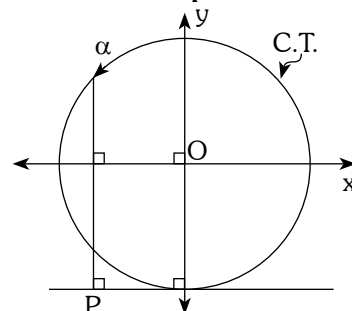
I. $\sin x_1 < \sin x_2$

II. $\cos x_1 < \cos x_2$

III. $|\sin x_1| < |\sin x_2|$

- a) VVV b) VVF c) FVV
 d) FVF e) VFV

15. Hallar las coordenadas del punto "P".



- a) $(-1; \sin \alpha)$ b) $(\sin \alpha; -1)$
 c) $(\sin \alpha; 1)$ d) $(\cos \alpha; -1)$
 e) $(\cos \alpha; 1)$

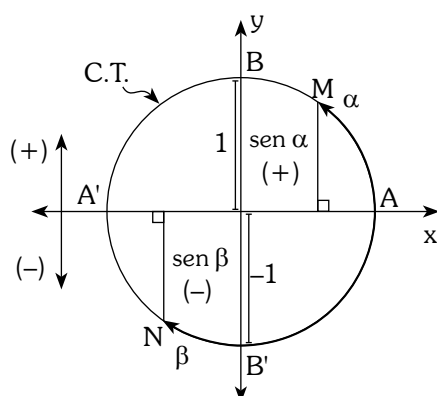
14

Circunferencia trigonométrica II

Variación analítica

I. Línea seno

Representación:



Variación:

Esto es:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

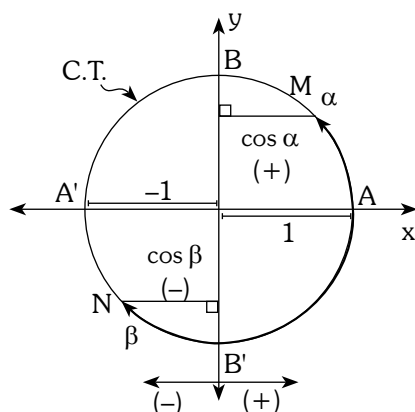
$$\operatorname{sen} \alpha \begin{cases} \max.: 1 \\ \min.: -1 \end{cases}$$

Análisis en cada cuadrante

$\alpha \in$	IC	IIC	IIIC	IVC
sen	$<0; 1>$	$<0; 1>$	$<-1; 0>$	$<-1; 0>$

II. Línea coseno

Representación:



Variación:

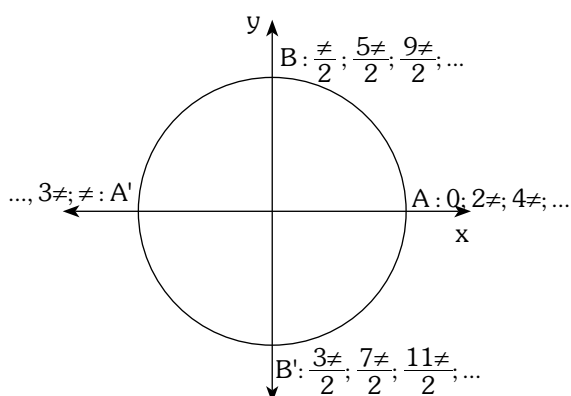
Esto es:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cos \alpha \begin{cases} \max.: 1 \\ \min.: -1 \end{cases}$$

Análisis en cada cuadrante

$\alpha \in$	IC	IIC	IIIC	IVC
cos	$<0; 1>$	$<-1; 0>$	$<-1; 0>$	$<0; 1>$

Para arcos con extremos en A, B, A' ó B' ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\left. \begin{array}{l} A: 2n\pi \\ A': (2n+1)\pi \\ B: (4n+1)\frac{\pi}{2} \\ B': (4n+3)\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \neq \\ (2n+1) \neq \\ \frac{n \neq}{2} \end{array}$$

Ejercicios resueltos

1. Suma el máximo y el mínimo valor de:

$$L = 3 \operatorname{sen} x - 2; x \in \mathbb{R}.$$

- a) -2 a) -3 b) 2 c) 3 a) -4

Resolución

En este caso como " x " $\in \mathbb{R}$: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$$\Rightarrow -3 \leq 3 \operatorname{sen} x \leq 3$$

$$-3 - 2 \leq \underbrace{3 \operatorname{sen} x - 2}_L \leq 3 - 2$$

$$\Rightarrow -5 \leq L \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{\max} = 1 \\ L_{\min} = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_{\max} + L_{\min} = -4$$



2. Suma el máximo y el mínimo valor de:

$$C = 7 - 4 \cos x; x \in \mathbb{R}$$

- a) 11 a) 8 b) 13 c) 6 a) 14

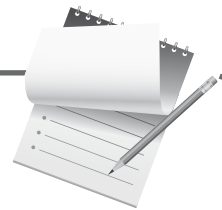
Resolución

Como: $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Rightarrow -4 \leq -4 \cos x \leq 4$$

$$-4 + 7 \leq \underbrace{-4 \cos x + 7}_C \leq 4 + 7 \rightarrow 3 \leq C \leq 11 \quad \left. \begin{array}{l} C_{\max} = 11 \\ C_{\min} = 3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow C_{\max} + C_{\min} = 14$$

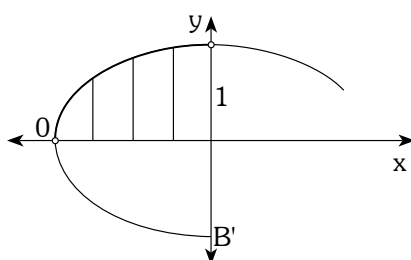


3. Sabiendo que, $\theta \in \text{IIC}$; señale la variación de:

$$L = 3 \operatorname{sen} \theta - 1$$

- a) $\langle 0; 3 \rangle$ a) $\langle -1; 3 \rangle$ b) $\langle -1; 2 \rangle$ c) $\langle 0; 2 \rangle$ a) $\langle -1; 1 \rangle$

Resolución



Como: $\theta \in \text{IIC} \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} \theta < 1$

$$0 < 3 \operatorname{sen} \theta < 3$$

$$\Rightarrow 0 - 1 < \underbrace{3 \operatorname{sen} \theta - 1}_L < 3 - 1$$

$$-1 < L < 2$$

$$\therefore L \in \langle -1; 2 \rangle$$



Práctica

1. Determine la variación de A:

$$A = \frac{2 \cos x - 3}{4}; x \in \mathbb{R}$$

- a) $[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$ b) $[-\frac{1}{4}; 1]$ c) $[-\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}]$
 d) $[-\frac{5}{4}; 0]$ e) $[-\frac{1}{4}; 0]$

2. Determine la variación de:

$$B = 8 \sin^2 x + 1; x \in \mathbb{R}$$

- a) $[0; 9]$ b) $[1; 9]$ c) $[-1; 8]$
 d) $[-1; 4]$ e) $[0; 4]$

3. Determine la suma de valores enteros que toma:

$$E = 4 \cos \alpha - 3; \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) 26 b) 13 c) 27
 d) -13 e) -27

4. Sabiendo que $\alpha \in \text{IIC}$. ¿Cuál es la variación de:

$$L = 3 \sin \alpha - 1 ?$$

- a) $<0; 2>$ b) $<-1; 2>$ c) $<0; 3>$
 d) $<-1; 1>$ e) $[-4; 2]$

5. Sabiendo que $\beta \in \text{IIIC}$; determine la variación de:

$$L = 2 \cos \beta + 1$$

- a) $[-1; 3]$ b) $<-1; 3>$ c) $<-1; 1>$
 d) $<0; 3>$ e) $<-2; 2>$

6. Calcular el producto del máximo y mínimo valor de:

$$f(\alpha, \beta, \theta) = 2 \sin^2 \alpha - 3 |\cos \beta| + \sin \theta$$

Siendo α , β y θ independientes entre sí.

- a) 0 b) 4 c) 8
 d) -8 e) -12

7. Determine el máximo valor de:

$$M = 3 + 2 \sin \alpha - \cos \beta - \sin^2 \theta; (\alpha \neq \beta \neq \theta)$$

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 6 e) 8

8. Determine el intervalo de "k", si se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{2 \cos x - 1}{3} = \frac{k + 2}{2} - \frac{k - 1}{3}$$

- a) $[-14; -6]$ b) $[-13; -5]$ c) $[-12; -4]$
 d) $[4; 12]$ e) $[5; 13]$

9. Indicar el intervalo de "m" si: $\theta \in \text{IVC}$ y además:

$$\sin \theta = \frac{2m - 3}{5}$$

- a) $<-1; 2>$ b) $<-1; 3>$ c) $\langle -1; \frac{3}{2} \rangle$
 d) $[-1; 2]$ e) $[-1; 3]$

10. Hallar la suma del máximo y mínimo valor de:

$$M = 3 + 2 \sin \theta. \text{ Si: } \theta \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$$

- a) 4 b) 5 c) 9
 d) 10 e) 13

11. Si: $x \in \langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \rangle$. Señale la variación de:

$$P = 4 \cos x + 5$$

- a) $[3; 7]$ b) $[3; 7>$ c) $<2; 7>$
 d) $<-2; 4>$ e) $<3; 7]$

12. $x \in [15^\circ; 45^\circ]$, indicar el rango de:

$$F(x) = 2 \sin^2 (45^\circ + x) + 3$$

- a) $[\frac{3}{2}; 5]$ b) $[\frac{5}{2}; 5]$ c) $[\frac{7}{2}; 5]$
 d) $[\frac{9}{2}; 5]$ e) $[4; 5]$

13. Si: $x \in \langle \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{24} \rangle$. Señale la variación de:

$$L = \frac{4}{2 \sin (2x - \frac{\pi}{4}) + 1}$$

- a) $<1; 2>$ b) $<1; 4>$ c) $<2; 4>$
 d) $<3; 6>$ e) $<4; 8>$

14. Determine la variación de: $J = 3 + 2 \sin \beta$

$$\text{Si: } \beta \in <20^\circ; 180^\circ>$$

- a) $<1; 5]$ b) $<2; 5]$ c) $<3; 5]$
 d) $<4; 5]$ e) $<0; 5]$

15. Determine la variación de:

$$K = 5 + 3 \sin \left(\frac{2\alpha - 40}{4} \right); \alpha \in <200^\circ; 380^\circ]$$

- a) $<1; 5]$ b) $[3; 7>$ c) $<5; 8]$
 d) $[5; 8>$ e) $<-5; 5>$

Tarea domiciliaria

- ¿En qué cuadrante en "seno" es positivo y es creciente?
 - IC
 - IIC
 - IIIC
 - IVC
 - Ninguno
- ¿En qué cuadrante el "coseno" es negativo y es decreciente?
 - IC
 - IIC
 - IIIC
 - IVC
 - Ninguno
- ¿En qué cuadrante el "seno" y "coseno" decrecen simultáneamente?
 - IC
 - IIC
 - IIIC
 - IVC
 - Ninguno
- ¿En qué cuadrante(s) el "seno" y "coseno" tienen el mismo signo?
 - I y II
 - I y III
 - I y IV
 - II y III
 - II y IV
- Señale la variación de:

$$A = 7 \operatorname{sen} \alpha - 5; \alpha \in \mathbb{R}$$
 - $[-7; 12]$
 - $[-12; 2]$
 - $[2; 12]$
 - $[-2; 12]$
 - $[-6; 8]$
- Señale la variación de:

$$A = 7 - 3 \cos \theta; \theta \in \mathbb{R}$$
 - $[4; 7]$
 - $[-6; 8]$
 - $[-4; 10]$
 - $[-2; 8]$
 - $[4; 10]$
- Si: $\theta \in \text{IIC}$, señale la variación de:

$$E = 3 \operatorname{sen} \theta + 1$$
 - $<1; 4>$
 - $[1; 4]$
 - $[-2; 4]$
 - $<-1; 4]$
 - $[-5; 3]$
- Si: $x \in \text{IIIC}$. Señale la variación de:

$$E = 2 \cos x + 1$$
 - $[-1; 3]$
 - $<-1; 3>$
 - $<-1; 1>$
 - $<0; 3>$
 - $<-2; 2>$
- Indicar la extensión de "k", si se cumple:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{4k-1}{3}$$
 - $[\frac{1}{2}; 1]$
 - $[-\frac{1}{2}; 1]$
 - $[-1; \frac{1}{2}]$
 - $[0; \frac{1}{2}]$
 - $[-1; -\frac{1}{2}]$
- Calcular el máximo valor de:

$$E = 3 \operatorname{sen}^2 x - \cos y; x \neq y$$
 - 3
 - 2
 - 4
 - 4
 - 1
- Si: $\theta \in \mathbb{R}$ y además: $\operatorname{sen} \theta = \frac{2n-1}{7}$. ¿Cuál es la suma de los valores enteros que toma "n"?
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
- Sabiendo que: $\alpha \in <30^\circ; 120^\circ>$; señale la variación de: $A = 4 \operatorname{sen} \alpha - 1$.
 - $<1; 3]$
 - $<1; 3>$
 - $<1; 2\sqrt{3} + 1>$
 - $<2; 3>$
 - $[-1; 3]$
- Si: $x \in <60^\circ; 210^\circ>$. Señale la extensión de:

$$H = 8 \cos x + 1$$
 - $<-7; 5]$
 - $[-7; 5>$
 - $<-7; 5>$
 - $<-6; 5]$
 - $[-6; 5>$
- Si: $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$. Determine la extensión de:

$$E = 2 \operatorname{sen} \theta - 3$$
. Dar como respuesta el mayor valor de "E".
 - $-\frac{1}{2}$
 - 2
 - 1
 - 0
 - 1
- Determine la extensión de:

$$A = \frac{\cos \theta - 3}{\cos \theta - 2}$$
 - $[\frac{2}{3}; 4]$
 - $<\frac{2}{3}; 4>$
 - $[\frac{4}{3}; 2]$
 - $<\frac{4}{3}; 2>$
 - $[\frac{3}{4}; 2]$

15

Identidades trigonométricas de una variable

Definición

Son aquellas igualdades entre las razones trigonométricas de una variable; las cuales se verifican para todo valor de la variable en que la razón trigonométrica que interviene se encuentra definida.

Clasificación

III. I.T. recíprocas:

$$\operatorname{sen} x \csc x = 1 \Rightarrow \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}; \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cos x \sec x = 1 \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}; \forall x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\tan x \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}; \forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$$

IV. I.T. por división

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}; \forall x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}; \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$$

V. I.T. Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1; \forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{cases}$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1; \forall x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\} \begin{cases} \sec^2 x = \tan^2 x + 1 \\ \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1; \forall x \in \mathbb{R} - \begin{cases} \csc^2 x = \cot^2 x + 1 \\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \end{cases}$$

Observación:

Identidades auxiliares

Son expresiones cuyas reducciones y/o simplificaciones debido al uso frecuente se hacen conocidas lo cual nos permite operar directa o indirectamente con mayor facilidad la resolución a ciertos ejercicios.

$$1. \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$2. \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$3. \tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

$$4. \sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$5. (1 \pm \operatorname{sen} x \pm \cos x)^2 = 2(1 \pm \operatorname{sen} x)(1 \pm \cos x)$$

Ejercicios Resueltos:

1. Si: $\tan x + \sec x = 2(1 + \cos x)$; $x \in \text{IIIC}$. Calcular: $C = \sec x \cdot \csc x$

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $-\frac{7}{2}$ e) $-\frac{5}{2}$

Resolución

Pasando a senos y cosenos

$$\frac{\sec x}{\cos x} + \sec x = 2(1 + \cos x)$$

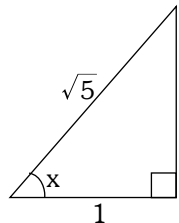
$$\frac{\sec x + \sec x \cdot \cos x}{\cos x} = 2(1 + \cos x)$$

factorizando "sen x":

Reduciendo:

$$\frac{\sec x(1 + \cos x)}{\cos x} = 2(1 + \cos x)$$

$$\frac{\sec x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \tan x = 2 \quad (x \in \text{IIIC})$$



$$\begin{cases} \sec x = -\sqrt{5} \\ \csc x = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Luego, en la expresión pedida:

$$C = \sec x \cdot \csc x = (-\sqrt{5})\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \therefore C = \frac{5}{2}$$

Rpta: **b**

2. Sabiendo que: $\sec x \cdot \csc x = \cot x + 1$; $0^\circ < x < 360^\circ$. Hallar "x".

- a) 45° b) 135° c) 225° d) a y b e) a y c

Resolución

Como:

$$\sec x \cdot \csc x = \tan x + \cot x,$$

tenemos:

$$\tan x + \cot x = \cot x + 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x \in \text{IC} \text{ ó } \text{IIIC}$$

$$x = 45^\circ \text{ y } 135^\circ \Rightarrow \therefore \text{Rpta: a y b}$$

3. Si: $\tan x + \cot x = 3$, calcular:

$$J = (\sec x + \csc x)^2$$

- a) 6 b) 9 c) 12 d) 15 e) 18

Resolución

Note que el dato:

$$\frac{\tan x + \cot x}{\sec x \cdot \csc x} = 3 \Rightarrow \sec x \cdot \csc x = 3$$

Desarrollando la expresión pedida:

$$J = (\sec x + \csc x)^2$$

$$J = \sec^2 x + 2 \sec x \cdot \csc x + \csc^2 x$$

Pero recuerde que:

Luego:

$$J = \sec^2 x + \csc^2 x + 2 \sec x \cdot \csc x$$

$$J = \sec^2 x + \csc^2 x + 2 \sec x \cdot \csc x$$

ordenando:

$$J = (\sec x \cdot \csc x)^2 + 2 \sec x \cdot \csc x$$

Reemplazando valores:

$$J = 3^2 + 2(3) = 9 + 6 \Rightarrow \therefore J = 15$$

Rpta: **d**

Práctica

1. Reducir: $E = \tan x (1 + \cos x) - \sin x$

- a) $\tan x$ b) $\cot x$ c) $\sec x$
d) $\csc x$ e) 1

2. Reducir: $M = (\sec x - \cos x) \cot x$

- a) 1 b) $\sin x$ c) $\cos x$
d) $\cot x$ e) $\tan x$

3. Si :

$$A = 3 \cos x + 4 \sin x$$

$$L = 3 \sin x - 4 \cos x$$

$$I = 5 \cdot \tan x$$

$$\text{Calcular: } E = \sqrt{A^2 + L^2 + I^2}$$

- a) $5 \cdot \sec^2 x$ b) $2 \tan x$
c) $5 \cdot \tan^2 x$ d) $5 \cdot \csc^2 x$
e) $5 \cdot \sec x$

4. Reducir:

$$P = (\sin x + \csc x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

- a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 11

5. Hallar el valor de "n".

$$\frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x} + \frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} = n + n^n \cot^{-2} x$$

- a) -2 b) 1 c) -1
d) 4 e) 2

6. Reducir:

$$A = (\sec x \cdot \csc x - \tan x) (\tan x + \cot x)$$

- a) 1 b) $\sin^2 x$ c) $\cos^2 x$
d) $\sec^2 x$ e) $\csc^2 x$

7. Si: $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{5}{4}}$.

$$\text{Calcular: } M = \sin^4 x + \cos^4 x$$

- a) $\frac{30}{19}$ b) $\frac{31}{32}$ c) $\frac{19}{30}$
d) $\frac{31}{16}$ e) $\frac{31}{64}$

8. Simplificar:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2} - \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{3}$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{24}$

9. Si: $\sin x + \cos x = m$.

$$\text{Hallar: } E = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

- a) $\frac{1+m}{2}$ b) $\frac{1-m}{2}$ c) $\frac{(1+m)^2}{2}$
d) $\frac{(1-m)^2}{2}$ e) $\frac{m}{2}$

10. Si: $\tan x + \cot x = 3$. Calcular:

$$L = \frac{\sec x + \csc x}{\sec x - \csc x}$$

- a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) 3
d) $\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{5}$

11. Si: $\frac{\sin x \cos^5 x - \sin^5 x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \tan x$

$$\text{Calcular: } K = \frac{\sec^4 x - \sec^2 x}{\csc^4 x - \csc^2 x}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) $2\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{3}$

12. Reducir:

$$L = (\sec x + \tan x - 1)(\sec x - \tan x + 1)$$

- a) $\tan x$ b) $\sec x$ c) $2\sec x$
d) $2\tan x$ e) 2

13. Si: $\tan x + \sin x = 2(1 + \cos x)$; $x \in \text{IIIC}$

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{2}$
d) $-\frac{7}{2}$ e) $-\frac{5}{2}$

14. Sean A y B tales que: $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $A \neq B$. Si:

$$\frac{\tan x + \sec x + 1}{\cot x + \csc x + 1} = \frac{A}{B}. \text{ Halle: } E = \frac{A \sin x - B \cos x}{\sin x - \cos x}$$

- a) $A+B$ b) A^2+B^2 c) $B-A$
d) A^2-B^2 e) $A-B$

15. Si la igualdad es una identidad, calcular: $M+N$

$$\frac{\csc x - \cot x}{\csc x + \cot x} + \frac{\csc x + \cot x}{\csc x - \cot x} = M + 4 \cot^N x$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Tarea domiciliaria

1. Reducir: $B = \sin^4 x \csc^2 x + \cos^4 x \sec^2 x$
- a) 1 b) $\sin x$ c) $\cos x$
 d) $\sin^2 x$ e) 0

2. Simplificar: $C = \sin x \cot x \cos x (\tan^2 x + 1)$
- a) 1 b) $\sin x$ c) $\tan x$
 d) $\cos x$ e) 2

3. Reducir: $L = \frac{\sin^4 x - \sin^6 x}{\cos^4 x - \cos^6 x}$
- a) 1 b) $\tan^2 x$ c) $\cot^2 x$
 d) $\tan^4 x$ e) $\cot^4 x$

4. Simplificar: $C = \frac{\sin x \tan x + \cos x}{\cos x \cot x + \sin x}$
- a) 1 b) $\tan x$ c) $\cot x$
 d) $\tan^2 x$ e) $\cot^2 x$

5. Reducir:
- $$A = 3 \sqrt{\frac{\sec x - \cos x}{\csc x - \sin x}}$$
- a) $\frac{\cot x}{2}$ b) $\sec x$ c) $\csc x$
 d) $\tan x$ e) $\sin x$

6. Si: $\csc x + \cot x = 2$. Calcular: $\cot x$
- a) 0,5 b) 0,75 c) 1
 d) 1,25 e) 1,5

7. Si: $\sec x - \tan x = 2,5$. Calcular: $\sec x + \tan x$
- a) 2,5 b) 2 c) 0,5
 d) 0,4 e) 0,1

8. Determinar "M", en la siguiente identidad:
- $$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{2}{M}$$
- a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $\sin x \cos x$
 d) $\csc x$ e) $\sec x$

9. Reducir:
- $$P = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$$
- a) $\tan^4 x$ b) $\tan^6 x$ c) $\tan^8 x$
 d) $\tan^3 x$ e) 0

10. Reducir:
- $$C = (\sec x + \cos x)^2 + (\csc x + \sin x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$
- a) 5 b) 6 c) 7
 d) 8 e) 9

11. Reducir:
- $$S = \frac{1}{3}(\sin^6 x + \cos^6 x) - \frac{1}{4}(\sin^2 x - \cos^2 x)^2$$
- a) 1 b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{3}{5}$ e) 2

12. Efectuar:
- $$P = \frac{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \tan \alpha)(\cos \alpha + \cot \alpha)}$$
- a) 2 b) 3 c) 1
 d) 0,5 e) 0,25

13. Calcular:
- $$E = \frac{(\tan x + \cot x)^2}{\sec^2 x + \csc^2 x}$$
- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{4}$
 d) -1 e) 1

14. Si: $\sin^2 x + \cos^4 x = n$. Hallar: $K = \sin^4 x + \cos^4 x$
- a) $2n+1$ b) $2n-1$ c) $n+1$
 d) $n-1$ e) $2n$

15. Simplificar:
- $$E = \frac{(\sec^2 x + \csc^2 x) \cos x}{\tan x + \cot x}$$
- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\sec x$
 d) $\csc x$ e) $\tan x$

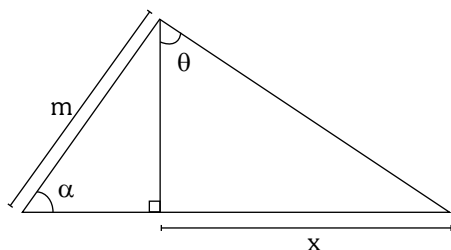
16. Si: $\tan x + \cot x = 3$. Calcular: $E = \sin^6 x + \cos^6 x$
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

17. Si: $\sec^2 x + \csc^2 x = 5$. Calcular: $E = \sin^4 x + \cos^4 x$
- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$
 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

16

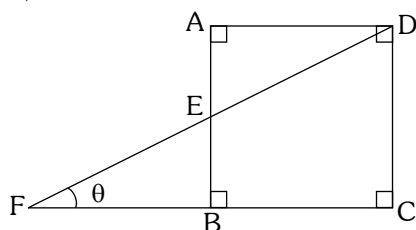
Repaso

1. Determinar "x"



- a) $m \sin \alpha \cdot \tan \theta$ b) $m \sin \alpha \cdot \cot \theta$
 c) $m \cos \alpha \cdot \sec \theta$ d) $m \cos \alpha \cdot \tan \theta$
 e) $m \sin \alpha \cdot \csc \theta$

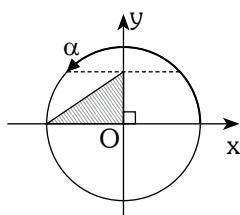
2. Hallar BE, si "L" es el lado del cuadrado ABCD.



- a) $L(1 - \sin \theta)$ b) $L(1 - \cos \theta)$
 c) $L(1 - \tan \theta)$ d) $L(1 - \cot \theta)$
 e) $L(\tan \theta - \cot \theta)$

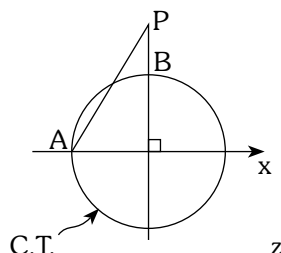
3. De la C.T. mostrada, hallar el área de la región sombreada.

- a) $1/2 \cos \alpha$
 b) $1/2 \sin \alpha$
 c) $1/4 \sin \alpha$
 d) $1/4 \cos \alpha$
 e) $\sin \alpha$

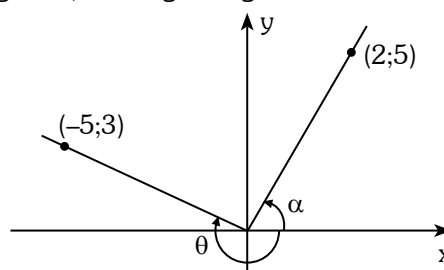


4. En la gráfica se muestra una C.T. Hallar la medida de PB, si:
- $A'P = \sqrt{5}$

- a) 1
 b) 2
 c) 3
 d) 4
 e) 5



5. En el gráfico, hallar
- $\tan \theta + \tan \alpha$



- a) 1,1 b) 1,2 c) 1,9
 d) 2,8 e) 3,4

6. Calcular:
- $E = \sec 1860^\circ + \tan(-135^\circ) - \sin^2 990^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 0
 d) -1 e) -2

7. Determine el signo de "E" en los cuatro cuadrantes:

$$E = \csc x (1 - \cos x)$$

- a) $(+)(+)(+)(+)$ b) $(+)(+)(-)(-)$
 c) $(+)(-)(+)(-)$ d) $(+)(-)(-)(-)$
 e) $(-)(+)(+)(+)$

8. Si "
- θ
- " es un ángulo canónico del tercer cuadrante el

$$\text{cual cumple: } (\tan \theta)^{2 \cot \theta} = \frac{8}{27}$$

$$\text{Calcule: } E = 3 \cos \theta + \sin \theta$$

- a) 0 b) $\frac{5}{13}$ c) $-\frac{12}{5}$
 d) $-\sqrt{7}$ e) $-\sqrt{13}$

9. Calcular:

$$C = (3 \sin 90^\circ - 2 \cos 180^\circ)^2 + (\sin 270^\circ - \cos 360^\circ)^2$$

- a) 26 b) 27 c) 28
 d) 29 e) 25

10. Reducir:

$$C = \frac{\sec(180^\circ + \theta)}{\csc(90^\circ + \theta)} + \frac{\sin(270^\circ + \phi)}{\cos(360^\circ - \phi)}$$

- a) -2 b) 2 c) 0
 d) 1 e) -1

11. Simplificar:

$$L = \operatorname{tg} x (1 + \cos x) - \operatorname{sen}^2 x \cdot \csc x$$

- a) $\tan x$ b) $2 \tan x$ c) $\cos x$
d) $2 \cos x$ e) $\operatorname{sen} x$

12. Reducir:

$$C = \operatorname{sen} x (1 + \operatorname{sen} x - \cos x) + \cos x (1 + \cos x + \operatorname{sen} x) - 1$$

- a) $\operatorname{sen} x$ b) $\cos x$
c) $2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ d) $\operatorname{sen} x + \cos x$
e) $\operatorname{sen} x - \cos x$

13. Reducir: $L = \operatorname{sen} x (\csc x + \operatorname{sen} x) + \cos x (\sec x + \cos x) + 1$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

14. Reducir: $L = \frac{\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x}{\cos^4 x - \cos^6 x}$

- a) 1 b) $\operatorname{tg}^2 x$ c) $\operatorname{ctg}^2 x$
d) $\operatorname{tg}^4 x$ e) $\operatorname{ctg}^4 x$

15. Reducir:

$$C = (3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x)^2 + (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)^2$$

- a) 7 b) 5 c) 12
d) 13 e) 15

Tarea domiciliaria

1. Siendo " α ", " β " y " θ " las medidas de tres ángulos agudos que verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} 20^\circ$$

$$\cos(\beta - \theta) = \operatorname{sen} 40^\circ$$

$$\cot(\alpha - \theta) = \tan 80^\circ$$

Luego, uno de ellos será:

- a) 75° b) 65° c) 55°
d) 45° e) 25°

2. Hallar la medida del ángulo agudo " x ", en:

$$\cos 3x \cdot \tan 2x \cdot \operatorname{sen} 4x \cdot \cot 2x \cdot \sec 3x \cdot \csc(60^\circ - x) = 1$$

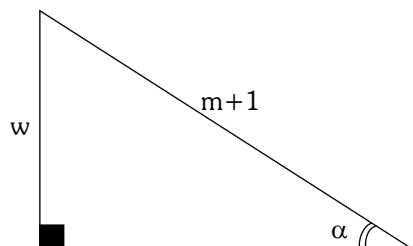
- a) 8° b) 10° c) 12°
d) 15° e) 16°

3. Calcular:

$$H = \sqrt{\frac{(4 \cdot \cos 36^\circ + 9 \cdot \operatorname{sen} 54^\circ) \cdot \sec 36^\circ}{\cot 18^\circ \cdot \cot 72^\circ}}$$

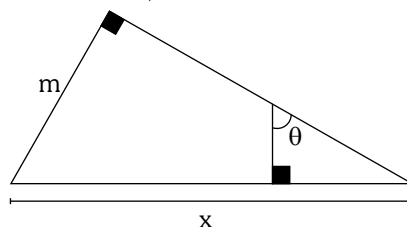
- a) 5 b) $\sqrt{5}$ c) 1
d) 13 e) $\sqrt{13}$

4. Del gráfico mostrado, determine " w ".



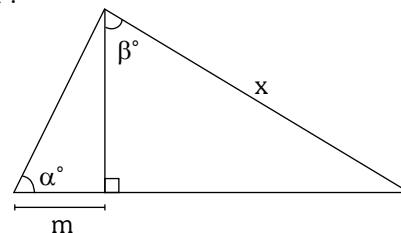
- a) $m \operatorname{sen} \alpha + 1$ b) $(m + 1) \operatorname{sen} \alpha$
c) $m \cos \alpha + 1$ d) $(m + 1) \cos \alpha$
e) $m \tan \alpha$

5. Del gráfico mostrado, determine " x ".



- a) $m \operatorname{sen} \theta$ b) $m \cos \theta$ c) $m \sec \theta$
d) $m \csc \theta$ e) $m \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

6. Calcular " x " en la figura mostrada, en función de " α ", " β " y " m ".



- a) $m \cot \alpha \sec \beta$ b) $m \cot \alpha \cos \beta$
c) $m \tan \alpha \sec \beta$ d) $m \tan \alpha \cos \beta$
e) $m \tan \alpha \operatorname{sen} \beta$

7. En qué cuadrantes el seno crece, a medida que el ángulo crece.

- a) I y IIC b) II y IIIC
c) I y IVC d) II y IVC
e) III y IVC

8. En qué cuadrante(s) el seno decrece y el coseno crece.

- a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) IIC y IIIC

9. Hallar el mínimo valor de:

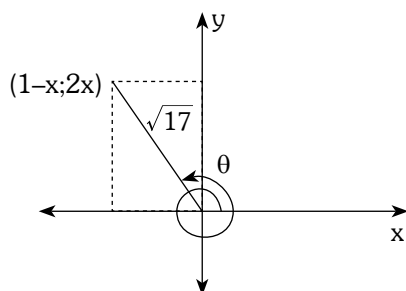
$$E = 6 \cos \theta + 13 \sin \theta + 20$$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

10. Si: $\sin \phi = \frac{5x-18}{3}$; Indicar la variación de "x".

- a) $\left[3, \frac{21}{5}\right]$ b) $\left[3, \frac{21}{5}\right]$ c) $\left\langle 3, \frac{21}{5}\right\rangle$
d) $\left\langle 3, \frac{21}{5}\right\rangle$ e) $\left[0, \frac{21}{5}\right]$

11. De la figura, calcular: " $\tan \theta$ "



- a) 1 b) -2 c) -3
d) -4 e) -5

12. Si el lado final de un ángulo positivo en posición normal " θ " pasa por el punto $(-1;2)$, hallar el valor de:

$$E = \sqrt{5} \sin \theta + \tan \theta$$

- a) 4 b) 0 c) -4
d) 2 e) -2

13. Calcular:

$$Q = \frac{(a+b)^2 \sin 90^\circ - (a-b)^2 \cos^2 180^\circ}{a \sin^4 90^\circ + b \cos^3 270^\circ}$$

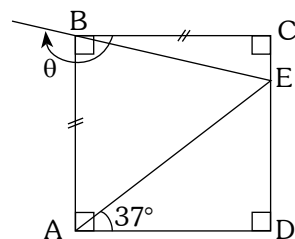
- a) 4ab b) 4 c) 4a
d) 4b e) b

14. Calcular:

$$C = \frac{\sin 135^\circ \cdot \sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ}{\cos 210^\circ \cdot \cos 300^\circ}$$

- a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
d) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

15. Del gráfico, calcular: " $\cot \theta$ "



- a) $\frac{1}{2}$ b) 4 c) $-\frac{1}{2}$
d) -4 e) $\frac{1}{4}$

17

Identidades trigonométricas de la suma y resta de ángulos

Fórmulas básicas:

A) Suma:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cdot \cos B + \operatorname{sen} B \cdot \cos A$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

B) Resta:

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cdot \cos B - \operatorname{sen} B \cdot \cos A$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

Propiedades

I. $\tan A + \tan B + \tan(A+B) \tan A \tan B = \tan(A+B)$

$$\tan A - \tan B - \tan(A-B) \tan A \tan B = \tan(A-B)$$

II. Cálculo del máximo y mínimo valor de la expresión de la forma

$$\text{Sea: } E = A \operatorname{sen} x + B \cos x$$

$$\Rightarrow E_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2} ; E_{\min} = -\sqrt{A^2 + B^2}$$

III. Si: $A + B + C = 180^\circ$ ó $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot A \cdot \cot C = 1$$

IV. Si: $A + B + C = 90^\circ$ ó $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C$$

$$\tan A \cdot \tan B + \tan B \cdot \tan C + \tan A \cdot \tan C = 1$$

Ejercicios Resueltos:

1. Reducir:

$$L = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + x) - \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos x}{\cos(\alpha + x) + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} x}$$

a) $\tan x$

b) $-\tan x$

c) $\cot x$

d) $-\cot x$

e) 1

Resolución

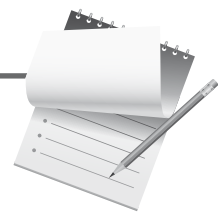
$$L = \frac{\sin(\alpha + x) - \sin \alpha \cdot \cos x}{\cos(\alpha + x) + \sin \alpha \cdot \sin x}$$

$$L = \frac{\sin \alpha \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos x}{\cos \alpha \cdot \cos x - \sin \alpha \cdot \sin x + \sin \alpha \cdot \sin x}$$

Reduciendo:

$$L = \frac{\sin x \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \therefore L = \tan x$$

Rpta: **a**



2. Señale la variación de:

$$L = 2\sqrt{2} \sin(x + 45^\circ) + \sin x + 2 \cos x + 1$$

a) $[-1; 3]$

b) $[-2; 4]$

c) $[-4; 5]$

d) $[-4; 6]$

e) $[-5; 5]$

Resolución

En este caso, primero, desarrollaremos la expresión:

$$L = 2\sqrt{2} \sin(x + 45^\circ) + \sin x + 2 \cos x + 1$$

$$L = 2\sqrt{2} (\sin x \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos x) + \sin x + 2 \cos x + 1$$

$$L = 2\sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) + \sin x + 2 \cos x + 1 \Rightarrow L = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$$

Reduciendo; pero, note que:

$$3 \sin x + 4 \cos x \begin{cases} \max = 5 \\ \min = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_{\max} = 5 + 1 = 6 \\ L_{\min} = -5 + 1 = -4 \end{matrix} \therefore L \in [-4; 6]$$

Rpta: **d**



3. Reducir:

$$L = \frac{\tan 34^\circ + \tan 26^\circ + \sqrt{3} \tan 34^\circ \cdot \tan 26^\circ}{\tan 33^\circ + \tan 12^\circ + \tan 33^\circ \cdot \tan 12^\circ}$$

a) 1

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) 2

e) $2\sqrt{3}$

Resolución

En el numerador:

$$N = \tan 34^\circ + \tan 26^\circ + \sqrt{3} \tan 34^\circ \cdot \tan 26^\circ$$

$$N = \tan 34^\circ + \tan 26^\circ + \tan 34^\circ \cdot \tan 26^\circ \cdot \tan 60^\circ$$

$$N = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

En el denominador:

$$D = \tan 33^\circ + \tan 12^\circ + 1 \cdot \tan 33^\circ \cdot \tan 12^\circ$$

$$D = \tan 33^\circ + \tan 12^\circ + \tan 33^\circ \cdot \tan 12^\circ \cdot \tan 45^\circ = \tan 45^\circ$$

$$D = 1$$

En la expresión:

$$L = \frac{\tan 34^\circ + \tan 26^\circ + \sqrt{3} \tan 34^\circ \cdot \tan 26^\circ}{\tan 33^\circ + \tan 12^\circ + \tan 33^\circ \cdot \tan 12^\circ}$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \therefore L = \sqrt{3}$$

Rpta: **b**



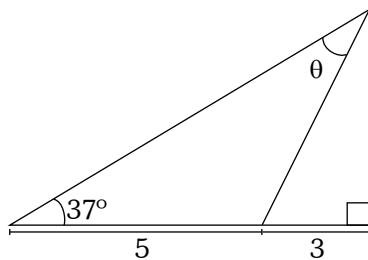
Práctica

1. Simplificar:

$$E = \frac{\sin(45^\circ + x)}{\sin x + \cos x}$$

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. En el gráfico, hallar: $\tan \theta$.



- a) 1 b) $1/2$ c) $1/3$
d) $2/3$ e) $3/2$

3. Siendo: $x+y=30^\circ \wedge x-y=37^\circ$.

$$\text{Calcular: } M = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$$

- a) 1,1 b) 1,2 c) 1,3
d) 1,4 e) 1,5

4. Calcular:

$$Q = \frac{\tan 56^\circ - \tan 34^\circ}{\tan 22^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) 4
d) $1/4$ e) $1/2$

5. Siendo: $\tan x + \tan y + \tan z = 4$

$$\text{Calcular: } A = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin(y+z)}{\cos y \cos z} + \frac{\sin(z+x)}{\cos z \cos x}$$

- a) 3 b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

6. Calcular:

$$E = \frac{4 \tan 19^\circ + 4 \tan 18^\circ + 3 \tan 19^\circ \cdot \tan 18^\circ}{3 \tan 26^\circ + 3 \tan 27^\circ + 4 \tan 26^\circ \cdot \tan 27^\circ}$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

7. Calcular: $E = (\sqrt{3} + \tan 10^\circ)(\sqrt{3} + \tan 20^\circ)$

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

8. Calcular el máximo valor de:

$$E = \sqrt{5}(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x)$$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{15}$
d) $2\sqrt{2}$ e) 4

9. En un triángulo ABC, se sabe que:

$$\tan A = 1 \wedge \tan B = 2. \text{ Calcular: } \tan C$$

- a) -1 b) -2 c) -3
d) 3 e) $-\frac{1}{3}$

10. En un triángulo ABC, reducir:

$$[\tan(A+B+2C) + \tan(A+2B+C) + \tan(2A+B+C)] \cdot \cot B \cdot \cot C$$

- a) 1 b) -1 c) $\tan A$
d) $-\cot A$ e) $-\tan A$

11. Si: $\tan(x+y)=1/2$; $\tan(z-x)=1/3$.

$$\text{Calcular: } \tan(y+z)$$

- a) $5/6$ b) $6/5$ c) $1/3$
d) -1 e) 1

12. Si: $\sin(x+y)=3 \sin(x-y)$.

$$\text{Calcular: } M = \tan x \cot y$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) $1/2$ e) $1/3$

13. Si: $\tan(y+x)=1/2$; $\tan(z-x)=1/3$. Calcular: $\tan(y+z)$

- a) $5/6$ b) $6/5$ c) $1/3$
d) -1 e) 1

14. Siendo: $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $x+y=60^\circ$. Calcular:

$$M = (1 + \tan x \tan y) \tan(x-y)$$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{28}$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{28}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{28}$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$

15. En un triángulo ABC, $\tan A + \tan B = n \tan C$

$$\text{Hallar: } K = \tan A \cdot \tan B$$

- a) $n-1$ b) $3n+1$ c) $2n-1$
d) $n+1$ e) $2n+1$

Tarea domiciliaria

1. Simplificar :

$$L = \frac{\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)}{\cos x}$$

- a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\tan x$
 d) $\sqrt{3} \tan x$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Reducir :

$$L = \frac{\sin(\alpha + x) - \sin \alpha \cos x}{\cos(\alpha + x) + \sin \alpha \sin x}$$

- a) $\tan x$ b) $\tan \alpha$ c) $\cot x$
 d) $\cot \alpha$ e) 1

3. Sabiendo que :

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = a$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = b$$

$$\text{Hallar: } \sin(\alpha + \beta)$$

- a) $a + b$ b) $a - b$ c) ab
 d) $ab + 1$ e) $ab + 2$

4. Siendo α y β ángulos agudos; además $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ y

$$\cos \beta = \frac{4}{5}, \text{ hallar: } \sin(\alpha - \beta)$$

- a) $\frac{12}{65}$ b) $\frac{18}{65}$ c) $\frac{24}{65}$
 d) $\frac{28}{65}$ e) $\frac{33}{65}$

5. Siendo $x + y = 60^\circ$, simplificar :

$$R = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Calcular el valor de $\cos 7^\circ$

- a) $\frac{3\sqrt{3}-2}{10}$ b) $\frac{3\sqrt{3}+2}{10}$ c) $\frac{4\sqrt{3}+2}{10}$
 d) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ e) $\frac{4\sqrt{3}+5}{10}$

7. Siendo: $\alpha + \beta = 45^\circ$ y $\tan \alpha = \frac{3}{5}$.

$$\text{Calcular: } \tan \beta$$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{7}$
 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

8. Simplificar :

$$E = (1 + \tan 27^\circ)(1 + \tan 18^\circ)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) $2 \tan 28^\circ$ e) $2 \tan 17^\circ$

9. Reducir :

$$L = (1 + \tan 40^\circ)(1 + \tan 5^\circ)$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{4}$
 d) 4 e) $\frac{1}{2}$

10. Reducir :

$$L = \frac{\tan 34^\circ + \tan 26^\circ + \sqrt{3} \tan 24^\circ \tan 26^\circ}{\tan 33^\circ + \tan 12^\circ + \tan 33^\circ \tan 12^\circ}$$

- a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 d) 2 e) $2\sqrt{3}$

11. Determinar el máximo valor de:

$$E = 3 \cos(60^\circ + x) + \sqrt{3} \sin x$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
 d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{11}$

12. Calcular el máximo valor de:

$$E = \sqrt{5}(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x)$$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{15}$
 d) $2\sqrt{2}$ e) 4

13. Señale la extensión de:

$$E = 5 \sin x - 12 \cos x + 1$$

- a) $[-12; 13]$ b) $[-14; 14]$ c) $[-12; 14]$
 d) $[-11; 13]$ e) $[-13; 13]$

14. Determine el máximo valor de:

$$E = 2 \sin(x + 30^\circ) + \cos x$$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{7}$
 d) 3 e) $\sqrt{10}$

15. En un triángulo ABC, se cumple:

$$3 \tan A - \tan B = \tan C.$$

$$\text{Calcular: } M = \tan B \cdot \tan C$$

- a) 3 b) 2 c) 4
 d) $1/4$ e) $1/3$

18

Repaso

1. Reducir:

$$M = \left(\frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos^2 x} + 1 \right) \tan^2 x$$

- a) 1 b) $\csc^2 x$ c) $\sec^2 x$
d) $\sec x \cdot \tan x$ e) $\csc x \cdot \cot x$

2. Reducir:

$$A = \frac{\sec^2 x \cdot \csc^2 x - \csc^2 x}{\sec^2 x \cdot \csc^2 x - \sec^2 x}$$

- a) $\tan x$ b) $\tan^2 x$ c) $\tan^4 x$
d) $\cot^4 x$ e) $\cot^2 x$

3. Simplificar:

$$C = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{2}{3}$
d) $-\frac{3}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

4. Si: $\tan(y+x) = 1/2$; $\tan(z-x) = 1/3$. Calcular: $\tan(y+z)$

- a) $5/6$ b) $6/5$ c) $1/3$
d) -1 e) 1

5. Reducir:

$$C = \frac{\tan 10^\circ + \tan 12^\circ + \tan 10^\circ \cdot \tan 12^\circ \cdot \tan 22^\circ}{\tan 15^\circ + \tan 7^\circ + \tan 15^\circ \cdot \tan 7^\circ \cdot \tan 22^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) $\tan 15^\circ$
d) $\tan^2 22^\circ$ e) $2 \tan 22^\circ$

6. Reducir: $C = \sin 50^\circ - 2 \sin 10^\circ \cos 40^\circ$

- a) $\tan 40^\circ$ b) $\tan 10^\circ$ c) $\cot 10^\circ$
d) $\cot 45^\circ$ e) $\sin 30^\circ$

7. Calcular el máximo valor de:

$$C = 2 \sin x + \sqrt{5} \cos x + 3 \text{ y sùmelo con el mìnimo valor de:}$$

$$L = \sqrt{7} \sin x - \sqrt{2} \cos x + 2$$

- a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

8. Calcule:

$$E = (\sin 2\theta \cdot \sec \theta)^2 + (\sin 2\theta \cdot \csc \theta)^2$$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

9. Señale el equivalente de:

$$C = \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$$

- a) $\sin 4\theta$ b) $4 \sin 4\theta$ c) $\frac{1}{4} \sin 4\theta$
d) $8 \sin 8\theta$ e) $\frac{1}{8} \sin 8\theta$

10. Simplificar:

$$E = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}$$

- a) 2 b) $\sin 2x$ c) $\cos 2x$
d) $\sec 2x$ e) $\csc 2x$

11. Siendo:

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \frac{7}{8}$$

$$\text{Calcular: } M = \tan x + \cot x$$

- a) 16 b) 14 c) 7
d) 4 e) 8

12. Simplifique:

$$M = \frac{1}{\tan 5x - \tan 2x} - \frac{\tan 5x \tan 2x}{\tan 2x - \tan 5x}$$

- a) $\tan 7x$ b) $\tan 3x$ c) $\cot 7x$
d) $\cot 3x$ e) $\tan 4x$

13. Simplificar:

$$E = 8 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha$$

- a) $\sin 2\alpha$ b) $\sin 8\alpha$ c) $\sin 16\alpha$
d) $\sin 4\alpha$ e) $\sin 32\alpha$

14. Siendo:

$$\frac{\sin x}{4} = \cos x; \text{ calcular: } L = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$$

- a) 2 b) 4 c) $1/4$
d) $1/16$ e) 16

15. Si: $\tan(x+45^\circ) = n$

$$\text{Calcular: } E = \sec 2x - \tan 2x$$

- a) $1/n$ b) $2n$ c) $3/n$
d) $2/n$ e) n

Tarea domiciliaria

1. Reducir:

$$A = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} - \cos x$$

- a) 1 b) $\sin x$ c) 0
d) $-\sin x$ e) $2 \cos x$

2. Si: $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{8}{7}$. Calcular:

$$M = \sin^2 x \cdot \cot x + \cos^2 x \cdot \tan x$$

- a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{1}{2}$

3. Simplificar:

$$E = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{4}$

4. Reducir:

$$J = \frac{\sin(\alpha + x) + \sin(\alpha - x)}{\cos x}$$

- a) $\sin x$ b) $\cos \alpha$ c) $2 \sin \alpha$
d) $2 \cos \alpha$ e) $2 \sin \alpha \cdot \tan x$

5. Si " α " y " β " son ángulos agudos; tales que: $\csc \alpha = \sqrt{10}$

$$\text{y } \csc \beta = \frac{\sqrt{13}}{2}. \text{ Calcular: } \tan(\alpha + \beta)$$

- a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{9}{5}$
d) $\frac{9}{7}$ e) $\frac{4}{3}$

6. Sabiendo que:

$$\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ determine: } M = \tan x + \cot x$$

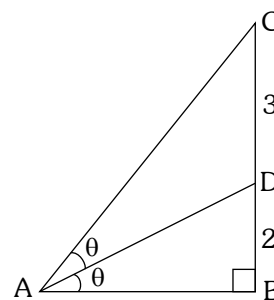
- a) $2\sqrt{3}$ b) 2 c) 4
d) $\sqrt{3}$ e) $4 + 2\sqrt{3}$

7. Reducir: $J = \sin 2x \cdot \sec x - \tan x \cdot \cos x$

- a) $\sin x$ b) $2 \sin x$ c) 0
d) $\cos x$ e) $2 \cos x$

8. Reducir: $C = 8 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

- a) $\sin 2x$ b) $\sin 4x$ c) $\sin 8x$
d) $2 \sin 4x$ e) $4 \sin 4x$

9. Del gráfico, calcular " $\cos \theta$ "

- a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt{\frac{5}{6}}$
d) $\sqrt{\frac{4}{5}}$ e) $\sqrt{\frac{6}{7}}$

10. ¿Cuál es el máximo valor de:

$$P = (\sin x + 2 \cos x)^2 + (2 \sin x + \cos x)^2$$

- a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

11. Sean A y B tales que $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $A \neq B$.

$$\text{Si: } \frac{\tan x + \sec x + 1}{\cot x + \csc x + 1} = \frac{A}{B}$$

$$\text{Halle: } E = \frac{A \sin x - B \cos x}{\sin x - \cos x}$$

- a) $A+B$ b) A^2+B^2 c) $B-A$
d) A^2-B^2 e) $A-B$

12. Si: $\sin x - \cos x = m$, Calcular:

$$E = (1 + \sin x)(1 - \cos x)$$

- a) $m^2 + n^2 = 1$ b) $\frac{(1+m)^2}{2}$
c) $m^2 + n^2 = 3$ d) $(1+m)^2$
e) $1+m$

13. Si: $\tan x + \cot x = 3\sqrt{2}$. Calcular: $C = \sec^2 x + \csc^2 x$

- a) 9 b) 12 c) 16
d) 18 e) 36

14. Simplificar:

$$L = (\sin 3x + \cos 3x)(\sin 2x + \cos 2x) - \sin 5x$$

- a) $\cos x$ b) $\cos 2x$ c) $\cos 3x$
d) $\cos 4x$ e) $\cos 5x$

15. Si: $5 \sin(x - 37^\circ) = \sqrt{2} \cos(x + 45^\circ)$. Hallar: $\cot x$

- a) $\sin 37^\circ$ b) $\cos 37^\circ$ c) $\sec 37^\circ$
d) $\csc 37^\circ$ e) 1

19

Identidades trigonométricas del ángulo doble

Sabemos:

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$A \rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(A + A) = \sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A$$

$$\therefore \boxed{\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A}$$

Análogamente:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\boxed{1 - 2 \sin^2 A}$$

$$\boxed{2 \cos^2 A - 1}$$

Fórmulas de degradación

$$\Rightarrow \boxed{2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A}$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \cos^2 A = 1 + \cos 2A}$$

Ejercicios Resueltos:

1. Simplifique:

$$C = \sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x$$

a) $\sin 2x$

b) $\frac{1}{2} \sin 2x$

c) $\sin 4x$

d) $\frac{1}{2} \sin 4x$

e) $\frac{1}{4} \sin 4x$

Resolución

En la expresión, factorizando:

$$C = \sin x \cdot \cos x (\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x}) ;$$

luego multiplique por 2 cada miembro

$$2C = \underbrace{2 \sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} \cdot \cos 2x$$

Luego: $2C = \sin 2x \cdot \cos 2x$; y multiplicando por 2 a cada miembro tenemos:

$$4C = \underbrace{2 \sin 2x \cdot \cos 2x}_{\sin 4x}$$

$$4C = \sin 4x$$

$$\Rightarrow \therefore C = \frac{1}{4} \sin 4x$$

Rpta: **e**

2. Calcular un valor agudo de "x" que cumple:

$$\frac{1}{8} \sec x = \sin x \cdot \cos 2x$$

- a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{18}$ d) $\frac{\pi}{24}$ e) $\frac{\pi}{48}$

Resolución

En la condición, multiplicando por 2 :

$$2 \cdot \frac{1}{8} = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$$

$$\frac{1}{4} = \sin 2x \cdot \cos 2x$$

Ahora multiplicamos por 2:

$$\frac{1}{2} = \sin 4x$$

$$4x = \frac{\pi}{6} ; x = \frac{\pi}{24}$$

Rpta: **d**



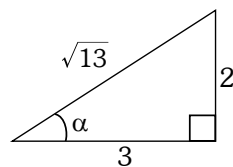
3. Si: $\tan \alpha = \frac{2}{3}$; " α " es agudo, calcular " $\sin 2\alpha$ ".

- a) $\frac{5}{13}$ b) $\frac{12}{13}$ c) $\frac{7}{13}$ d) $\frac{6}{13}$ e) $\frac{13}{14}$

Resolución

Del dato:

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}$$



Piden calcular: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

con ayuda del triángulo:

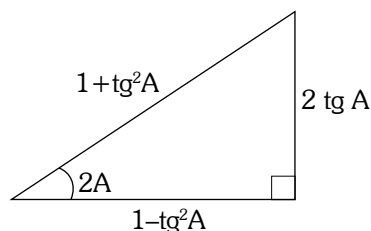
$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \therefore \sin 2\alpha = \frac{12}{13}$$

Rpta: **b**



Observación



$$\sin 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}$$

$$\cos 2A = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}$$

Práctica

1. Halle el equivalente de la expresión:

$$E = \sin^2 x \cot x + \cos^2 x \tan x$$

- a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $\tan 2x$
d) $\cot 2x$ e) $\csc 2x$

2. Simplificar :

$$E = \frac{\sin 2x - 2 \cos^2 x}{\sin 2x - 2 \sin^2 x}$$

- a) $\tan x$ b) $\cot x$ c) $-\tan x$
d) $-\cot x$ e) $\tan^2 x$

3. Reducir la expresión:

$$E = \sin 2x \cot x - \sin x (2 \sin x + \csc x) + 1$$

- a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $2 \sin 2x$
d) $2 \cos 2x$ e) $\cos^2 2x$

4. Hallar el valor de "A" para que la igualdad sea una identidad:

$$A \cot 2x = (\csc x + \sec x)(\cos x - \sin x)$$

- a) 1 b) 2 c) 4
d) 1/2 e) 1/4

5. Calcular "sen 2x", si: $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$

- a) 1/9 b) 2/9 c) 4/9
d) 5/9 e) 7/9

6. Simplificar : $E = \frac{1 + \sin 2A - \cos 2A}{1 + \sin 2A + \cos 2A}$

- a) $\tan A$ b) $\cot A$ c) $\tan^2 A$
d) $\cot^2 A$ e) $\tan^3 A$

7. Si: $\tan x = -\frac{2}{5} \wedge x \in \text{IVC}$.

$$\text{Calcular: } E = \sin 2x + \cos 2x$$

- a) $\frac{1}{29}$ b) $\frac{2}{29}$ c) $\frac{3}{29}$
d) $\frac{4}{29}$ e) $\frac{5}{29}$

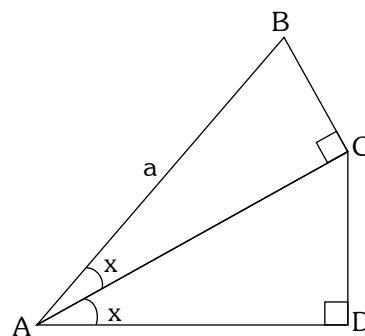
8. Si: $\tan x + \cot x = 3$. Calcular: $\cos 4x$

- a) 2/3 b) 1/9 c) 2/9
d) 2/5 e) 2/3

9. Hallar el valor de "A" para que la igualdad sea una identidad: $A \cot 2x = \cot x - \tan x$

- a) 1 b) 2 c) 4
d) 1/2 e) 1/4

10. Del gráfico, determine CD.



- a) $a \sin 2x$ b) $\frac{a}{2} \sin 2x$
c) $2a \sin 2x$ d) $a \cos 2x$
e) $\frac{a}{2} \cos 2x$

11. Si: $\sin 2x = \frac{2}{3}$.

$$\text{Calcular: } E = \sin^4 x + \cos^4 x$$

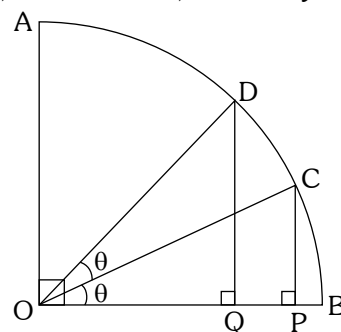
- a) 7/9 b) -7/9 c) 2/9
d) -2/9 e) -2/7

12. Si: $\sin 2x = \frac{3}{5}$; $x \in <0; \frac{\pi}{4}>$

$$\text{Calcular: } \cos^4 x - \sin^4 x$$

- a) -1 b) 4/5 c) -3/5
d) 1 e) 3/5

13. Del gráfico, calcular " $\cos \theta$ ", si: $CP=3$ y $DQ=5$.



- a) 2/3 b) 3/5 c) 5/6
d) 5/12 e) 1/6

14. Siendo: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

$$\text{Calcular: } L = \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. Halle "m" en la igualdad:

$$\sin 2x \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sin(mx)}{m}$$

- a) 2 b) 4 c) 8
d) 6 e) 3

Tarea domiciliaria

1. ¿A qué es igual:

$$P = 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ + 2 \sin \frac{37^\circ}{2} \cdot \cos \frac{37^\circ}{2}$$

- a) 1,1 b) 1,2 c) 1,3
d) 1,4 e) 1,5

2. Reducir:

$$P = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2}{2}$$

- a) $\sin x$ b) $\sin 2x$ c) $2 \sin 2x$
d) $2 \sin x$ e) $\sin 4x$

3. Hallar: $\cos^2 2x$. Si: $\sec x = 3 \sin x$

- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) 2
d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{5}{9}$

4. ¿A qué es igual:

$$Q = \tan x + \cot x$$

- a) $\sec x$ b) $\csc x$ c) $\tan 2x$
d) $2 \sec 2x$ e) $2 \csc 2x$

5. Reducir:

$$J = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$$

- a) $\sin 4x$ b) $\frac{\sin 4x}{4}$ c) $4 \sin 4x$
d) $8 \sin 8x$ e) $\frac{\sin 8x}{8}$

6. Determinar "x".

$$x(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) - 4x(1 - 2 \sin^2 20^\circ) = 36 \cos 140^\circ$$

- a) -12 b) -6 c) -8
d) 12 e) 1

7. Reducir:

$$P = \left[\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \right]^2 + \tan^2 45^\circ$$

- a) $\csc \theta$ b) $\csc^2 \theta$ c) $\csc^2 2\theta$
d) $\csc^2 4\theta$ e) $\csc^2 8\theta$

8. Reducir:

$$M = (1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x) - (1 - 2 \cos^2 x)$$

- a) 0 b) $\cos x$ c) $\cos 2x$
d) $2 \cos 2x$ e) $4 \cos 2x$

9. Si: $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calcular: $\cos^2 2\theta$

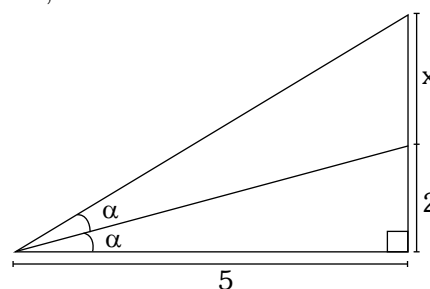
- a) 0,31 b) 0,32 c) 0,33
d) 0,35 e) 0,36

10. Reducir:

$$P = \frac{1 - \cos 2\beta}{2 \sin^2 \beta} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2 \cos^2 \beta}$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

11. Del gráfico, hallar: "x"



- a) $\frac{58}{19}$ b) $\frac{58}{20}$ c) $\frac{58}{21}$
d) $\frac{58}{22}$ e) $\frac{58}{23}$

12. Si: $\tan \beta = 5$. Calcular: $\tan 2\beta$ (aproximadamente)

- a) 0,32 b) 0,42 c) -0,42
d) -0,52 e) -1

13. Si: $\tan^2 x + 3 \tan x - 1 = 0$. Halle: $\tan 4x$

- a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{12}{5}$
d) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{20}{21}$

14. Siendo:

$$m = \cos x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

$$n = \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 16x$$

Hallar: $\sin 32x$

- a) $\frac{mn}{32}$ b) $32mn$ c) $16mn$
d) $\frac{mn}{16}$ e) mn

15. Halle el valor de la expresión:

$$W = \frac{\sin 20^\circ + \sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}$$

- a) 2 b) 4 c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

20

Identidades trigonométricas del ángulo mitad

$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$	$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$
$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$	$\cot \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$
$\tan \frac{A}{2} = \csc A - \cot A$	$\cot \frac{A}{2} = \csc A + \cot A$

El signo ($\pm$) que se ubica delante de las raíces dependerá del cuadrante donde se ubica ($\frac{A}{2}$).

Ejercicios Resueltos:

1. Siendo: $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Calcular: " $\tan \frac{\alpha}{2}$ ".

- a) $+\sqrt{\frac{3}{5}}$ b) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ d) $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ e) $\sqrt{\frac{4}{5}}$

Resolución

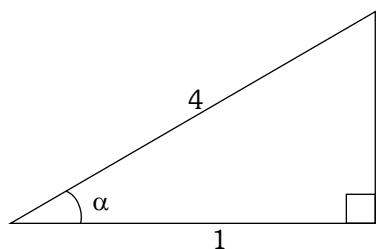
Como: $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

$270^\circ < \alpha < 360^\circ \Rightarrow 135^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ \rightarrow \text{IIC} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \text{ es } (-)$

Luego: $\tan \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

Busquemos ahora " $\cos \alpha$ "

Como: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\alpha \in \text{IV C}$



$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

Ahora reemplazaremos en:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}}$$

$$\Rightarrow \therefore \tan \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Rpta: **d**

2. Siendo: $\sin \phi = \frac{m-n}{m+n}$; hallar " $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ "

a) $\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$

b) $\sqrt{\frac{2n}{m}}$

c) $-\sqrt{\frac{2m}{n}}$

d) $-\sqrt{\frac{3n}{2m}}$

e) $\pm\sqrt{\frac{m}{n}}$

Resolución

Piden: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$; pero: $\tan x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$

Sea: $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \phi$

Entonces: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}}$

Luego: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$

Reemplazando: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{m-n}{m+n}}{1 + \frac{m-n}{m+n}}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{m+n-m+n}{m+n}}{\frac{m+n+m-n}{m+n}}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{2n}{2m}}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{n}{m}}$$

Rpta: **a**

3. Siendo

$$\csc 2x + \csc 2y + \csc 2z = \cot 2x + \cot 2y + \cot 2z$$

Calcular: $C = \frac{\tan x + \tan y}{\tan z}$

a) 1

b) 2

c) -1

d) -2

e) 0

Resolución

De la condición:

$$\csc 2x + \csc 2y + \csc 2z = \cot 2x + \cot 2y + \cot 2z$$

$$\csc 2x + \csc 2y + \csc 2z - \cot 2x - \cot 2y - \cot 2z = 0$$

ordenando:

$$\underbrace{\csc 2x - \cot 2x}_{\tan x} + \underbrace{\csc 2y - \cot 2y}_{\tan y} + \underbrace{\csc 2z - \cot 2z}_{\tan z} = 0$$

quedando:

$$\tan x + \tan y + \tan z = 0 \Rightarrow \tan x + \tan y = -\tan z$$

Piden: $C = \frac{\tan x + \tan y}{\tan z}$

Reemplazando:

$$C = \frac{\tan x + \tan y}{\tan z} = -\frac{\tan z}{\tan z} \therefore C = -1$$

Rpta: **c**

Práctica

1. Si: $270^\circ < \theta < 360^\circ$ y $\sec \theta = \frac{8}{7}$. Calcule: $\sin \frac{\theta}{2}$.

- a) $-1/3$ b) $-1/4$ c) $1/3$
d) $1/4$ e) $4/7$

2. Sabiendo que: $\cos \theta = \frac{1}{8}$. Calcule: $\cos \frac{\theta}{2}$; siendo " θ " un ángulo agudo.

- a) $1/4$ b) $1/2$ c) $3/4$
d) $1/8$ e) $3/8$

3. Si: $\cos \alpha = -0,2$; $\alpha \in \pi; \frac{3\pi}{2} >$. Halle: $\tan \frac{\alpha}{2}$.

- a) $-\sqrt{\frac{6}{7}}$ b) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
d) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ e) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$

4. Si: $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, y $64 \cos^2 \alpha - 9 = 0$. Calcule: $\sin \frac{\alpha}{2}$.

- a) $\frac{\sqrt{11}}{16}$ b) $\frac{\sqrt{11}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{21}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{16}$

5. Calcule el valor de: $E = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \sin 22^\circ 30'$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2} - 1$

6. Reducir la expresión:

$$R = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \frac{1}{\csc x + \cot x}; \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$$

- a) 1 b) -1 c) $1/2$
d) $-1/2$ e) 0

7. Simplifique: $W = \frac{\csc x - \frac{1}{2}\tan \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\tan \frac{x}{2} + \cot x}$

- a) $1/2$ b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

8. Halle el equivalente de:

$$E = \csc \frac{x}{8} + \csc \frac{x}{4} + \csc \frac{x}{2} + \csc x + \cot x$$

- a) $\cot \frac{x}{16}$ b) $\cot \frac{x}{8}$ c) $\cot \frac{x}{4}$
d) $\cot \frac{x}{2}$ e) $\cot x$

9. Simplifique: $E = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \cot(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$

- a) $2 \tan x$ b) $2 \cot x$ c) $2 \sec x$
d) $2 \csc x$ e) $2 \tan 2x$

10. Simplifique: $P = \frac{\cot(45^\circ - \frac{x}{2}) - \tan x}{\sec x - \tan(45^\circ - \frac{x}{2})}$

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\tan x$
d) $\cot x$ e) $\sec x$

11. Halle: $Q = \tan 18^\circ 30'$

- a) 2 b) $1/2$ c) 3
d) $1/3$ e) 5

12. Calcule:

$$Q = \frac{\csc 40^\circ - \cot 40^\circ}{\cot 70^\circ}$$

- a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) -1
d) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. Reduzca:

$$M = \frac{\csc x - \frac{1}{2}(\tan \frac{x}{2})}{\frac{1}{2}(\tan \frac{x}{2}) + \cot x}$$

- a) $\csc x$ b) $\tan x$ c) $\sec x$
d) 2 e) 1

14. Simplifique la expresión:

$$E = \tan \frac{x}{2} + (1 - \cos x) \cot x$$

- a) 1 b) $\sin x$ c) $\tan x$
d) $\cos x$ e) -1

15. Calcule: $N = \tan 37^\circ 30'$

- a) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$ b) $\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$
c) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2$ d) $\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$
e) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$

Tarea domiciliaria

1. Si: $\csc \beta = -\frac{6}{\sqrt{11}}$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$

Calcular: $\sin \frac{\beta}{2}$

a) $\sqrt{\frac{11}{12}}$ b) $\sqrt{\frac{10}{11}}$ c) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{8}}$ e) $\sqrt{\frac{6}{7}}$

2. Si: $\cos \beta = \frac{1}{7}$; $270^\circ < \beta < 360^\circ$. Calcular: $\cos \frac{\beta}{2}$

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

d) $-\frac{2}{\sqrt{7}}$ e) $-\frac{3}{\sqrt{7}}$

3. Si: $\tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $180^\circ < \theta < 270^\circ$. Calcular: $\cos \frac{\theta}{2}$

a) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ b) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ c) $-\sqrt{\frac{1}{5}}$

d) $-\sqrt{\frac{1}{6}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

4. Si: $\cos \phi = -\frac{1}{6}$; $180^\circ < \phi < 270^\circ$. Calcular: $\tan \frac{\phi}{2}$

a) $\sqrt{1,2}$ b) $-\sqrt{1,2}$ c) $\sqrt{1,4}$

d) $-\sqrt{1,4}$ e) $-\sqrt{1,6}$

5. Si: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Calcular: $\tan \frac{\alpha}{2}$

a) $\sqrt{0,3}$ b) $-\sqrt{0,3}$ c) $\sqrt{0,6}$

d) $-\sqrt{0,6}$ e) $-\sqrt{0,2}$

6. Si: $\sec \theta = 9$; $270^\circ < \theta < 360^\circ$. Calcular: $\tan \frac{\theta}{2}$

a) $\sqrt{0,6}$ b) $-\sqrt{0,6}$ c) $\sqrt{0,8}$

d) $-\sqrt{0,8}$ e) $-\sqrt{0,4}$

7. Si: $\sin \theta = \frac{1}{3}$. Calcular: $\tan (45^\circ - \frac{\theta}{2})$

a) $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\pm \frac{1}{2}$

d) $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ e) $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

8. Si: $\sin \theta = \frac{a-b}{a+b}$. Hallar: $\tan (45^\circ + \frac{\theta}{2})$.

a) $\pm \sqrt{ab}$ b) $\pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ c) $\pm \sqrt{\frac{b}{a}}$

d) $\pm \sqrt{\frac{a}{2b}}$ e) $\pm \sqrt{\frac{b}{2a}}$

9. Hallar: $M = \csc 80^\circ + \cot 80^\circ$

a) $\cot 80^\circ$ b) $\csc 80^\circ$ c) $\cot 40^\circ$

d) $\csc 40^\circ$ e) $\cot 160^\circ$

10. Reducir: $S = \csc x + \csc 2x + \cot 2x$

a) $\tan \frac{x}{2}$ b) $\cot \frac{x}{2}$ c) $2 \tan \frac{x}{2}$

d) $2 \cot \frac{x}{2}$ e) $\tan x$

11. Reducir: $E = \csc 20^\circ + \csc 40^\circ + \csc 80^\circ + \tan 10^\circ$

a) $\tan 10^\circ$ b) $\sin 10^\circ$ c) $\cot 10^\circ$

d) $-\tan 10^\circ$ e) $-\cot 10^\circ$

12. Reducir: $E = \frac{\cot \frac{x}{4} - \csc \frac{x}{2}}{\cot \frac{x}{2}}$

a) 1 b) -1 c) 0

d) $-\sqrt{2}$ e) $\tan^2 \frac{x}{2}$

13. Reducir: $E = (\tan \frac{x}{2} + \cot x) \sin x$

a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$ e) 0

14. Si se cumple: $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $\sin 270^\circ < x < 360^\circ$.

Hallar: $\cos x$.

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{17}{8}$ e) $-\frac{3}{8}$

15. Reducir: " ϕ ";

$\phi = \csc 20^\circ - \cot 20^\circ - (\csc 160^\circ + \csc 320^\circ + \csc 640^\circ + \cot 640^\circ)$

a) 1 b) 0

c) $\cot 10^\circ + \tan 10^\circ$ d) $\tan 10^\circ + \cot 80^\circ$

e) $\tan 10^\circ - \cot 80^\circ$

21

Transformaciones trigonométricas I

Identidades para la suma o diferencia de dos senos o cosenos a productos ($A > B$).

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos B - \cos A = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

Ejemplo: transformar a producto:

1. $\operatorname{sen} 24^\circ + \operatorname{sen} 12^\circ =$
2. $\cos 7x + \cos 3x =$
3. $\cos 9\theta - \cos 15\theta =$
4. $\operatorname{sen} 4\alpha - \operatorname{sen} \alpha =$

Ejercicios Resueltos:

1. Simplificar: $J = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 20^\circ - \cos 80^\circ}$

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\tan 50^\circ$

d) $\cot 50^\circ$

e) $-\sqrt{3}$

Resolución

En la expresión: $J = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 20^\circ - \cos 80^\circ}$

$$J = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{80^\circ + 20^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{80^\circ - 20^\circ}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{80^\circ - 20^\circ}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{80^\circ + 20^\circ}{2} \right)}$$

$$J = \frac{\cancel{2} \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cancel{2} \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x}$$

$$J = \cot 30^\circ \therefore J = \sqrt{3}$$



2. Reducir: $J = \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\cos 7x - \cos 3x}$

- a) $\cot 5x$ b) $\cot 2x$ c) $-\cot 2x$ d) $-\cot 5x$ e) $-\cot 3x$

Resolución

En la expresión: $J = \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\cos 7x - \cos 3x}$

Pasamos a producto

$$J = \frac{2 \sin \left(\frac{7x - 3x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x + 3x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{3x - 7x}{2} \right) \sin \left(\frac{3x + 7x}{2} \right)}$$

$$J = \frac{\cancel{2} \sin 2x \cdot \cos 5x}{\cancel{2} \sin (-2x) \cdot \sin 5x} \Rightarrow \boxed{\sin(-\beta) = -\sin \beta}$$

$$J = \frac{\cancel{\sin 2x} \cdot \cos 5x}{-\cancel{\sin 2x} \cdot \sin 5x}$$

Reduciendo: $J = -\frac{\cos 5x}{\sin 5x} = -\cot 5x$



3. Simplificar: $J = \frac{2 \sin 2x - \sin 4x + \sin 8x}{\sin 5x - \sin x}$

- a) $\cos x$ b) $2 \cos x$ c) $\cos 3x$ d) $2 \cos 3x$ e) $2 \cos 2x$

Resolución

En la expresión: $J = \frac{2 \sin 2x - \sin 4x + \sin 8x}{\sin 5x - \sin x}$

$$J = \frac{2 \sin 2x + \overbrace{\sin 8x - \sin 4x}}{\sin 5x - \sin x}$$

Transformando:

$$J = \frac{2 \sin 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 6x}{2 \sin 2x \cdot \cos 3x}$$

$$J = \frac{\cancel{2 \sin 2x} (1 + \cos 6x)}{\cancel{2 \sin 2x} \cdot \cos 3x}$$

Reduciendo:

$$J = \frac{1 + \cos 6x}{\cos 3x} = \frac{2 \cos^2 3x}{\cos 3x}$$

$$J = 2 \cos 3x$$



Práctica

- Reducir: $A = \frac{\sin 6x + \sin 2x}{\cos 6x + \cos 2x}$
 a) $\tan x$ b) $\tan 2x$ c) $\tan 3x$
 d) $\tan 4x$ e) $\tan 8x$
- Calcule: $B = \frac{\sin 47^\circ - \sin 27^\circ}{\sin 10^\circ}$
 a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{5}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- Reducir: $L = \frac{\sin 20 + \sin 40 + \sin 60}{\cos 20 + \cos 40 + \cos 60}$
 a) $\tan 20$ b) $\tan 40$ c) $\tan 60$
 d) $\tan 30$ e) $\tan 50$
- Determine un valor de "x" que cumple:

$$\frac{\sin x + \sin 5x + \sin 9x}{\cos x + \cos 5x + \cos 9x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

 a) 3° b) 4° c) 5°
 d) 6° e) 9°
- Transforme a producto:
 $C = \sin 2x + \sin 6x + \sin 10x + \sin 14x$
 a) $\sin 8x \cos 4x \cos 2x$
 b) $2 \sin 8x \cos 4x \cos 2x$
 c) $4 \sin 8x \cos 4x \cos 2x$
 d) $8 \sin 8x \cos 4x \cos 2x$
 e) $16 \sin 8x \cos 4x \cos 2x$
- En un triángulo ABC, reducir: $L = \frac{\sin 2A + \sin 2C}{\cos 2A + \cos 2C}$
 a) $\tan A$ b) $-\tan B$ c) $\cot B$
 d) $-\cot B$ e) $-\tan A \cdot \tan C$
- Señale el valor máximo de:
 $C = \sin (40^\circ + x) + \sin (20^\circ - x)$
 a) 1 b) 2 c) $\sqrt{3}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
- Señale el valor máximo de:
 $L = \sin (50^\circ + x) + \sin (x - 10^\circ)$
 a) 1 b) 2 c) $\sqrt{3}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
- Calcule el valor de: $E = \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ$
 a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$
 d) 2 e) $\frac{3}{4}$
- Siendo: $\frac{\sin 7x + \sin x}{\sin 5x + \sin 3x} = \frac{1}{3}$. Halla el valor de:

$$\frac{\sin 6x (\sin 10x + \sin 6x)}{\sin^2 7x - \sin^2 x}$$

 a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{3}$
- Transformar a producto la expresión:
 $E = \sin A + \sin 2A + \sin 3A$
 a) $4 \sin \frac{3A}{2} \cos \frac{A}{2} \cos A$
 b) $\sin A \cos \frac{3A}{2}$
 c) $2 \cos \frac{3A}{2} \sin A \sin \frac{A}{2}$
 d) $4 \cos \frac{3A}{2} \sin A \sin \frac{A}{2}$
 e) $3 \cos \frac{3A}{2} \cos 2A \cos A$
- Simplificar:
 $L = \frac{\sin 2A - \sin 2B}{\sin (A - B)}$
 a) $2 \cos C$ a) $-2 \cos C$ a) $2 \sin C$
 a) $-2 \sin C$ a) $-\cos C$
- La expresión:

$$\sin 4x + \frac{\sin^2 2x}{\cos x \sin x + \frac{\sin x}{\cos x + \tan x \sin x}}$$

 es igual a:
 a) $\tan x$ b) $\cos 2x \cos 3x$
 c) $2 \sin x \cos 3x$ d) $\sin 2x \sin 3x$
 e) $2 \sin 3x \cos x$
- Si: $\cos 2x \cos 4x \cos 8x = 0,5$. Calcule:
 $A = \frac{\tan 7x}{\tan 9x}$
 a) 0,6 b) 0,8 c) 1,6
 d) 1,8 e) 2,4
- En un triángulo ABC, simplificar:
 $E = \frac{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C}{\cos (A - B) - \cos C}$
 a) $\sin C$ b) $-\sin C$ c) $2 \sin C$
 d) $-2 \sin C$ e) 1

Tarea domiciliaria

- Simplificar: $E = \frac{\sin 7x - \sin x}{\cos 7x + \cos x}$
 - $\tan x$
 - $\tan 3x$
 - $\tan 5x$
 - $\operatorname{ctg} 5x$
 - $\operatorname{ctg} 3x$
- Simplificar: $E = \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos^2 x}$
 - $2 \sin x$
 - $2 \cos x$
 - 4
 - $4 \sin x$
 - $4 \cos x$
- Simplificar: $E = \frac{\sin 5x + \sin 10x + \sin 15x}{2 \cos 5x + 1}$
 - $\sin 5x$
 - $\sin 10x$
 - $\sin 15x$
 - $\cos 5x$
 - $\cos 15x$
- Reducir: $E = (\sin 20^\circ + \cos 20^\circ) \cdot \sec 25^\circ$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - 2
 - $\frac{1}{2}$
 - $\sqrt{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- Reducir: $E = 2(\cos 5x + \cos 3x)(\sin 3x - \sin x)$
 - $\sin 2x$
 - $\sin 4x$
 - $\sin 6x$
 - $\sin 8x$
 - $\sin 16x$
- Reducir: $E = \cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ$
 - 0
 - $2 \sin 10^\circ$
 - $2 \cos 10^\circ$
 - $\sin 10^\circ$
 - $\cos 10^\circ$
- En un triángulo ABC, si: $A - B = \frac{\pi}{3}$. Reducir:
 $E = \sin 2A + \sin 2B$
 - $\sin A$
 - $\sin B$
 - $\sin C$
 - $\cos C$
 - $\cos A$
- Simplificar: $E = \frac{\cos(2a - 3b) + \cos 3b}{\sin(2a - 3b) + \sin 3b}$
 - $\tan a$
 - $\operatorname{ctg} a$
 - $\tan b$
 - $\operatorname{ctg} b$
 - $\tan a \cdot \tan b$
- Si: $24x \neq \pi$. Calcular: $E = \frac{\sin 9x + \sin 7x}{\cos 5x + \cos 3x}$
 - 1
 - -1
 - $\frac{1}{2}$
 - $-\frac{1}{2}$
 - 0

- Señale la extensión: $E = \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 2x}$
 - $<-2; 2>$
 - $[-2; 2]$
 - $<-1; 0> \cup <0; 1>$
 - $[-1; 1]$
 - $<-2; 0> \cup <0; 2>$
- Factorizar: $E = 1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A$
 - $2 \cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A$
 - $2 \cos A \cdot \cos 3A \cdot \cos 5A$
 - $4 \cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A$
 - $4 \cos A \cdot \cos 3A \cdot \cos 5A$
 - $\frac{1}{4} \cos A \cdot \cos 3A \cdot \cos 5A$
- Simplificar: $E = \frac{\sin^2 9x - \sin^2 3x}{\sin 6x}$
 - 1
 - $\sin 9x$
 - $\sin 3x$
 - $\sin 12x$
 - $\cos 6x$
- Factorizar: $E = 1 + \cos 4x + \cos 8x + \cos 12x$
 - $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$
 - $4 \cos x \cos 3x \cos 5x$
 - $4 \cos 2x \cos 4x \cos 6x$
 - $4 \cos 2x \cos 3x \cos 4x$
 - $4 \cos 3x \cos 4x \cos 5x$
- Factorizar: $E = 3 + 5 \sin 13^\circ$
 - $5 \sin 25^\circ \cdot \cos 12^\circ$
 - $10 \sin 25^\circ \cdot \cos 12^\circ$
 - $10 \sin 50^\circ \cdot \cos 24^\circ$
 - $5 \cos 50^\circ \cdot \sin 12^\circ$
 - $10 \sin 25^\circ \cdot \cos 6^\circ$
- Simplificar: $E = \frac{a \cdot \sin 7x + b \cdot \sin 3x - a \cdot \sin x}{a \cdot \cos 7x + b \cdot \cos 3x + a \cdot \cos x}$
 - $\tan x$
 - $\tan 2x$
 - $\tan 3x$
 - $a \cdot b$
 - $\frac{a}{b}$

22

Transformaciones trigonométricas II

Identidades para el producto a suma y diferencia de senos y cosenos ($A > B$) :

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$$

$$2 \operatorname{sen} B \cdot \cos A = \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)$$

$$2 \cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

Ejemplo Convertir:

a) $2 \operatorname{sen} 20^\circ \cdot \cos 10^\circ =$

b) $2 \cos 4x \cdot \cos x =$

c) $2 \operatorname{sen} 9x \cdot \operatorname{sen} x =$

d) $2 \cos 3\theta \cdot \operatorname{sen} \theta =$

e) $\operatorname{sen} 4\alpha \cdot \cos 3\alpha =$

Ejercicios Resueltos:

1. Reducir: $J = \frac{\operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} x + \cos 7x \cdot \cos x}{\cos 6x}$

a) $\cos x$

b) $2 \cos x$

c) $\cos 2x$

d) $2 \cos 2x$

e) $\cos 4x$

Resolución

En la expresión: $J = \frac{\operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} x + \cos 7x \cdot \cos x}{\cos 6x}$

multiplicamos x 2: $2J = \frac{2 \operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cos 7x \cdot \cos x}{\cos 6x}$

transformando: $2J = \frac{\cos(5x-x) - \cos(5x+x) + \cos(7x+x) + \cos(7x-x)}{\cos 6x}$

$2J = \frac{\cos 4x - \cancel{\cos 6x} + \cos 8x + \cancel{\cos 6x}}{\cos 6x} \Rightarrow 2J = \frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 6x}$

Transformando a producto: $\cos 8x + \cos 4x = 2 \cos\left(\frac{8x+4x}{2}\right) \cos\left(\frac{8x-4x}{2}\right) = 2 \cos 6x \cdot \cos 2x$

$2J = \frac{2 \cancel{\cos 6x} \cdot \cos 2x}{\cancel{\cos 6x}} \Rightarrow J = \cos 2x$



2. Reducir: $J = \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 6x \cdot \sin x - \cos 4x \cdot \cos x$

- a) $\cos x$ b) $\cos 2x$ c) $-\cos x$ d) $-\cos 2x$ e) 0

Resolución

En la expresión: $J = \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 6x \cdot \sin x - \cos 4x \cdot \cos x$

Multipliquemos x 2: $2J = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 6x \cdot \sin x - 2 \cos 4x \cdot \cos x$

Transformando: $2J = \cos 7x + \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x - (\cos 5x + \cos 3x)$

$2J = \cos 7x + \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x - \cos 5x - \cos 3x$

Reduciendo: $2J = 0 \Rightarrow \therefore J = 0$



3. En un triángulo ABC; transforme a suma o diferencia: $J = 4 \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C$

- a) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C$ b) $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C$
c) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$ d) $\sin 2B + \sin 2C - \sin 2A$
e) $\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A$

Resolución

Ordenando la expresión: $J = 4 \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C = 2 (2 \sin A \cdot \cos B) \cdot \cos C$

Transformando: $J = [\sin (A + B) + \sin (A - B)] \cos C$;

pero recuerde que: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \sin (A + B) = \sin C$;

luego:

$$J = 2 \{ \sin C + \sin (A - B) \} \cos C$$

$$J = 2 \sin C \cdot \cos C + 2 \sin (A - B) \cos C$$

$$J = \sin 2C + 2 \sin (A - B) \cos C$$

Pero como: $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \cos C = -\cos(A + B)$ (ángulos suplementarios)

$$J = \sin 2C + 2 \sin (A - B) [-\cos (A + B)]$$

$$J = \sin 2C - 2 \sin (A - B) \cos (A + B) \dots \alpha$$

Obs.

$$2 \sin (A - B) \cos (A + B) = \sin (A - B + A + B) + \sin (A - B - A - B)$$

$$2 \sin (A - B) \cos (A + B) = \sin 2A + \sin (-2B) \Rightarrow 2 \sin (A - B) \cos (A + B) = \sin 2A - \sin 2B$$

En α :

$$J = \sin 2C - (\sin 2A - \sin 2B)$$

$$\Rightarrow \therefore J = \sin 2B + \sin 2C - \sin 2A$$



Práctica

1. Reducir: $E = 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 20^\circ$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Reducir: $A = 2 \cos 3x \cdot \sin x + \sin 2x$

- a) 1 b) -1 c) $\sin 2x$
d) $\sin 4x$ e) $\cos 2x$

3. Simplificar: $E = \frac{2 \sin 3x \cdot \cos x - \sin 4x}{2 \sin 2x \cdot \cos 4x - \sin 6x}$

- a) 1 b) -1 c) 0
d) $\sin 6x$ e) $\sin 4x$

4. Calcular: $R = \frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{2 \cos 35^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 25^\circ}$

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

5. Si se define la función: $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{9} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9} - x\right)$
Halle: $f_{\max}(x)$.

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

6. Si: $P(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \cos 4x - \sin x \cdot \cos 6x$
Calcule: $P\left(\frac{\pi}{30}\right)$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2
d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Calcular: $E = \frac{1 - 4 \cos 80^\circ \cdot \sin 70^\circ}{2 \cos 80^\circ}$

- a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) 1
d) $-\frac{1}{2}$ e) 0

8. Simplificar: $M = \frac{\cos 4\theta \cdot \cos 3\theta - \cos 5\theta \cdot \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

- a) 2 b) $\sin \theta$ c) $\cos \theta$
d) $\sin 2\theta$ e) $\cos 2\theta$

9. Reducir: $P = \frac{1}{2} \sec 80^\circ - 2 \sin 70^\circ$

- a) $\tan 10^\circ$ b) $\cot 10^\circ$ c) -1
d) 1 e) $\frac{1}{2} \cot 10^\circ$

10. Si "A" es agudo mide $\frac{\pi}{13}$ rad. Hallar el valor de:
 $F = \frac{\cos A \cdot \cos 10A}{\cos 2A + \cos 4A}$

- a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$

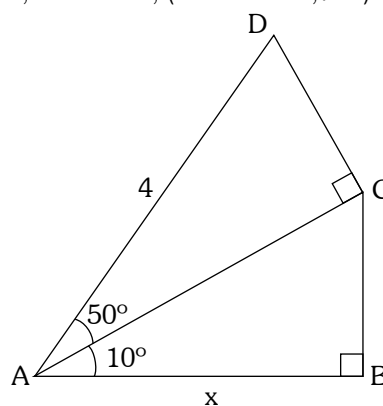
11. Si: $P(x) = \sin 2x + \sin 3x \cos 4x - \sin x \cos 6x$

Calcule:

$$P\left(\frac{\pi}{30}\right)$$

- a) 1 b) c) 2
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}/2$

12. Del gráfico, calcule "x", ($\cos 40^\circ = 0,766$)



- a) 2,532 b) 3,156 c) 2,216
d) 3,108 e) 2,748

13. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \sin 80^\circ - 2 \sin 70^\circ$$

- a) $\tan 10^\circ$ b) $\cot 10^\circ$ c) -1
d) 1 e) $\frac{1}{2} \cot 10^\circ$

14. Calcule el valor de:

$$M = \frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \frac{\sin 1}{\cos 3 \cdot \cos 4}$$

- a) $\tan 2$ b) $\tan 4$ c) $\tan 3$
d) $\tan 1$ e) $\tan 10$

15. Transforme a suma o diferencia de senos o cosenos:

$$J = 4 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$$

- a) $\sin 7x - \sin 5x + \sin 3x - \sin x$
b) $\sin 7x + \sin 5x - \sin 3x - \sin x$
c) $\sin 7x - \sin 5x - \sin 3x + \sin x$
d) $\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x$
e) $\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x - \sin x$

Tarea domiciliaria

- Reducir : $E = 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 40^\circ$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - 1
 - $\sqrt{3}$
 - 0
- Reducir: $E = 2 \cos 7x \cdot \cos 3x - \cos 10x$
 - $\cos 2x$
 - $\cos 4x$
 - $\sin 2x$
 - $\sin 4x$
 - 1
- Reducir: $E = 2 \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 40^\circ$
 - 1
 - $\sqrt{3}$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - 2
- Calcular: $E = 0,5 \sin 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 20^\circ$
 - 0,25
 - 0,50
 - 1
 - 2
 - 4
- Simplificar: $E = \frac{2 \sin 3x \cdot \cos x - \sin 4x}{2 \sin 2x \cdot \sin x + \cos 3x}$
 - 2
 - $\sin x$
 - $\cos x$
 - $2 \sin x$
 - $2 \cos x$
- Reducir: $E = 2 \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ - 2 \sin 80^\circ \cdot \cos 10^\circ$
 - 1
 - 1
 - $\frac{1}{2}$
 - $-\frac{1}{2}$
 - 0
- Si: $\cos x = \frac{2}{3}$. Calcular: $E = 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \frac{13}{9}$
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- Simplificar: $E = \frac{2 \cos 6x \cdot \cos x - \cos 7x}{2 \sin 7x \cdot \cos 2x - \sin 9x}$
 - $\tan x$
 - $\cotg x$
 - $\tan 5x$
 - $\cotg 5x$
 - 1
- Si: $\cos 2x = \frac{1}{5}$. Calcular: $E = \cos(30^\circ + x) \cdot \cos(30^\circ - x)$
 - $\frac{7}{10}$
 - $\frac{7}{5}$
 - $\frac{9}{20}$
 - $\frac{9}{25}$
 - $\frac{7}{20}$
- Si: $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Calcular: $E = \csc(\frac{\pi}{4} + x) \csc(\frac{\pi}{4} - x)$
 - $2\sqrt{3}$
 - $3\sqrt{2}$
 - $2\sqrt{2}$
 - $3\sqrt{3}$
 - $\sqrt{6}$
- Reducir:

$$E = 2 \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + 2 \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sqrt{3} \cos 50^\circ$$
 - 0
 - 1
 - 1
 - $\sqrt{3}$
 - $-\sqrt{3}$
- Reducir: $E = 0,5 \csc 10^\circ - 2 \cos 20^\circ$
 - 0
 - 1
 - 1
 - $\frac{1}{2}$
 - $-\frac{1}{2}$
- Reducir:

$$E = 2 \sin(x + y) \cdot \cos(2x - y) - \sin(2y - x)$$
 - $\sin 3x$
 - $\sin 2x$
 - $\sin x$
 - $-\sin 3x$
 - $-\sin 2x$
- Determine el máximo valor de:

$$E = 2 \sin 5x \cos 2x - \sin 3x$$
 - $\sqrt{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - 1
 - $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - 1
- Determine el máximo valor de:

$$E = \cos 2x \cos x - \frac{1}{2} \cos x$$
 - 0
 - 1
 - 2
 - 1
 - $\frac{1}{2}$
- Si: $A > B$. Determine: $\frac{A}{B}$, si:

$$\sin 5x \cdot \sin x + \cos 7x \cdot \cos x = \cos Ax \cdot \cos Bx$$
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 6
- Determine: $\cos(x + y)$. Si:

$$2 \cos 7x \cos 3x - \cos 10x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 5y - \sin 3y = \cos 5y + \cos 3y$$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $\frac{3}{5}$
 - $\frac{4}{5}$

23

Repaso

1. Siendo: $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$;

Calcular: " $\tan \frac{\alpha}{2}$ "

- a) $+\sqrt{\frac{3}{5}}$ b) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$
d) $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ e) $\sqrt{\frac{4}{5}}$

2. Si se cumple: $\sqrt{\frac{1-\cos 50^\circ}{1+\cos 50^\circ}} = \cot x$. Halle: " x ", si:
 $0^\circ < x < 90^\circ$.

- a) 65° b) 50° c) 25°
d) 55° e) 75°

3. Siendo: $\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{3}$; calcular " $\operatorname{sen} 2\beta$ "

- a) $\frac{\sqrt{2}}{27}$ b) $\frac{5}{27}$ c) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$
d) $\frac{13}{27}$ e) $\frac{23}{27}$

4. Si: $\cos \theta = \frac{1}{3}$, calcular " $\cos 2\theta$ "

- a) $\frac{19}{27}$ b) $-\frac{19}{27}$ c) $-\frac{7}{9}$
d) $-\frac{23}{27}$ e) $-\frac{17}{27}$

5. Hallar: $L = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$

- a) $\cos 2x$ b) $2 \cos 2x$ c) $4 \cos 2x$
d) 4 e) 2

6. Reducir: $E = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ + \cos 50^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$

- a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) 3

7. Simplificar: $E = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

- a) $\tan x$ b) $\tan 2x$ c) $\tan 3x$
d) $\tan 4x$ e) $\tan 5x$

8. Si el ángulo A mide: $\frac{\pi}{13}$ rad. Hallar el valor de:

$$F = \frac{\cos A \cdot \cos 10A}{\cos 2A + \cos 4A}$$

- a) 1 b) $-1/2$ c) $2/3$
d) $2/3$ e) $-3/2$

9. Simplificar: $P = 2 \operatorname{sen} 4x \cdot \cos x - \operatorname{sen} 5x$

- a) $\operatorname{sen} 4x$ b) $\operatorname{sen} 3x$ c) $\operatorname{sen} 2x$
d) $\operatorname{sen} x$ e) 1

10. Hallar " x ", si: $2 \cos 4x \cdot \cos 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- a) 1° b) 2° c) 3°
d) 5° e) 6°

11. Calcular: $E = \tan 7^\circ 30' + \cot 7^\circ 30'$

- a) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$
c) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ d) $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
e) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$

12. Simplificar:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 15x}{\cos 5x + \cos 10x + \cos 15x}$$

- a) 1 b) 2 c) $\operatorname{tg} 5x$
d) $\operatorname{tg} 10x$ e) $\operatorname{tg} 15x$

13. Transforme a producto:

$$R = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 11x$$

- a) $4 \cos x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 7x$
b) $2 \cos x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 7x$
c) $4 \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 7x$
d) $2 \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 7x$
e) $2 \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 7x$

14. Reducir:

$$P = \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cdot \operatorname{sen} 3x + \cos 7x}{2 \operatorname{sen} 4x \cdot \cos 2x - \operatorname{sen} 6x}$$

- a) $\frac{1}{2} \cos x$ b) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ c) $\frac{1}{2} \sec x$
d) $\frac{1}{2} \csc x$ e) $\frac{1}{2} \tan x$

15. Reducir:

$$P = \cos 5x \cdot \cos x + \operatorname{sen} \frac{5x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + \operatorname{sen} \frac{7x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{5x}{2}$$

- a) 0 b) $\cos x$ c) $\cos 2x$
d) $\cos 4x$ e) $\cos 6x$

Tarea domiciliaria

- Si $\tan 20^\circ = b$, entonces $E = \tan 55^\circ - \tan 35^\circ$ es igual a:
 - $2/b$
 - $1/b$
 - $b/2$
 - b
 - $2b$
- Señale un valor agudo de "x" que verifique: $(\csc 2x - \cot 2x)\csc x = 2$
 - 30°
 - 45°
 - 60°
 - 15°
 - 75°
- Si: $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, calcular " $\sin 3\alpha$ "
 - $\frac{51}{125}$
 - $\frac{61}{125}$
 - $\frac{71}{125}$
 - $\frac{31}{125}$
 - $\frac{41}{125}$
- Si: $\tan \theta = 2$, calcular " $\tan 3\theta$ "
 - $\frac{3}{11}$
 - $\frac{2}{11}$
 - $-\frac{2}{11}$
 - $-\frac{3}{11}$
 - $-\frac{5}{11}$
- Si: $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, calcular: $S = \sin 3\beta \cdot \csc \beta$
 - $\frac{7}{9}$
 - $\frac{17}{9}$
 - $\frac{19}{9}$
 - $\frac{5}{3}$
 - $\frac{7}{3}$
- Reducir: $C = \frac{\sin 4\beta + \sin 2\beta}{\cos 4\beta + \cos 2\beta}$
 - $\tan \beta$
 - $\tan 3\beta$
 - $\tan 2\beta$
 - $\cot 2\beta$
 - $\cot 3\beta$
- Al simplificar la expresión: $E = \frac{\sin 17^\circ + \cos 17^\circ}{\sin 31^\circ \cos 31^\circ}$ se obtiene.
 - $4\sqrt{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $\sqrt{2}$
 - $2\sqrt{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- Calcular "x", si: $\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x + \cos x} = \sqrt{3}$
 - 10°
 - 15°
 - 20°
 - 25°
 - 30°
- Reducir: $J = 2 \sin 3x \cdot \cos x - \sin 4x$
 - $\cos 2x$
 - $\cot 2x$
 - $\tan 2x$
 - $\sin 2x$
 - $\csc 2x$
- Reducir: $P = 2 \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 10^\circ$
 - 1
 - 2
 - $\sqrt{3}$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Simplificar: $J = \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \cos 4x + \sin x \cdot \cos 6x$
 - 0
 - $\sin x$
 - $\sin 5x$
 - $\sin 3x$
 - $\sin 7x$
- Si: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \wedge \cos \alpha = -\frac{3}{4}$
 Calcule: $E = \sqrt{7} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$
 - 0
 - 1
 - $\sqrt{2}$
 - 2
 - $2\sqrt{2}$
- Reducir: $H = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \cos 24^\circ}{2}}}{2}}$
 - $\cos 6^\circ$
 - $\sin 6^\circ$
 - $\sin 3^\circ$
 - $\cos 3^\circ$
 - $\sin 12^\circ$
- ¿A qué es igual: $E = \csc \frac{x}{4} - \cot \frac{x}{4}$?
 - $\tan \frac{x}{2}$
 - $\cot \frac{x}{2}$
 - $\tan \frac{x}{8}$
 - $\cot \frac{x}{8}$
 - $-\cot \frac{x}{8}$
- Convierta a producto:
 $E = \sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \sin 5^\circ + \sin 7^\circ$
 - $2 \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 8^\circ$
 - $2 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 8^\circ$
 - $4 \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \sin 8^\circ$
 - $4 \cos 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 8^\circ$
 - $4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 8^\circ$

24

Ecuaciones trigonométricas

¿Qué es una ecuación trigonométrica?

Es una igualdad en el cual la incógnita o variable angular está afectada por un operador trigonométrico (sen, cos, tan, ctg, ... arcsen, arccos, ... etc.) y que dicha igualdad se cumple para un conjunto determinado de valores que asume la incógnita.

A continuación indicar cuáles son ecuaciones trigonométricas :

- $\tan(3x) = \sqrt{3}$ _____
- $\cos x = x^3$ _____
- $\sin x = 0,5$ _____
- $x \sin x = 1$ _____
- $\tan(x + \frac{\pi}{9}) = -\sqrt{3}$ _____
- $\sin x = x$ _____
- $x^2 \sin x + 1 = 0$ _____
- $\csc(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ _____
- $\sin x + x = 0$ _____
- $2 \cos x + \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$ _____
- $\sqrt{3} \sin x = x^2$ _____
- $\cos^{-1} x = x$ _____
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ _____

Algunas definiciones

- a) **Conjunto Solución (C.S.) de una ecuación trigonométrica:** Es el conjunto de valores que satisfacen la ecuación.
- b) **Valor Principal (V. P.):** Es aquella que pertenece al rango de la función inversa dada en la ecuación trigonométrica elemental.

Fórmulas generales de las ecuaciones trigonométricas elementales

• $\sin x = a \Rightarrow Xg = k\pi + (-1)^k \arcsen a, k \in \mathbb{Z}$
• $\cos x = b \Rightarrow Xg = 2k\pi \pm \arccos b, k \in \mathbb{Z}$
• $\tan x = c \Rightarrow Xg = k\pi + \arctan c, k \in \mathbb{Z}$
• $\operatorname{ctg} x = d \Rightarrow Xg = k\pi + \operatorname{arccotg} d, k \in \mathbb{Z}$
• $\sec x = e \Rightarrow Xg = 2k\pi \pm \operatorname{arcsec} e, k \in \mathbb{Z}$
• $\csc x = f \Rightarrow Xg = k\pi + (-1)^k \operatorname{arccsc} f, k \in \mathbb{Z}$

Ejercicios Resueltos:

1. Resolver: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$. Indicando la suma de las tres primeras soluciones positivas.

a) 180°

b) 270°

c) 360°

d) 450°

e) 720°

Resolución

Del dato: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$

$$1 + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + \cos x$$

Quedaría: $2 \sin x \cdot \cos x = \cos x$

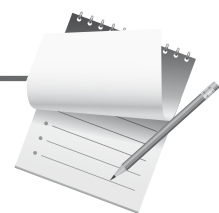
Reduciendo: $2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \therefore x = 30^\circ; 150^\circ; \dots$

Pero: $\cos x = 0$ (factor cancelado, se iguala a cero)

$$x = 90^\circ; 270^\circ; \dots$$

Las tres primeras soluciones serían:

$$30^\circ; 90^\circ; 150^\circ \rightarrow \therefore \Sigma = 270^\circ$$



2. Resolver: $1 + \cos x = 2 \sin^2 x$; indicando la suma de sus dos primeras soluciones positivas.

- a) 180° b) 120° c) 200° d) 240° e) 360°

Resolución

Como la variable es la misma, vamos a colocar todo en términos de una sola razón trigonométrica, así:

$$1 + \cos x = 2 \sin^2 x \Rightarrow 1 + \cos x = 2(1 - \cos^2 x)$$

factorizando:

$$1 + \cos x = 2(1 + \cos x)(1 - \cos x)$$

cancelando " $1 + \cos x$ ", quedaría: $1 = 2(1 - \cos x)$

$$1 = 2 - 2 \cos x \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 60^\circ; 300^\circ$$

Pero el factor cancelado se iguala a cero (0) para no perder soluciones: $1 + \cos x = 0$
 $\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ$

Las dos primeras soluciones positivas son: 60° y 180° .

$$\therefore \text{suma} = 240^\circ$$



3. Resolver: $\sin 3x \cdot \csc x = 2$; ($n \in \mathbb{Z}$)

- a) $n \neq \pm \frac{\pi}{6}$ b) $2n \neq \pm \frac{\pi}{3}$ c) $n \neq \pm \frac{\pi}{6}$ d) $n \neq \pm \frac{\pi}{12}$ e) $n \neq \pm \frac{\pi}{4}$

Resolución

En la ecuación recuerde: $\sin 3\theta = \sin \theta (2 \cos 2\theta + 1)$

$$\text{Luego: } \sin x (2 \cos 2x + 1) \cdot \csc x = 2;$$

$$\text{pero: } \sin x \cdot \csc x = 1$$

queda:

$$2 \cos 2x + 1 = 2 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x_p = \text{Arc cos } \frac{1}{2} \rightarrow x_p = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{luego: } x_g = 2n\pi \pm x_p; x_g = 2x$$

$$\rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$$



Práctica

- Resolver si: $x \in < 0; 2\pi >; 2 \sin x + \sqrt{3} = 0$.
Dar como respuesta la suma de soluciones.
a) 360° b) 420° c) 480°
d) 540° e) 600°
- Resolver si: $x \in < 0; 2\pi >; \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$
Dar como respuesta la suma de soluciones.
a) 360° b) 420° c) 480°
d) 540° e) 600°
- Resolver, si: $x \in < 0; \pi >; \sin 2x = \cos x$
Dar como respuesta la suma de soluciones.
a) 120° b) 180° c) 240°
d) 270° e) 360°
- Calcular la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación: $2 \cos 2x + 4 \cos x = -3$.
a) 360° b) 480° c) 540°
d) 780° e) 840°
- Si "x" es la medida de un ángulo agudo, hallar dicho valor en la ecuación: $\sin x + \sin 3x = \cos x$
a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{12}$
d) $\frac{\pi}{13}$ e) $\frac{\pi}{18}$
- Resolver: $4 \cos x - 3 \sec x = 2 \tan x$
a) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$
b) $k\pi - (-1)^k \frac{3\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$
c) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$
d) $2k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$
e) $k\pi - (-1)^k \frac{3\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$
- Resolver: $\frac{1}{\sec 2x + \tan 2x} + \frac{1}{\sec 2x - \tan 2x} = 4$
a) 60° b) 120° c) 300°
d) 330° e) 360°
- Resuelva: $\cos(3x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
a) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{18}; k \in \mathbb{Z}$
b) $k\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{18}; k \in \mathbb{Z}$
c) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{18}; k \in \mathbb{Z}$
d) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
e) $2k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$
- Resolver: $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \cos 2x$
Dar como respuesta la suma de las soluciones comprendidas en $[0; 2\pi >$.
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{2}$
d) $\frac{7\pi}{2}$ e) $\frac{9\pi}{2}$
- Resolver: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$
a) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$
c) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$
e) $n\pi$
- Resolver:
 $\frac{\sin 7x + \sin 3x}{\cos 7x + \cos 3x} = \sqrt{3}$
a) $n\pi + \frac{\pi}{3}$ b) $\frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{15}$
c) $n\pi + \frac{\pi}{15}$ d) $\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{15}$
e) $n\pi + \frac{\pi}{6}$
- Resolver: $\cos 3x + \cos x = 0$
a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{8}$ d) a y b
e) a y c
- Resolver: $\cos 3x - \cos 5x = 0$
a) $\frac{n\pi}{4}$ b) $\frac{n\pi}{3}$ c) $\frac{n\pi}{2}$
d) $\frac{4n\pi}{3}$ e) $\frac{n\pi}{6}$
- Resolver: $\sin^2 6x = \frac{1}{4}$
a) $\frac{n\pi}{6} \pm \frac{\pi}{10}$ b) $\frac{n\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}$ c) $\frac{n\pi}{6} \pm \frac{\pi}{30}$
d) $\frac{n\pi}{6} \pm \frac{\pi}{36}$ e) $\frac{n\pi}{6} - \frac{\pi}{5}$
- Resolver: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, e indicar la menor solución positiva
a) 15° b) 30° c) 45°
d) 53° e) 60°

Tarea domiciliaria

1. Resolver: $2 \sin(x + 12^\circ) + 1 = 0$
 - a) 190° b) 194° c) 198°
 - d) 199° e) 203°
2. Resolver: $\sec(2x - 45^\circ) = \sqrt{2}$; $x \in [180^\circ; 360^\circ >$
 - a) 45° b) 30° c) 180°
 - d) 225° e) 315°
3. Señale un valor de "x" agudo que cumpla:
 $\sin x \cot x + \cos x = 1$
 - a) 30° b) 45° c) 60°
 - d) $22^\circ 30'$ e) $67^\circ 30'$
4. Resolver: $\sin 2x = 2 \sin x$
 - a) 10° b) 15° c) 30°
 - d) 90° e) 0°
5. Resolver: $\sec x = 4 \sin x$
 - a) 30° b) 60° c) 15°
 - d) 45° e) 53°
6. Resolver: $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \sqrt{3}$
 - a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 - d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{8}$
7. Resolver: $2 \sin^2 x = \cos 2x$
 - a) 10° b) 20° c) 30°
 - d) 45° e) 15°
8. Encuentra la menor solución positiva de la ecuación:
 $\csc x - \sin x = \cos x$
 - a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 - a) $\frac{\pi}{2}$ a) $\frac{\pi}{5}$
9. Resolver: $\cot x - \tan x = 2\sqrt{3}$
 - a) 10° b) 20° c) 15°
 - d) 75° e) 30°
10. Halle el menor valor positivo que toma "x" en la ecuación: $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = 8$
 - a) 30° b) 20° c) 40°
 - d) 10° e) 50°
11. Hallar la solución principal de:
 $\tan(2x + 10^\circ) - \sqrt{3} = 0$
 - a) 15° b) 25° c) 35°
 - d) 45° e) 65°
12. Hallar la solución principal de: $3 \tan 3x + \sqrt{3} = 0$
 - a) -30° b) -10° c) 10°
 - d) 30° e) 150°
13. Resolver $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$ y señalar la menor solución positiva.
 - a) 15° b) 30° c) 37°
 - d) 45° e) 90°
14. Si $0^\circ < x < 360^\circ$, hallar el número de soluciones de:
 $\tan 2x = 3 \tan x$.
 - a) 4 b) 5 c) 6
 - d) 7 e) 8
15. Hallar la solución principal en: $\tan x + \cot x = 4$.
 - a) 10° b) 15° c) 18°
 - d) 20° e) 30°
16. Si $0^\circ < x < 360^\circ$, hallar el número de soluciones de:
 $\tan^2 x - \tan x = 0$
 - a) 2 b) 3 c) 4
 - d) 5 e) 6

25

Resolución de triángulos oblicuángulos

Teorema de los senos

En todo triángulo se cumple que sus lados son proporcionales al seno del ángulo al cual se oponen; siendo la constante de proporcionalidad el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

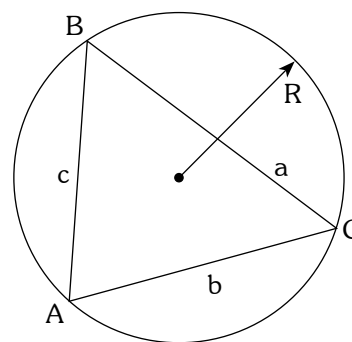
En el gráfico, se cumple :

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

R: circunradio

De donde:

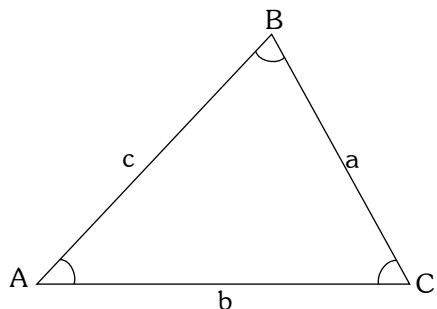
$$\begin{array}{ll} \text{I. } a = 2R \text{ sen } A & \text{II. } a \text{ sen } B = b \text{ sen } A \\ b = 2R \text{ sen } B & b \text{ sen } C = c \text{ sen } B \\ c = 2R \text{ sen } C & c \text{ sen } A = a \text{ sen } C \end{array}$$



Teorema de los cosenos

En todo triángulo se cumple que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos; menos el doble producto de los mismos multiplicados por el coseno del ángulo que forman dichos lados.

Del gráfico



$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array}$$

De donde: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C)$

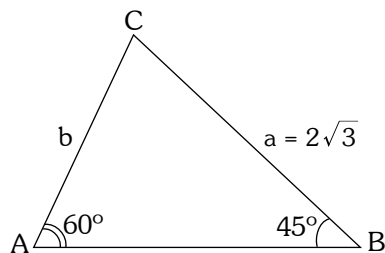
Ejercicios Resueltos:

1. En un triángulo ABC: $a=2\sqrt{3}$, $\angle A=60^\circ$; $\angle B=45^\circ$. Calcular "b".

- a) 1 b) 2 c) 3 d) -2 e) 4

Resolución

Del gráfico:



Se tiene que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Reemplazando valores:

$$b = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rightarrow \therefore b = 2\sqrt{2}$$

2. En un triángulo ABC; simplificar: $E = \frac{a \sin B + b \sin A}{a \sin C + c \sin A}$; si: $b = 3c$

- a) 3 b) 6 c) 9 d) 2 e) 1

Resolución

Por propiedad: $\left. \begin{array}{l} a \sin B = b \sin A \\ a \sin C = c \sin A \end{array} \right\}$

$$E = \frac{b \sin A + b \sin A}{c \sin A + c \sin A} = \frac{2b \sin A}{2c \sin A} \rightarrow E = \frac{b}{c}$$

$$\text{pero: } b = 3c \rightarrow E = \frac{3c}{c} \rightarrow \therefore E = 3$$

3. En un triángulo ABC; reducir: $J = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$, si su circunradio es "R".

- a) R b) 2R c) 4R d) $\frac{R}{2}$ e) $\frac{R}{4}$

Resolución

Sabemos que: $a=2R \sin A$; $b=2R \sin B$; $c = 2R \sin C$

$$\text{Luego: } J = \frac{2R \sin A \cos A + 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$J = \frac{R \sin 2A + R \sin 2B + R \sin 2C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$J = \frac{R (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

Pero, como: $A + B + C = 180^\circ$; por propiedad:

$$\rightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$J = R \frac{4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \therefore J = 4R$$

Práctica

- En un triángulo ABC; se sabe que: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$; calcular:
 $J = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A}$
 a) 0,5 b) 0,6 c) 0,8
 d) 1,5 e) 1,3
- En un triángulo ABC, reducir:
 $L = \frac{a+b}{\text{sen } A + \text{sen } B} - \frac{c}{\text{sen } C}$
 a) R b) 2R c) R/2
 d) 0 e) 4R
- En un triángulo ABC, se sabe que: $m\angle A = 2m\angle C$; $a=3$ y $c=2$; calcular: " $\cos C$ ".
 a) 1/3 b) 1/4 c) 1/2
 d) 3/4 e) 3/8
- En un triángulo ABC; reducir:
 $L = \frac{a \text{ sen } B + b \text{ sen } A}{c \text{ sen } B + b \text{ sen } C}$; si: $a=3c$
 a) 6 b) 3 c) 1/6
 d) 1/3 e) 2
- En un triángulo ABC, se cumple: $a^2 + b^2 + c^2 = nR^2$ (R: circunradio). Hallar: $L = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$
 a) $\frac{3-n}{2}$ b) $\frac{12-n}{4}$ c) $\frac{6-n}{2}$
 d) $\frac{4-n}{2}$ e) $\frac{12-n}{2}$
- En un triángulo ABC; $a=2$, $c=3$; $m\angle B = 60^\circ$. Calcular: " b "
 a) 7 b) 5 c) $\sqrt{5}$
 d) $\sqrt{7}$ e) $3\sqrt{3}$
- En un triángulo ABC: $a=2$; $b=3$; $c=4$. Calcule: " $\cos A$ ".
 a) 3/5 b) 4/5 c) 3/8
 d) 7/8 e) 5/9
- En un triángulo ABC; $a=3$; $b=4$; $m\angle C = 120^\circ$. Calcular: " c ".
 a) $\sqrt{19}$ b) $\sqrt{26}$ c) $\sqrt{37}$
 d) $\sqrt{43}$ e) $\sqrt{52}$
- En un triángulo ABC, reducir: $L = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$
 a) $\cos A$ b) $2 \cos A$ c) $-\cos A$
 d) $-2 \cos A$ e) -1
- En un triángulo ABC; se sabe que:
 $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Calcular: " $m\angle C$ ".
 a) 60° b) 30° c) 45°
 d) 120° e) 150°
- En un triángulo ABC; $a^2 = b^2 + c^2 + bc$
 Hallar: $\angle A$
 a) 60° b) 120° c) 135°
 d) 150° e) 30°
- En un triángulo ABC; simplificar:
 $E = \frac{a \cos A \cdot \csc 2A}{b \cos B \cdot \csc 2B}$
 a) b b) a c) c
 d) 0 e) 1
- En un triángulo ABC; $a=6$ y $\angle A = 30^\circ$. ¿Cuánto mide el circunradio del triángulo ABC?
 a) 2 b) 3 c) 6
 d) 9 e) 10
- En un triángulo ABC; $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$. Calcular: $\angle C$
 a) 60° b) 120° c) 135°
 d) 30° e) 45°
- En un triángulo ABC, se cumple que: $a^2 + b^2 + c^2 = 10$
 Hallar: $E = bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C$
 a) 10 b) 20 c) 7,5
 d) 15 e) 5

Tarea domiciliaria

1. En un triángulo ABC: $\angle A = 30^\circ$; $\angle C = 45^\circ$ y $c = 2$. Calcular "a".

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 4
d) 1 e) $4\sqrt{2}$

2. En un triángulo ABC; $\angle A = 60^\circ$; $a = 2$ y $b = 1$. Calcular " $\angle B$ ".

a) $\arcsen \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\arcsen -\frac{\sqrt{3}}{4}$
c) $\arcsen \frac{1}{3}$ d) $\arcsen \frac{1}{4}$
e) 30°

3. En un triángulo ABC: $a = 2$ y $b = 3$.

$$\text{Calcular: } Q = \frac{\sen B + \sen A}{\sen B - \sen A}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{5}{3}$ e) 5

4. En un triángulo ABC, reducir: (R: circunradio).

$$Q = a(\sen B - \sen C) + b(\sen C - \sen A) + c(\sen A - \sen B)$$

a) R b) 2R c) 0
d) $\frac{R}{2}$ e) 1

5. En un triángulo ABC; (R : circunradio).

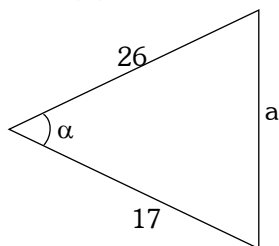
$$a^2 + b^2 + c^2 = nR^2. \text{ Hallar: } Q = \sen^2 A + \sen^2 B + \sen^2 C$$

a) n b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{n}{4}$
d) $\frac{3n}{4}$ e) $\frac{3n}{2}$

6. En un triángulo ABC: $a = 3$; $c = 2$ y $\angle B = 60^\circ$. Calcular: " b ".

a) 7 b) 19 c) $\sqrt{19}$
d) $\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{6}$

7. En la figura, $\tan \alpha = 2,4$, el valor de "a" es:



a) 24 b) 25 c) 27
d) 21 e) 23

8. Los lados de un triángulo miden x , ax , $2ax$. Calcule el valor de "a" sabiendo que el ángulo opuesto al lado "x" mide 120° .

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ c) $\frac{2}{\sqrt{7}}$
d) $\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{7}$

9. Tres lados de un triángulo están expresados por tres números enteros consecutivos: $x-1$; x ; $x+1$. El ángulo más grande es el doble del más pequeño. ¿Cuál es el coseno del ángulo pequeño?

a) $\frac{x-1}{2(x+1)}$ b) $\frac{x+1}{5(x-1)}$
c) $\frac{x+3}{2(x-1)}$ d) $\frac{x+1}{2(x-1)}$
e) $\frac{x+1}{2(x-1)^2}$

10. En un triángulo ABC: $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 53^\circ$ y $a = 5$. Calcular "b".

a) 6 b) 8 c) 10
d) 4 e) $6\sqrt{2}$

11. En un triángulo ABC: $a = 2$; $c = 3$ y $\angle C = 53^\circ$. Calcular " $\angle A$ ".

a) $\arcsen \frac{1}{5}$ b) $\arcsen \frac{2}{15}$
c) $\arcsen \frac{8}{15}$ d) $\arcsen \frac{12}{13}$
e) $\arcsen \frac{4}{15}$

12. En un triángulo ABC: $a = 3$ y $b = 4$. Calcular:

$$Q = \frac{2 \sen B + \sen A}{2 \sen B - \sen A}$$

a) 1,2 b) 2,1 c) 2,2
d) 2,3 e) 2,4

13. En un triángulo ABC, reducir:

$$Q = \frac{a \sen B + b \sen A}{a \sen C + c \sen A}$$

a) $\frac{\sen B}{\sen C}$ b) $\frac{\sen A}{\sen C}$ c) $\frac{\sen C}{\sen A}$
d) $\frac{\sen C}{\sen B}$ e) $\frac{\sen A}{\sen B}$

14. En un triángulo ABC: (R: circunradio)

$$ab + bc + ca = nR^2. \text{ Hallar:}$$

$$Q = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C (\csc A + \csc B + \csc C)$$

- a) n b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{n}{4}$
d) $\frac{3n}{2}$ e) $\frac{3n}{4}$

15. En un triángulo ABC: $a=2$; $b=5$ y $\angle C=53^\circ$. Calcular "c".

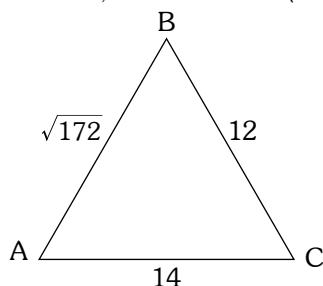
- a) 7 b) $\sqrt{7}$ c) 17
d) $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{23}$

16. En un triángulo ABC se cumple:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sqrt{3} \cos C}. \text{ Hallar el mayor ángulo.}$$

- a) 35° b) 45° c) 55°
d) 65° e) 75°

17. Del gráfico mostrado, determine: $\sec(A+B)$



- a) -1 b) -3 c) $\sqrt{3}$
d) -2 e) 2

18. En un triángulo ABC: $a^2 + b^2 + c^2 = mR^2$; (R: circunradio). Hallar: $Q = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$.

- a) $\frac{3-m}{2}$ b) $\frac{m-3}{2}$ c) $\frac{m-6}{2}$
d) $\frac{6-m}{2}$ e) $\frac{3+m}{2}$

19. En un triángulo ABC, reducir:

$$J = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2} \right) \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 \cos B \cdot \cos C} \right)$$

- a) $\sec A$ b) $2 \sec A$ c) $3 \sec A$
d) $4 \sec A$ e) $5 \sec A$

20. En un triángulo ABC:

$$\frac{b - a \cos C}{c} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{a - b \cos C}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Hallar: } \angle C$$

- a) 45° b) 75° c) 60°
d) 30° e) 15°

26 y 27

Funciones trigonométricas I y II

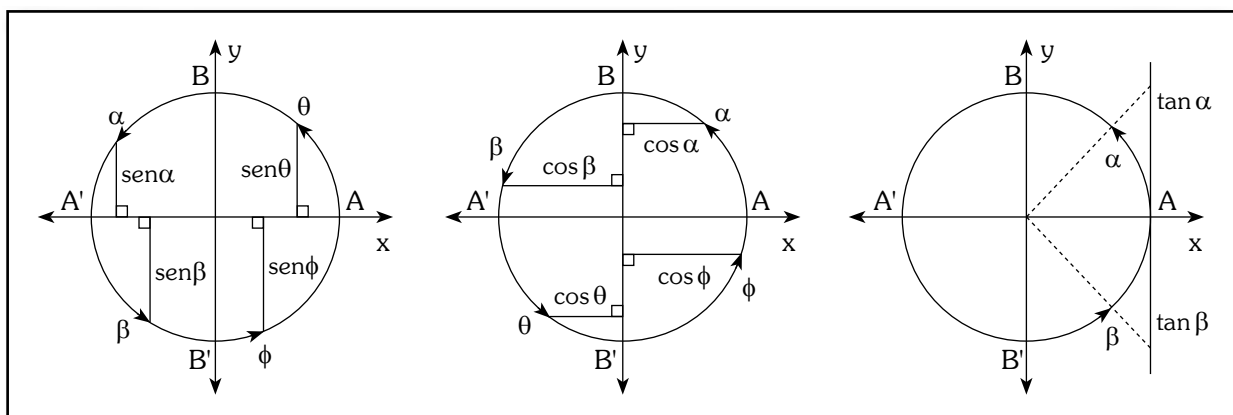
Definición de función trigonométrica

$$F.T. = \{ (x; y) / y = R.T.(x); x \in D(F.T.) \}$$

Por ejemplo: F.T.(tangente) = $\{ (x; y) / y = \tan x; x \in D(\tan) \}$

Si queremos algunos pares ordenados: $F.T.(\tan) = \left\{ (0; 0), \left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3}\right), \dots \right\}$

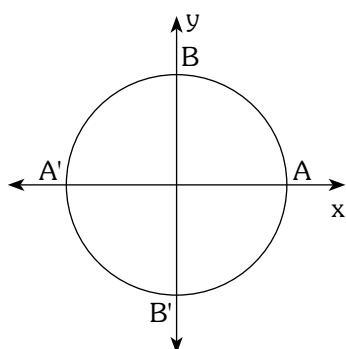
Consideración I: Para el análisis de cada una de las funciones trigonométricas, tendremos que recordar las representaciones, en la circunferencia trigonométrica, de las Razones Trigonómicas, así como algunas propiedades adicionales.



Cuadro de Variaciones I

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\sin \theta$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\cos \theta$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\tan \theta$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$

Además, no olvide que en la circunferencia trigonométrica mostrada, los arcos con extremo en:



A es de la forma : $2n\pi; n \in \mathbb{Z}$

B es de la forma: $(4n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

A' es de la forma: $(2n+1)\pi; n \in \mathbb{Z}$

B' es de la forma: $(4n+3)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

Pero si debido a alguna condición; puede estar ubicado en:

A o A' ; es de la forma: $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

B o B' ; es de la forma: $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

A, A' ; B o B' ; es de la forma: $\frac{n\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por ejemplo: si nos pidiesen hallar " α " que cumple:

$\sin \alpha = 0 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en A o A' $\therefore \alpha = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\sin \alpha = 1 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en B $\therefore \alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\cos \alpha = 0 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en B o B' $\therefore \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\cos \alpha = -1 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en A' $\therefore \alpha = (2n+1)\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

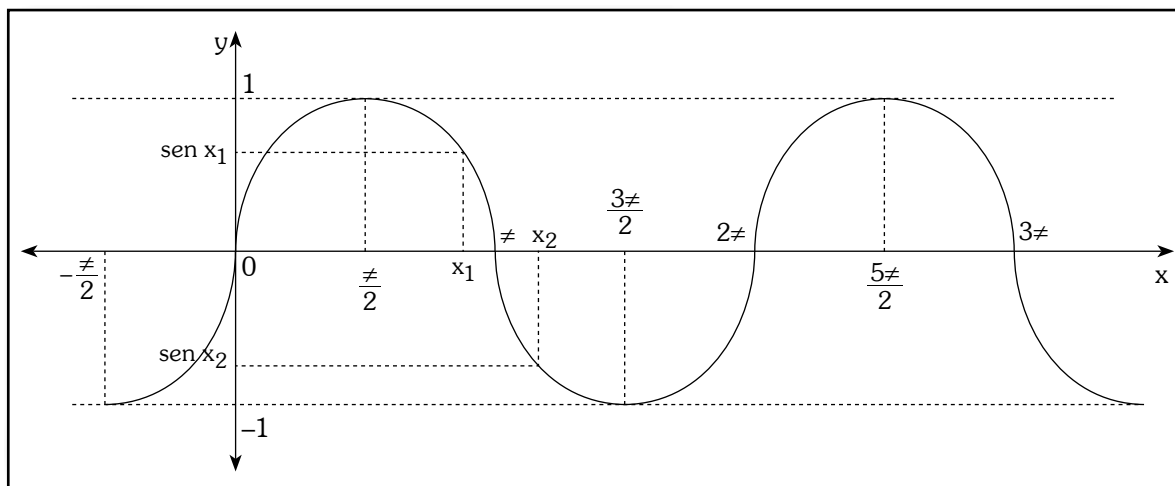
$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow$ " 2α " tiene su extremo en A o A' $\therefore 2\alpha = n\pi$; $\alpha = \frac{n\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Análisis de las funciones trigonométricas

III. Función trigonométrica seno

$$F.T. (\sin) = \{ (x; y) / y = \sin x ; x \in D(\sin) \}$$

Por lo visto en la representación y de acuerdo al cuadro de variaciones, tenemos:



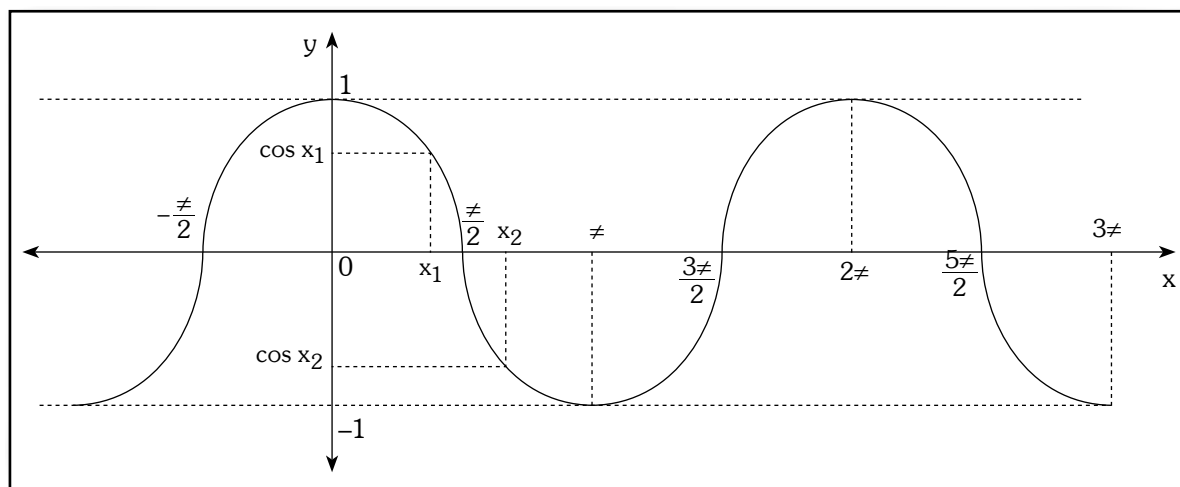
Gráfica que recibe el nombre de **senoide**; desde el cual podemos afirmar:

- $D(\sin) = \mathbb{R}$
- $R(\sin) = [-1; 1] \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow \text{min} \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \searrow \text{máx} \end{matrix}$
- Es una función continua en $\mathbb{R}$.
- Es una función creciente y decreciente.
- Es una función periódica: $T=2\pi$ (periodo principal)
- Es una función impar: $\sin(-x) = -\sin x$
- No es inyectiva.

IV. Función trigonométrica coseno

$$F.T. (\cos) = \{ (x; y) / y = \cos x ; x \in D(\cos) \}$$

Por lo visto en la representación y de acuerdo al cuadro de variaciones, tenemos:



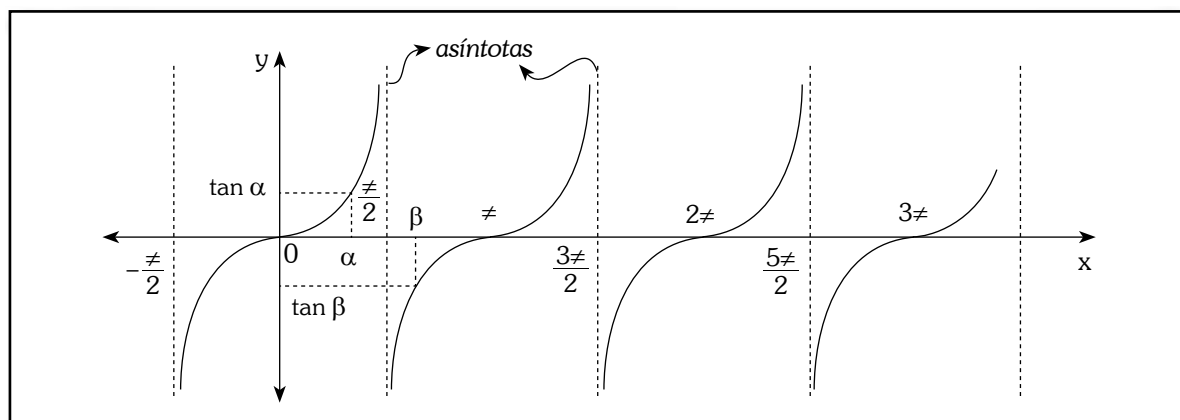
Gráfica que recibe el nombre de **cosinusoide**; desde el cual podemos afirmar:

- $D(\cos) = \mathbb{R}$
- $R(\cos) = [-1; 1] \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow \text{min} \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ \searrow \text{máx} \end{matrix}$
- Es una función continua en $\mathbb{R}$.
- Es una función creciente y decreciente.
- Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$
- Es una función periódica: $T=2\pi$ (periodo principal)
- No es inyectiva.

V. Función trigonométrica tangente

$$F.T. (\tan) = \{ (x; y) / y = \tan x ; x \in D(\tan) \}$$

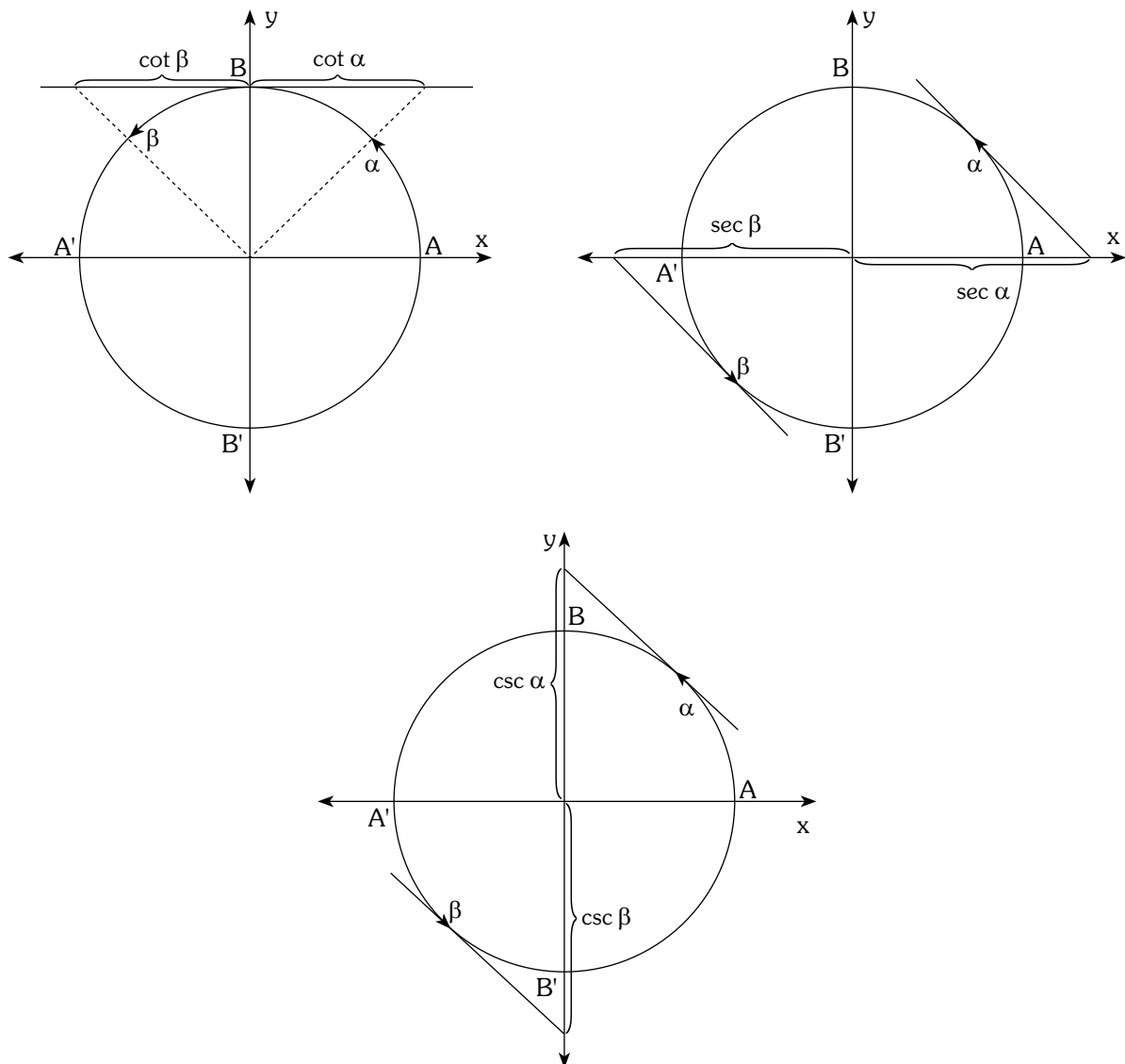
De acuerdo a la representación en la C.T. y el cuadro de variaciones; y con el detalle adicional que la tangente no se define para todo arco cuyo extremo coincide con B o B', (en la C.T.), es decir los arcos de la forma $(2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ no pertenecen al dominio de la función.



A la curva se le va a denominar **tangentoide**; y de allí podremos afirmar:

- $D(\tan) = \mathbb{R} - \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$
- $R(\tan) = \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < \tan x < +\infty$
- No se define en $(2n+1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$
- Es una función creciente en cada cuadrante.
- Es una función impar: $\tan(-x) = -\tan x$
- Es una función periódica: $T = \pi$ (período principal)
- No es inyectiva.

Consideración II:



Nótese de los gráficos, aparte de las representaciones de las R.T.; que la cotangente, secante y cosecante no se definen respectivamente, para arcos cuyo extremo coincide con:

$$A \text{ y } A' \Rightarrow n\pi; n \in \mathbb{Z}$$

$$B \text{ y } B' \Rightarrow (2n+1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$A \text{ y } A' \Rightarrow n\pi; n \in \mathbb{Z}$$

Ejercicios Resueltos:

1. Señale el dominio de la función: $y = \frac{3 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x + 1}$

a) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{4} \right\}$

b) $\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{4} \right\}$

c) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+1)\frac{\pi}{4} \right\}$

d) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+3)\frac{\pi}{4} \right\}$

e) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}$

Resolución

En este caso: $\operatorname{sen} 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x \neq -1$

(recuerda que en la C.T. en B': $\operatorname{sen} \theta = -1$)

$$2x \neq (4n+3)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (4n+3)\frac{\pi}{4}; \therefore D_y: \mathbb{R} - \left\{ (4n+3)\frac{\pi}{4} \right\}; n \in \mathbb{Z}$$

Rpta: **d**



2. Señale el dominio de la función: $y = \frac{3 \cos x + 1}{\cos 2x + 1}$

a) $\mathbb{R} - \{n\pi\}$

b) $\mathbb{R} - \{(2n+1)\pi\}$

c) $\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

d) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

e) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+3)\frac{\pi}{2} \right\}$

Resolución

En la función: $\cos 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow \cos 2x \neq -1$ (en A': $\cos \theta = -1$)

$$2x \neq (2n+1)\pi; x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore D_y = \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}; n \in \mathbb{Z}$$

Rpta: **c**



3. Señale el dominio de la función: $y = 2 \tan 2x + 1$.

a) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{4} \right\}$

b) $\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

c) $\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{4} \right\}$

d) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

e) $\mathbb{R} - \{(4n+1)\pi\}$

Resolución

En la función: $y = f(x) = 2 \tan 2x + 1$ (recuerde que: $\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$)

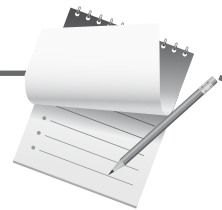
$$y = f(x) = \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + 1$$

Debe cumplirse: $\cos 2x \neq 0$ (en B y B': $\operatorname{sen} \theta = 0$)

$$2x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq (2n+1)\frac{\pi}{4} \rightarrow \therefore D_f: \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{4} \right\}, n \in \mathbb{Z}$$

Rpta: **c**



Práctica

- Siendo " D_f " y " R_f " dominio y rango de una función " f ". Indicar verdadero (V) o falso (F) en:
 - $F(x) = \sin \frac{x}{2}$; $D_f \in \mathbb{R} \wedge R_f \in [-1; 1]$
 - $F(x) = 7 \cos \frac{x}{3}$; $D_f \in \mathbb{R} \wedge R_f \in [-7; 7]$
 - $F(x) = \cos^2 x + 4$; $D_f \in \mathbb{R} \wedge R_f \in [4; 5]$
 - VFV
 - VFF
 - FFF
 - VVV
 - FFV
- Determine el dominio de la función:
 $G(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
 - R
 - $R - \{0\}$
 - $R - \{1\}$
 - $R - \{n\pi/n \in \mathbb{Z}\}$
 - $R - \{2\}$
- Calcule el dominio de la función:
 $f(x) = \frac{4}{\sin x} + 2$
 - $R - \left\{\frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
 - R
 - $R - \{0\}$
 - $R - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$
 - $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
- Señale el dominio de: $f(x) = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x + 1}$
 - $R - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$
 - $R - \{n\pi\}$
 - $R - \{(2n+1)\pi\}$
 - $R - \left\{(4n+3)\frac{\pi}{2}\right\}$
 - $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
- Señale el dominio de: $f(x) = \frac{3 \sin 2x + 1}{1 - \cos 4x}$
 - $R - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$
 - $R - \left\{(4n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$
 - $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$
 - $R - \{n\pi\}$
 - $R - \left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$
- Señale el dominio de: $h(x) = \frac{3 \cos x - 1}{1 - \sin 4x}$
 - $R - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$
 - $R - \{n\pi\}$
 - $R - \left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$
 - $R - \left\{(4n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$
 - $R - \{4n\pi\}$
- Si " f " es una función definida por:
 $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x + \frac{5}{2}$
 Calcule el valor de: $E = 2 f_{\max} + 4 f_{\min}$
 - 14
 - 15
 - 16
 - 17
 - 18
- Determine el rango de:
 $g(x) = 2 (\sin x - 1) + 3 (\cos x + 1)$
 - $[-1 - \sqrt{13}; -1 + \sqrt{13}]$
 - $[-1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}]$
 - $[-3 - \sqrt{13}; 3 + \sqrt{13}]$
 - $[3 - \sqrt{13}; 3 + \sqrt{13}]$
 - $[1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}]$
- Si consideramos M el valor máximo que asume la función: $f(x) = (3 - \sin x)(3 + \sin x)$ y N el valor mínimo que asume la función:
 $g(x) = (\cos x - \frac{1}{3})(\cos x + \frac{1}{3})$
 Luego: M . N, resulta:
 - 8
 - 8
 - 1
 - 1
 - 0
- Señale el rango de: $F(x) = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$
 - $[-1; 1]$
 - $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
 - $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$
 - $[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}]$
 - $[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}]$
- Señale el rango de: $f(x) = 5 \sin^2 x + 7 \cos^2 x$
 - $[5; 6]$
 - $[5; 7]$
 - $[6; 7]$
 - $[4; 7]$
 - $[3; 5]$
- Señale el rango de: $g(x) = 7 \sin^2 x - 2 \cos^2 x$
 - $[-2; 7]$
 - $[-7; 2]$
 - $[-2; 5]$
 - $[-7; 5]$
 - $[-5; 2]$
- Señale el rango de la función: $y = g(x) = 5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x$
 - $[-3; 5]$
 - $[-2; 3]$
 - $[-1; 2]$
 - $[-5; 3]$
 - $[-3; 2]$
- Señale el rango de la función: $y = 2 \sin x + \cos x$
 - $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$
 - $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
 - $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
 - $[-5; 5]$
 - $[-2; 2]$
- Señale el rango de:
 $f(x) = \sqrt{5} \cdot \sin x - 2 \cos x + 1$
 - $[1; 2]$
 - $[-2; 4]$
 - $[-2; 2]$
 - $[-4; 4]$
 - $[0; 4]$

Tarea domiciliaria

- Halle el rango de: $y = f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 1$
- Halle el rango de: $y = f(x) = 7 \operatorname{sen} 5x + 1$
- Halle el rango de: $y = f(x) = 4 \cos x - 1$
- Halle el rango de: $y = f(x) = 6 \cos 4x - 5$
- Si: $x \in \text{IIIC}$. Hallar el rango de: $y = f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3$
- Si: $x \in \text{IIIC}$. Hallar el rango de: $y = f(x) = 3 \cos x + 2$
- Hallar el rango de: $y = f(x) = 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 x$
- Hallar el rango de: $y = f(x) = 5 \operatorname{sen}^2 x + 4 \cos^2 x$
- Hallar el rango de: $y = f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$
- Hallar el rango de: $y = f(x) = 2 \cos x - 3 \operatorname{sen} x$
- Hallar el dominio de la función:

$$y = f(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{2}{x} \right) + 1$$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = 2 \cos \left(\frac{5}{2x} \right) - 4$$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{3}{\operatorname{sen} x + 1}$$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{\cos 5x}{\operatorname{sen} x - 1} + 2$$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{1}{\cos 4x - 1}$$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{3}{\cos 6x + 1}$$

- Hallar el dominio de: $y = f(x) = 3 \tan 2x$

- Hallar el dominio de: $y = f(x) = 5 \sec 3x$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{1}{\cos x + 1} + \cot 3x$$

- Hallar el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x - 1} + \tan 4x$$

28

Repaso

1. Resolver:

$$\frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\cos x + \csc x} = \sqrt{3}$$

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$
 c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{4}$
 e) $\frac{\pi}{2}$

2. Resolver:

$$3 \sqrt{\frac{\sec x - \cos x}{\csc x - \sin x}} = 1$$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$
 d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{12}$

3. Resolver:

$$\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 15x}{\cos 5x + \cos 10x + \cos 15x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{60}$ c) $\frac{\pi}{30}$
 d) $\frac{\pi}{120}$ e) $\frac{\pi}{180}$

4. Señale un valor agudo de "x" que cumpla:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cot x + \cos x = 1$$

- a) 30° b) 45° c) 60°
 d) $22^\circ 30'$ e) $67^\circ 30'$

5. Señale un valor de "x" que verifique:

$$3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = 5$$

- a) 30° b) 45° c) 37°
 d) 53° e) 60°

6. Una solución de la ecuación:

$$4 \tan x + 12 \cot x = 8\sqrt{3} \text{ es:}$$

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{4}$

7. En un triángulo ABC: $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 53^\circ$ y $a = 5$. Calcular "b".

- a) 6 b) 8 c) 10
 d) 4 e) $6\sqrt{2}$

8. En un triángulo ABC: $a = 3$ y $b = 4$. Calcular:

$$Q = \frac{2 \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A}{2 \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A}$$

- a) 1,2 b) 2,1 c) 2,2
 d) 2,3 e) 2,4

9. En un triángulo ABC, reducir:

$$Q = \frac{a \operatorname{sen} B + b \operatorname{sen} A}{a \operatorname{sen} C + c \operatorname{sen} A}$$

- a) $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$ b) $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ c) $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$
 d) $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$ e) $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$

10. En un triángulo ABC: (R: circunradio).

$$ab + bc + ca = nR^2. \text{ Hallar:}$$

$$Q = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C (\csc A + \csc B + \csc C)$$

- a) n b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{n}{4}$
 d) $\frac{3n}{2}$ e) $\frac{3n}{4}$

11. En un triángulo ABC, simplificar:

$$E = \frac{a \operatorname{sen} B + b \operatorname{sen} A}{a \operatorname{sen} C + c \operatorname{sen} A}; \text{ si: } b = 3c$$

- a) 3 b) $1/3$ c) 6
 d) $1/6$ e) 9

12. En un triángulo ABC, se sabe que:

$$\angle A = 60^\circ; \angle B = 45^\circ; a = 3\sqrt{3}. \text{ Calcular b.}$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{3}/2$
 d) $\sqrt{6}/2$ e) $3\sqrt{2}$

13. En un triángulo ABC; simplificar:

$$E = \frac{a \cos A \cdot \csc 2A}{b \cos B \cdot \csc 2B}$$

- a) b b) a c) c
 d) 0 e) 1

14. En un triángulo ABC, reducir: $E = (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) \frac{ab}{2R}$

- a) 1 b) 2 c) $1/2$
 d) c e) $2c$

15. En un triángulo cuyos lados son proporcionales a los números 5; 7 y 8. Calcular el coseno del mayor ángulo.

- a) $3/7$ b) $4/7$ c) $5/7$
 d) $6/7$ e) $2/7$

Tarea domiciliaria

1. Señale un valor agudo de "x" que cumpla:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \sqrt{2}$$

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{2}$ e) 0

2. Señale un valor agudo de "x" que cumpla:

$$\operatorname{tg}(x - 10^\circ) = \frac{3}{4}$$

- a) 37° b) 30° c) 15°
d) 20° e) 10°

3. Señale un valor agudo de "x" que cumpla:

$$\operatorname{ctg} 3x = 1$$

- a) 45° b) 30° c) 15°
d) 10° e) 5°

4. Señale un valor agudo de "x" que cumpla:

$$\tan x \cdot \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$$

- a) 30° b) 45° c) 60°
d) $22^\circ 30'$ e) $67^\circ 30'$

5. Señale un valor agudo de "x" que cumpla:

$$4 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = \frac{7}{4}$$

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{8}$ e) $\frac{\pi}{10}$

6. Si $\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} 5x + \operatorname{cos} x} = \sqrt{3}$, entonces el valor de "x" es:

- a) 30° b) 20° c) 60°
d) 45° e) 50°

7. En un triángulo ABC: $\angle A = 30^\circ$; $\angle C = 45^\circ$ y $c = 2$. Calcular "a".

- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 4
d) 1 e) $4\sqrt{2}$

8. En un triángulo ABC: $a = 2$ y $b = 3$. Calcular:

$$A = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A}$$

- a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{5}{3}$ e) 5

9. En un triángulo ABC, reducir: (R: circunradio)

$$Q = a(\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C) + b(\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A) + c(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)$$

- a) R b) 2R c) 0
d) e) 1

10. En un triángulo ABC: (R: circunradio).

$$a^2 + b^2 + c^2 = nR^2. \text{ Hallar:}$$

$$Q = \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C$$

- a) n b) $\frac{n}{2}$ c) $\frac{n}{4}$
d) $\frac{3n}{4}$ e) $\frac{3n}{2}$

11. Sume las tres primeras soluciones positivas de:

$$2 \cos^2 x - 1 = \operatorname{sen} x$$

- a) 250° b) 350° c) 450°
d) 550° e) 650°

12. Resolver: $3 \operatorname{sen} 2x = \operatorname{cos} x$

- a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ b) $n\pi + (-1)^n \arcsen \frac{1}{6}$
c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ d) a y b
e) b y c

13. Resolver:

$$\frac{\sec x - \operatorname{sen} x}{\csc x - \operatorname{cos} x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$
d) $\pi/6$ e) $\pi/12$

14. Resolver:

$$\frac{\operatorname{cos} 2x}{\operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x$$

- a) 0 b) π c) 2π
d) a y b e) a y c

15. Resolver:

$$2 \operatorname{cos} 3x \cdot \operatorname{cos} x - 4x = \frac{1}{2}$$

- a) $\pi/3$ b) $\pi/6$ c) $\pi/9$
d) $\pi/12$ e) π

29

Complemento de funciones trigonométricas

1. Señale el rango de:

$$f(x) = 2 \cos 4x - 1.$$

- a) $[-3;0]$ b) $[-3;1]$ c) $[-3;2]$
 d) $[-1;1]$ e) $[-3;3]$

2. Señale el rango de:

$$f(x) = 5 \sin^2 x + 7 \cos^2 x$$

- a) $[5;6]$ b) $[5;7]$ c) $[6;7]$
 d) $[4;7]$ e) $[3;5]$

3. Señale el rango de:

$$f(x) = 2(\sin x + 3) - \cos x + 1$$

- a) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ b) $[-\sqrt{5} + 7; \sqrt{5} + 7]$
 c) $[-7; 7]$ d) $[-\sqrt{3} + 7; \sqrt{7} + 7]$
 e) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

4. Señale el dominio de:

$$f(x) = \frac{3 \sin 2x - 1}{1 - \sin x}$$

- a) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}$ b) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$
 c) $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ d) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+3)\frac{\pi}{2} \right\}$
 e) $\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$

5. Señale el dominio de:

$$f(x) = \frac{3 \sin 2x + 1}{1 - \cos 4x}$$

- a) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}$ b) $\mathbb{R} - \left\{ (4n+1)\frac{\pi}{8} \right\}$
 c) $\mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{8} \right\}$ d) $\mathbb{R} - \{n\pi\}$
 e) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{4} \right\}$

6. Señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda, en:

- I. La función: $y = \sin x$, es creciente en $<0; \pi>$
 II. La función: $y = \sin x$, es decreciente en $<-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}>$
 III. La función: $y = \sin x$, es creciente en $<\frac{3\pi}{2}; 2\pi>$

- a) FVF b) FFF c) FFV
 d) VFF e) VVF

7. Señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda en:

- I. La función: $y = \sin x$, tiene un máximo en $<0; \pi>$
 II. La función: $y = \sin x$, tiene un máximo en $<-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}>$.
 III. La función: $y = \sin x$, tiene un mínimo en $<\pi; 2\pi>$.

- a) VFV b) VVF c) FVV
 d) FFV e) VVV

8. Una función:
- $y = f(x)$
- , se llama:

Par, si: $f(-x) = f(x)$; $\therefore \forall x, -x \in D_f$

Impar, si: $f(-x) = -f(x)$; $\therefore \forall x, -x \in D_f$

Señale si son pares (P) o impares (I) las siguientes funciones:

$$f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$$

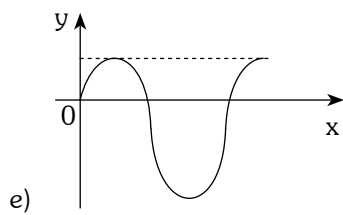
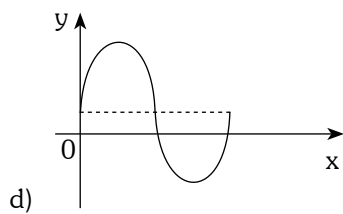
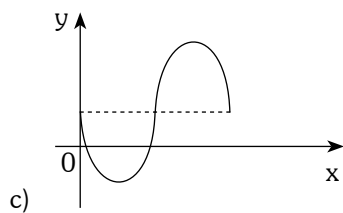
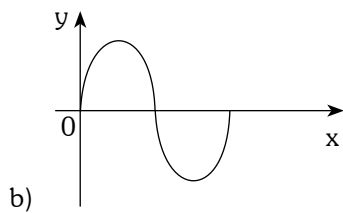
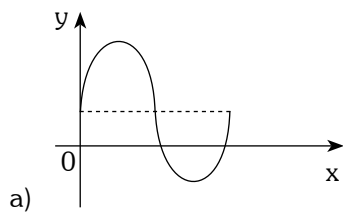
$$g(x) = \tan x \cdot \cos 2x$$

$$h(x) = \sec x + \csc^2 x$$

- a) P; P; I b) P; P; P c) I; I; P
 d) P; I; P e) I; P; P

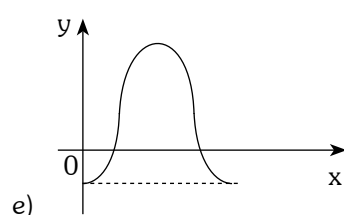
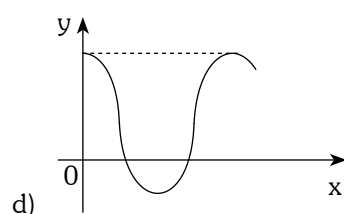
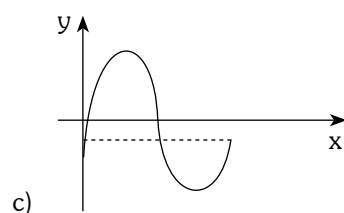
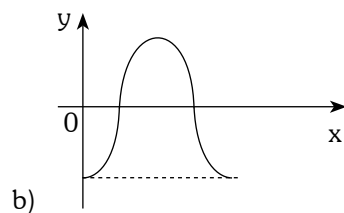
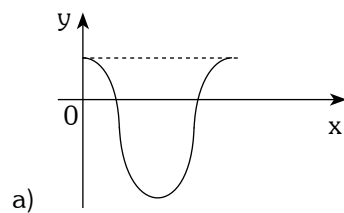
9. Grafique en $[0; 2\pi]$:

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 1$$



10. Grafique en $[0; 2\pi]$:

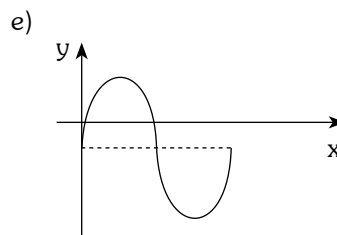
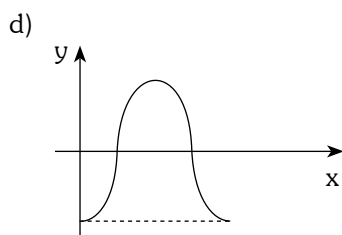
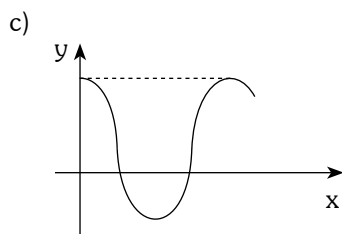
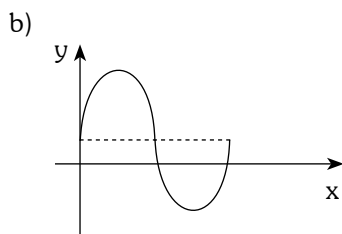
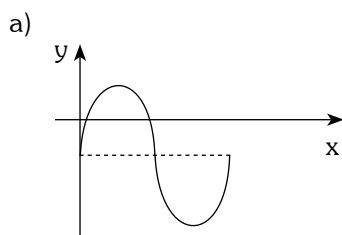
$$y = h(x) = 3 \cos x - 1$$



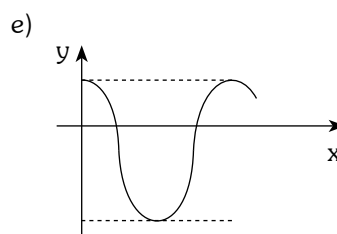
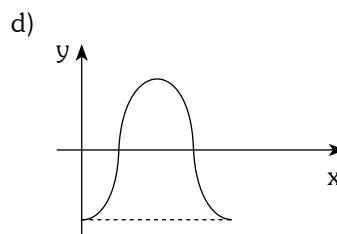
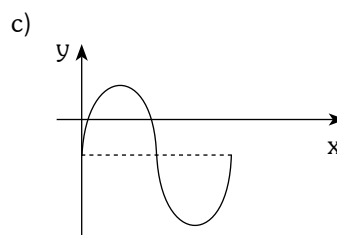
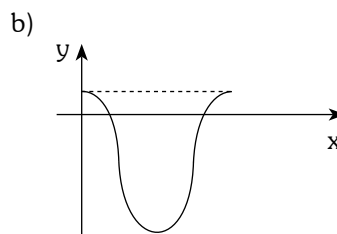
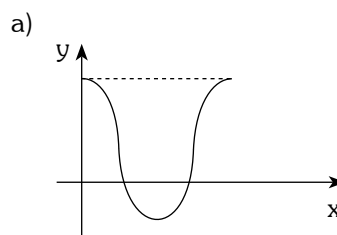
Tarea domiciliaria

- Señale el rango de la función: $g(x) = 4 \cos x - 3$
 a) $[-3;1]$ b) $[-7;-1]$ c) $[-5;1]$
 d) $[-7;1]$ e) $[-7;3]$
- Señale el rango de: $g(x) = 7 \sin^2 x - 2 \cos^2 x$
 a) $[-2;7]$ b) $[-7;2]$ c) $[-2;5]$
 d) $[-7;5]$ e) $[-5;2]$
- Señale el rango de la función: $g(x) = 5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x$
 a) $[-3;5]$ b) $[-2;3]$ c) $[-1;2]$
 d) $[-5;3]$ e) $[-3;2]$
- Señale el rango de la función: $y = 2 \sin x + \cos x$
 a) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ b) $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ c) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
 d) $[-5;5]$ e) $[-2;2]$
- Señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda, en:
 I. La función: $y = \cos x$, es creciente en $<0; \pi>$.
 II. La función: $y = \cos x$, es decreciente en $<\pi; 2\pi>$.
 III. La función: $y = \cos x$, es creciente y decreciente en $<-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$.
 a) FFF b) FFV c) FVF
 d) VFF e) VVF

- Grafique en $[0; 2\pi]$; $g(x) = 2 \sin x - 1$



- Grafique en $[0; 2\pi]$; $g(x) = 3 \cos x + 1$

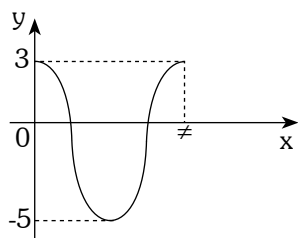


- Sume los periodos principales de:

$$f(x) = 2 \sin^5 \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1; \quad g(x) = 4 \sec^4 \left(4x + \frac{\pi}{8}\right) - 3$$

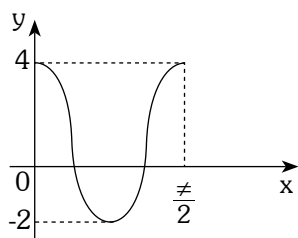
- a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $\frac{11\pi}{12}$
 d) $\frac{7\pi}{3}$ e) $\frac{4\pi}{3}$

9. Halle la ecuación de la curva mostrada, si es de la forma: $y = a \cos bx + c$.



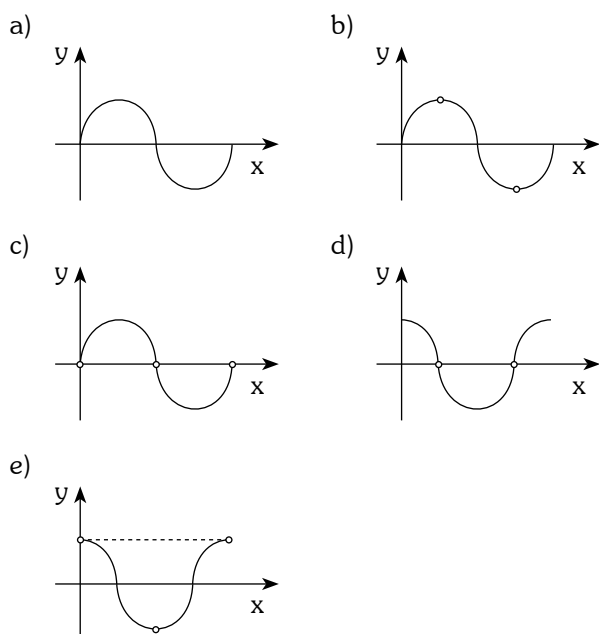
- a) $y = 3 \cos 2x + 1$ b) $y = 3 \cos 4x + 1$
 c) $y = 4 \cos 4x + 3$ d) $y = 4 \cos 2x - 1$
 e) $y = 3 \cos 4x - 1$

10. Halle la ecuación de la curva mostrada, si es de la forma: $y = a \cos bx + c$

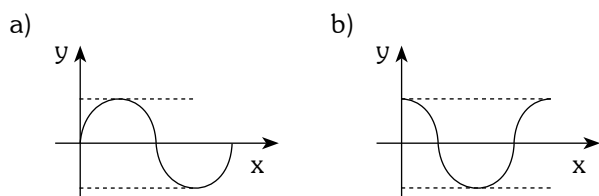


- a) $y = 3 \cos 2x + 1$ b) $y = 3 \cos 4x + 1$
 c) $y = \cos 4x + 3$ d) $y = \cos 2x + 3$
 e) $y = 3 \cos 4x - 1$

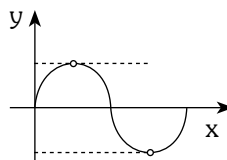
11. Grafique en $[0; 2\pi]$: $h(x) = \tan x \cdot \cos^3 x + \sin^3 x$



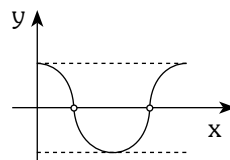
12. Grafique en $[0; 2\pi]$, la función: $y = \tan x \cdot \cos x$



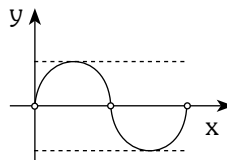
c)



d)



e)



13. Halle "a" si el periodo mínimo de:

$$g(x) = 3 \cos^a \left(ax + \frac{\pi}{4}\right) \text{ es } \frac{2\pi}{5}$$

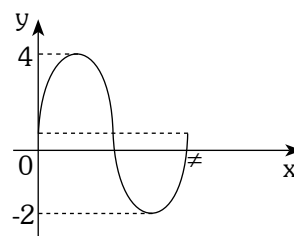
- a) 1 b) 3 c) 5
 d) 7 e) 9

14. Suma los periodos mínimos de: $f(x) = \tan(2x)$ con el periodo mínimo de:

$$g(x) = 2 \cos^6 \left(3x - \frac{\pi}{5}\right) + 1$$

- a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{3}$

15. Halle la ecuación de la curva mostrada, si es de la forma: $y = a \sin bx + c$.



- a) $y = 2 \sin 2x + 1$ b) $y = 3 \sin 2x - 1$
 c) $y = 3 \sin 2x + 1$ d) $y = \sin 2x - 1$
 e) $y = \sin 2x + 2$

30

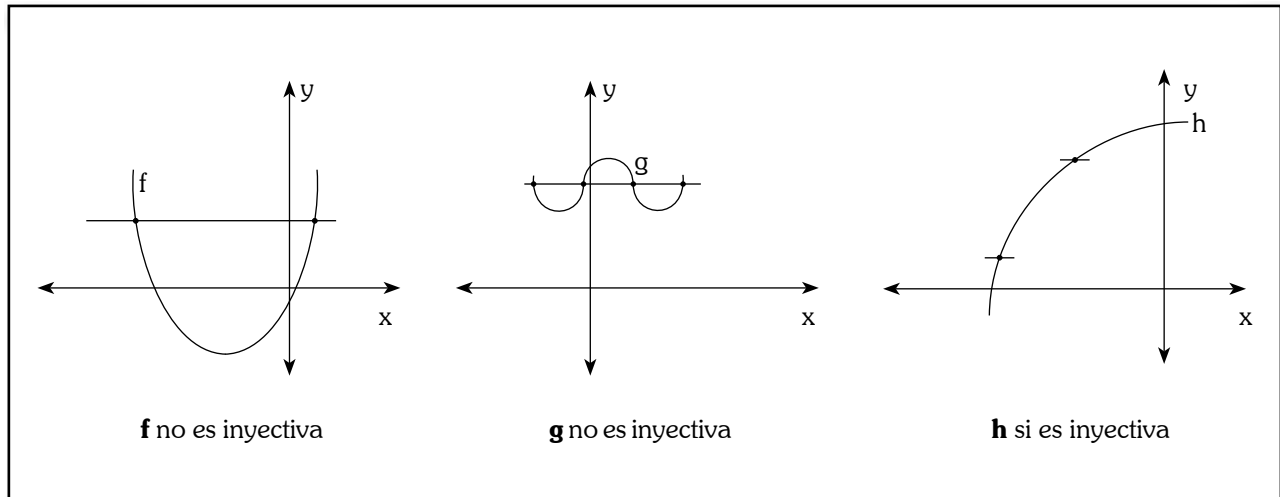
y

31

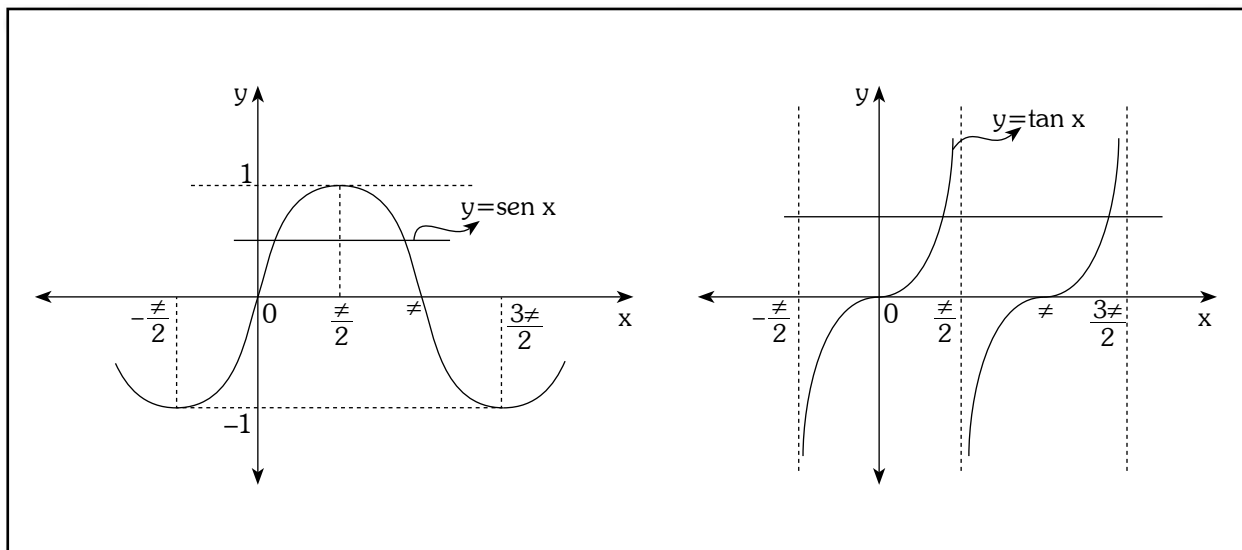
Funciones trigonométricas inversas I y II

Introducción

Según el análisis de funciones; la condición suficiente para que una función posea inversa, es que debe ser inyectiva:



Las funciones trigonométricas; debido a su carácter periódico no son inyectivas:



Según este comentario, las funciones trigonométricas no poseen inversa. Sin embargo; es posible redefinir la función trigonométrica, restringiendo su dominio (sin alterar su rango), a un intervalo donde sea inyectiva y en consecuencia se pueda obtener su inversa.

Obtención y análisis de las funciones trigonométricas inversas

I. Función trigonométrica seno inverso o arco seno

De la función: $y = \sin x$

Tomamos el dominio: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

El rango no cambia: $[-1; 1]$

Luego para hallar la inversa; hacemos en:

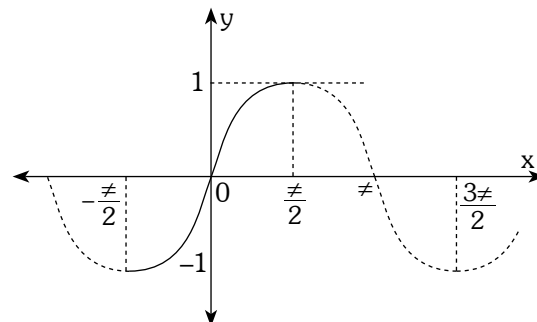
$$y = \sin x$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x = \sin y$$

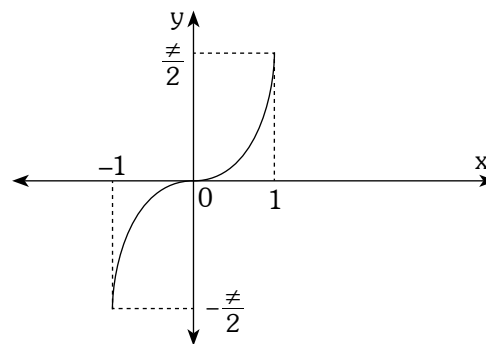
Esto es: "y es un arco o número cuyo Seno vale x".

Lo cual se denotará: $y = \text{ArcSen}x$



Finalmente, como el dominio y rango se intercambian con el de la función original; tendremos:

f	f*
$y = f(x) = \sin x$	$y = f^*(x) = \arcsen x$
$\text{Dom} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\text{Dom}^* [-1; 1]$
$\text{Ran} [-1; 1]$	$\text{Ran}^* \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



Cumpléndose :

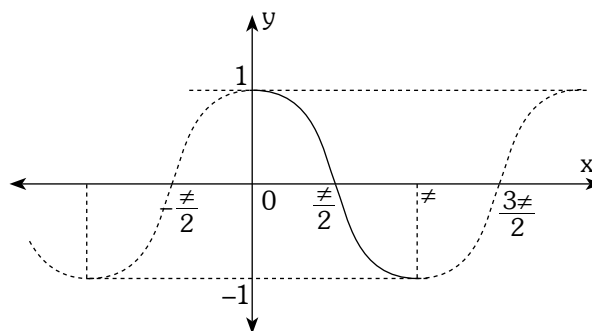
$$\arcsen(-x) = -\arcsen x$$

II. Función trigonométrica coseno inverso o arco coseno

De la función: $y = \cos x$

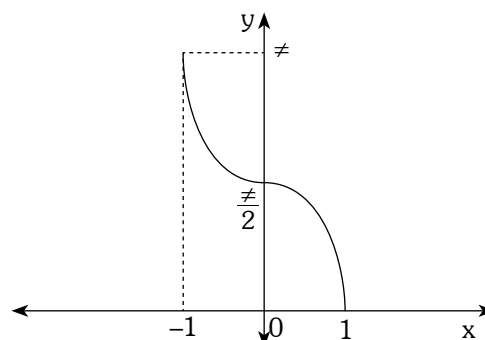
Tomamos el dominio: $[0; \pi]$

Sin cambiar el rango: $[-1; 1]$



Luego para hallar la inversa procedemos igual que en el caso del "ArcSenx"; obteniéndose:

f	f*
$y = f(x) = \cos x$	$y = f^*(x) = \arccos x$
$\text{Dom} [0; \pi]$	$\text{Dom}^* [-1; 1]$
$\text{Ran} [-1; 1]$	$\text{Ran}^* [0; \pi]$



Cumpléndose :

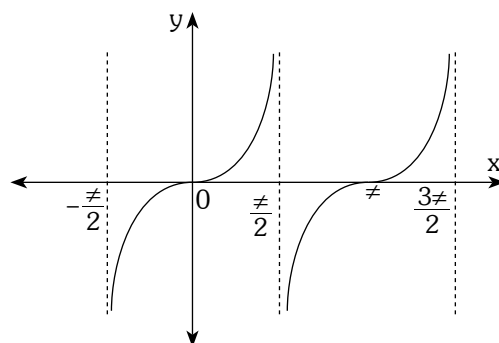
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

III. Función trigonométrica tangente inverso o arco tangente

De la función: $y = \tan x$

Tomamos el dominio: $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$

Sin cambiar el rango: $< -\infty; +\infty >$

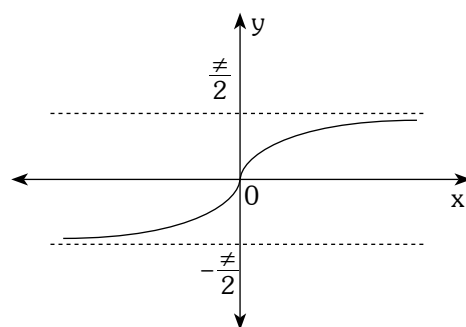


Luego, para hallar la inversa de la función Tangente, procedemos igual que en los casos anteriores, obteniéndose:

f	f*
$y = f(x) = \tan x$	$y = f^*(x) = \arctan x$
$\text{Dom} < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$	$\text{Dom}^* < -\infty; +\infty >$
$\text{Ran} < -\infty; +\infty >$	$\text{Ran}^* < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$

Cumpléndose :

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$



Ejercicios Resueltos:

1. Calcular: $\theta = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{11}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{8}$

Resolución

$$\text{Tenemos: } \theta = \underbrace{\arctan \sqrt{3}}_{\alpha} - \underbrace{\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}}_{\beta} = \alpha - \beta$$

hacemos:

$$\alpha = \arctan \sqrt{3} \rightarrow \text{"}\alpha \text{ es un arco cuya tangente vale } \sqrt{3}\text{"}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \dots (60^\circ)$$

$$\beta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{"}\beta \text{ es un arco cuya tangente vale } \frac{\sqrt{3}}{3}\text{"}$$

$$\rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \dots (30^\circ)$$

Luego:

$$\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \rightarrow \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

Rpta: **b**



2. Calcular: $\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3})$

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{3}$ e) $\neq$

Resolución

Tenemos: $\theta = \underbrace{\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\arctan(-\sqrt{3})}_{\beta} = \alpha - \beta$

hacemos:

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$\beta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

Luego:

$$\theta = \alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \therefore \theta = \frac{7\pi}{6}$$

Rpta: **b**

3. Señale el rango de la función: $y = 2 \arcsen x + \frac{\pi}{4}$

- a) $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ d) $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ e) $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

Resolución

En estos casos, se parte de la función básica: $\arcsen x$; $-1 \leq x \leq 1$;

Sabemos que: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen x \leq \frac{\pi}{2}$

Multiplicando por 2:

$$-\pi \leq 2 \arcsen x \leq \pi$$

Sumando $\frac{\pi}{4}$:

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \underbrace{2 \arcsen x + \frac{\pi}{4}}_y \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore R_f : \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

Rpta: **c**

Práctica

1. Calcular el valor de:

$$K = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arctan(1)$$

- a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$
 d) $\frac{5\pi}{6}$ e) 2π

2. Calcular:

$$P = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctan(-\sqrt{3})$$

- a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{6}$
 d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

3. Calcular:

$$N = \sen\left\{\arccos\left[\sen\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\}$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Calcular:

$$R = \sec^2(\arctan\sqrt{2}) + \csc^2(\operatorname{arccot}\sqrt{3})$$

- a) 1 b) 3 c) 5
 d) 7 e) 9

5. Si:

$$\arcsen x + \arcsen y + \arcsen z = \frac{2\pi}{3}. \text{ Calcule:}$$

$$M = \arccos x + \arccos y + \arccos z$$

- a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{2\pi}{3}$
 d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{6}$

6. Dada la función: $g(x) = \frac{2}{3} \arcsen\left(\frac{2x-1}{3}\right)$, halle: Dom_g

- a) $[-2; 3]$ b) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ c) $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$
 d) $[-1; 2]$ e) $[-2; 1]$

7. Dada la función: $h(x) = \frac{5}{6} \arccos\left(\frac{6x-5}{7}\right)$; halle: Dom_h

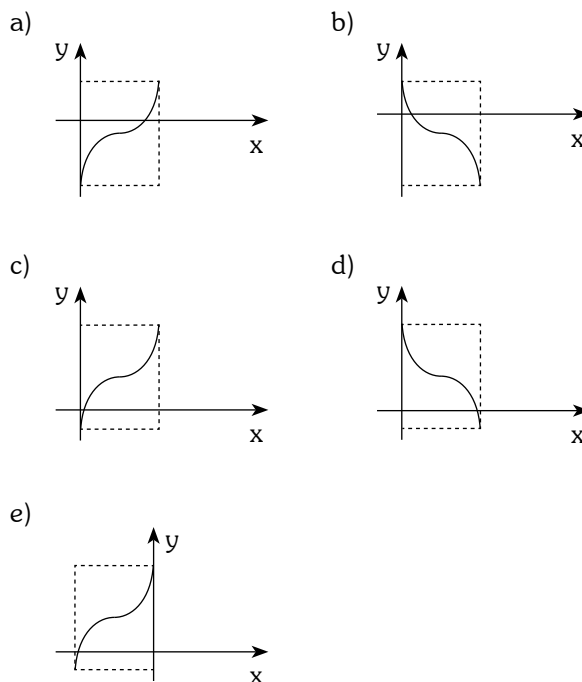
- a) $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$ c) $\left[-2; \frac{1}{3}\right]$
 d) $\left[\frac{5}{6}; 2\right]$ e) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right]$

8. Dada la función: $h(x) = \frac{1}{4} \arccos 4x + \frac{3\pi}{4}$.

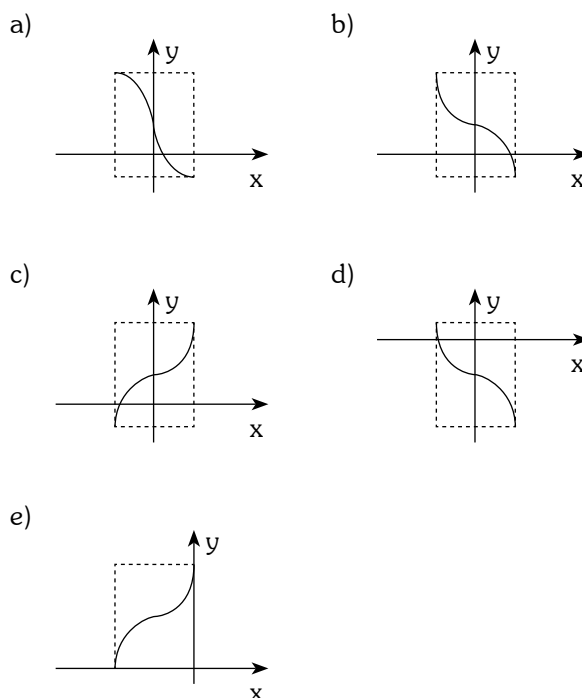
Halle: rang_h

- a) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ b) $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ c) $\left[\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$
 d) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ e) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$

9. Graficar: $y = 4 \arcsen(x-1) + \pi$



10. Grafique la función: $y = 2 \arccos x - \frac{\pi}{4}$



11. Calcular: $\sin(\arcsen 0,8 - \arcsen 0,6)$

- a) $\frac{7}{24}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{7}{23}$
 d) $\frac{24}{25}$ e) $\frac{24}{7}$

12. Si: $\arcsen x + \arccos y = \frac{\pi}{2}$. Calcule:

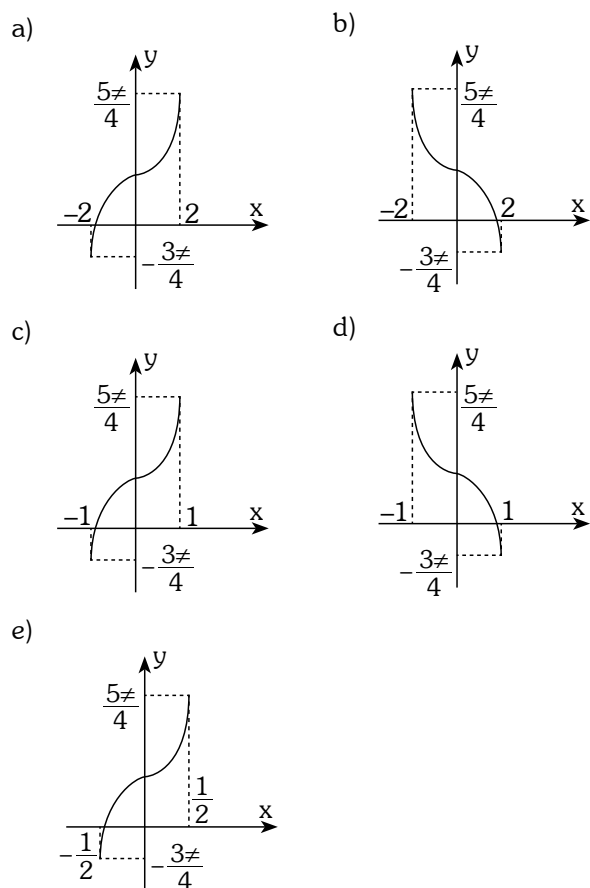
$$E = \arcsen y + \arccos x$$

- a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{3}$

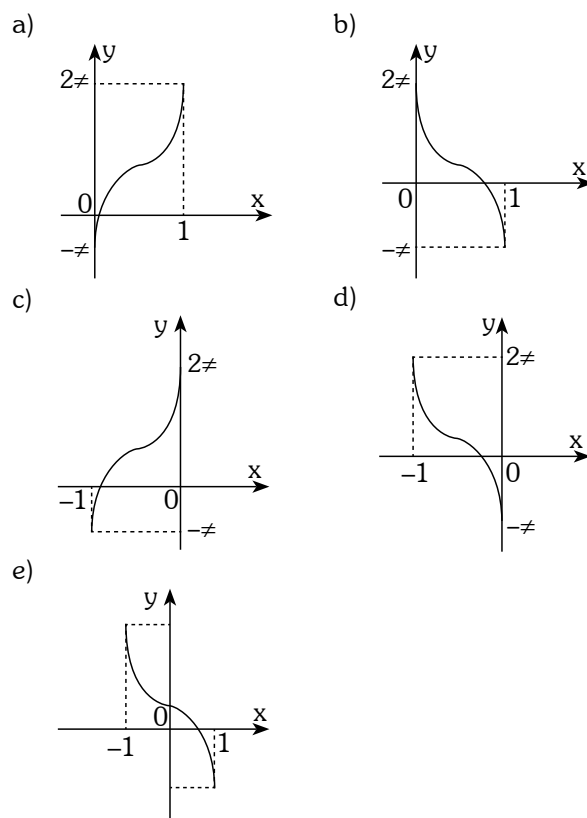
13. Hallar: $K = \sec^2(\arctan 2) + \csc^2(\operatorname{arccot} 4)$

- a) 20 b) 6 c) 16
 d) 22 e) 24

14. Grafique: $y = 2 \arcsen \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$



15. Grafique la función: $y = 3 \arccos(2x-1) - \pi$



Tarea domiciliaria

1. Calcular: $M = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(1)$

- a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{3\pi}{5}$ c) $\frac{5\pi}{12}$
 d) $\frac{7\pi}{12}$ e) $\frac{6\pi}{5}$

2. Calcular: $E = \frac{\arccos(-1)}{\arcsen(1)}$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) -1 e) -2

3. Calcular:

$$M = 2 \arccos(-1) + \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arctan(-1)$$

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$
 d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{15\pi}{8}$

4. Siendo: $\sin \theta = \frac{5}{13}$. Hallar: $E = \tan(\operatorname{arccot}(\cos \theta))$

- a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{13}{12}$
 d) $\frac{5}{13}$ e) $\frac{13}{5}$

5. Calcular: $A = \sin\left(2 \arctan \frac{1}{4}\right)$

- a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{17}$ c) $\frac{15}{17}$
 d) $\frac{15}{19}$ e) $\frac{2}{17}$

6. Hallar el valor de: $K = \tan\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{60}{61}\right)$

- a) $\frac{1}{11}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{3}{11}$
 d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{5}{11}$

7. Calcule: $E = \tan\left(\arccos \frac{1}{4}\right)$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{15}$
 d) 5 e) $\sqrt{35}$

8. Calcule: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{2}$
 d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

9. Calcule: $E = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$
 d) $\frac{\pi}{3}$ e) 2π

10. Hallar: $\arcsen \frac{1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arccot} 3$

- a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$
 d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{5}$

11. Obtenga el valor de:

$$E = \cot \left\{ \frac{1}{2} \arctan \left[\cos \left(2 \arcsen \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} \right) \right] \right\}$$

- a) -3 b) -2 c) 3
 d) 2 e) 1

12. Resolver: $\arcsen 2x = \arccos x$

- a) 2 b) 1 c) $\sqrt{5}$
 d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

13. El valor de:

$$\arctan \left(\frac{\tan 2 - \cot 2}{2} \right)$$

- a) $4 - \frac{\pi}{2}$ b) $4 - \pi$ c) $4 - \frac{3\pi}{2}$
 d) 4 e) $4 - 2\pi$

14. Calcular:

$$E = 5 \cos\left(\arctan \frac{7}{24}\right) + \cot\left(\arcsen \frac{5}{13}\right) + 6 \sec(\operatorname{arcsec} 5)$$

- a) 36,2 b) 36,9 c) 39,6
 d) 37,2 e) 35,2

15. Hallar "x". $7 \arcsen x = \frac{5\pi}{6} + \arccos x$

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

32

Repaso

1. Dada la función: $g(x) = \frac{2}{3} \text{Arcsen} \left(\frac{2x-1}{3} \right)$; Halle: Dom_g

- a) $[-2; 3]$ b) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ c) $[-1; \frac{1}{2}]$
d) $[-1; 2]$ e) $[-2; 1]$

2. Dada la función: $h(x) = h(x) = \frac{5}{6} \text{Arc cos} \left(\frac{6x-5}{7} \right)$
Halle: Dom_h

- a) $[-1; \frac{4}{3}]$ b) $[-\frac{1}{3}; 2]$ c) $[-2; \frac{1}{3}]$
d) $[\frac{5}{6}; 2]$ e) $[-\frac{1}{3}; \frac{5}{6}]$

3. Halle el dominio de la siguiente función:
 $y = \text{Arctan} \sqrt{x-3}$

- a) $[-3; 3]$ b) $<-3; 3>$ c) $[0; 3]$
d) $<0; 3>$ e) $[3; +\infty>$

4. Halle el dominio de la siguiente función:
 $y = 2 \text{Arc tan} \sqrt{x+2} - \frac{\pi}{4}$

- a) $[-2; 2]$ b) $<-2; 2>$ c) $[-2; +\infty>$
d) $<-\infty; 2]$ e) $<-\infty; -2>$

5. Dada la función: $g(x) = 2 \text{Arc sen} \frac{x}{2} - \pi$; halle: Ran_g

- a) $[-\pi; 3\pi]$ b) $[-\pi; \pi]$ c) $[-2\pi; 0]$
d) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ e) $[0; 2\pi]$

6. Dada la función: $h(x) = \frac{1}{4} \text{Arc cos} 4x + \frac{3\pi}{4}$; halle Ran_h

- a) $[0; \frac{\pi}{4}]$ b) $[\frac{3\pi}{4}; \pi]$ c) $[\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}]$
d) $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ e) $[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}]$

7. Halle el rango de la siguiente función:
 $y = 4 \text{Arc sen} |x| + \pi$

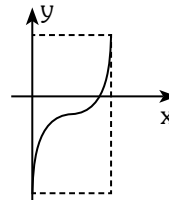
- a) $[-\pi; 3\pi]$ b) $[0; 3\pi]$ c) $[\pi; 3\pi]$
d) $[-\pi; \pi]$ e) $[-\pi; 0]$

8. Halle el rango de la siguiente función:
 $y = 2 \text{Arc cos} (-x^2) - \pi$

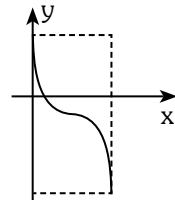
- a) $[0; \pi]$ b) $[-\pi; \pi]$ c) $[-\pi; 0]$
d) $[\pi; 2\pi]$ e) $[-2\pi; \pi]$

9. Graficar: $y = 4 \text{ArcSen} (x-1) + \pi$

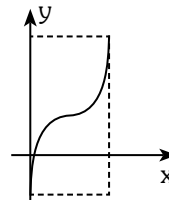
a)



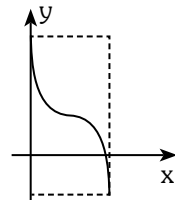
b)



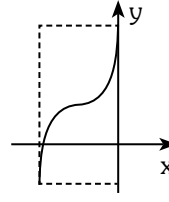
c)



d)

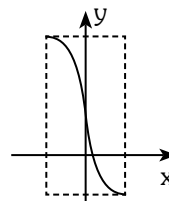


e)

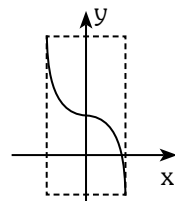


10. Grafique la función: $y = 2 \text{Arc cos} x - \frac{\pi}{4}$

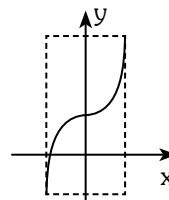
a)



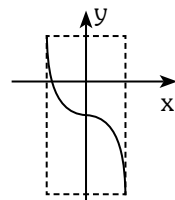
b)



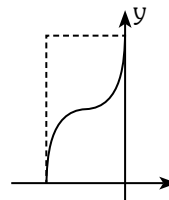
c)



d)

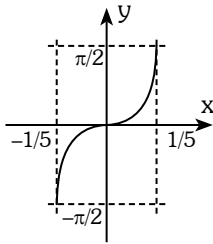


e)

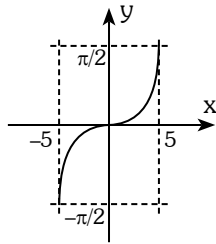


11. Graficar: $f(x) = \text{Arc sen } 5x$

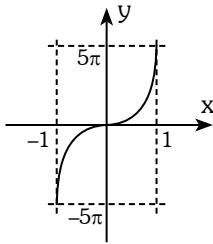
a)



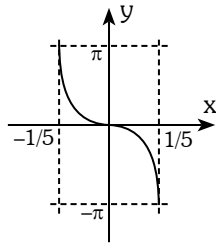
b)



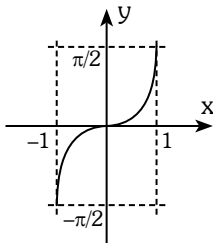
c)



d)

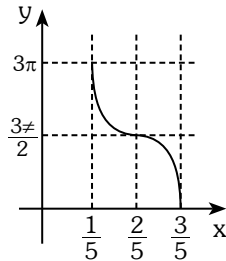


e)

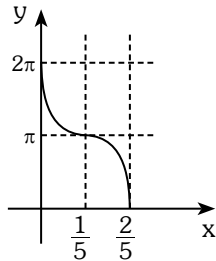


12. Graficar: $y = 3 \text{ Arc cos } (5x - 2)$

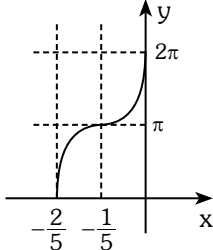
a)



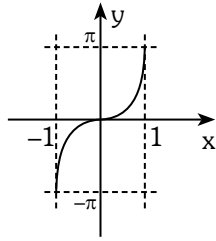
b)



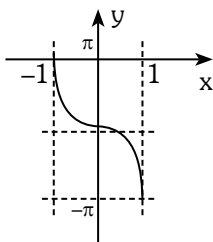
c)



d)



e)



13. Hallar el rango de la siguiente función:

$$y = f(x) = \text{Arc sen } x + \text{Arc tan } x + \text{Arc cos } x$$

a) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

b) $[-\pi; \pi]$

c) $[-\frac{\pi}{2}; 0]$

d) $[0; \pi]$

e) $[0; 2\pi]$

14. Hallar el rango de la siguiente función:

$$y = f(x) = \text{Arc sec } x + \text{Arc tan } x + \text{Arc csc } x + \text{Arc cot } x + \text{Arc cos } x$$

a) $[0; \pi]$

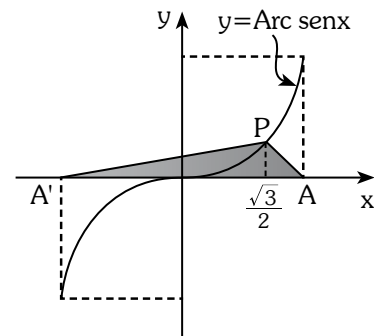
b) $[0; 2\pi]$

c) $[\pi; 2\pi]$

d) $[-\pi; 2\pi]$

e) $[-2\pi; 2\pi]$

15. Hallar el área de la región triangular A'PA.



a) $\frac{\pi}{6} u^2$

b) $\frac{\pi}{4} u^2$

c) $\frac{\pi}{3} u^2$

d) $\frac{\pi}{2} u^2$

e) $\frac{\pi}{12} u^2$

Tarea domiciliaria

1. Calcular:

$$E = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsec} \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

- a) $1/2$ b) $2/3$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

2. Hallar el valor de: $\cos 2\left[\arctan \frac{2}{3}\right]$

- a) $2/5$ b) $3/5$ c) $5/13$
d) $12/13$ e) $15/18$

3. Resolver:

$$\arctan \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \operatorname{arcsec} \sqrt{\frac{x}{2}}$$

- a) 1 b) 2 c) 0
d) -1 e) -2

4. Hallar "x", si: $4 \operatorname{arcsen} x = \arccos x$

- a) $1/2$ b) $1/4$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

5. Si: $\tan(\arctan 2x) + \cot(\operatorname{arccot} x) = 6$, calcular:

$$k = \tan\left(\arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $\sqrt{2}/4$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Calcular:

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right] + \operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right] + \operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right]$$

- a) 0 b) $-\pi/6$ c) $\pi/6$
d) $\pi/3$ e) $\pi/2$

7. Calcular: $\theta = \arccos(\cos 2) + \arccos(\cos 4)$

- a) $2\pi-1$ b) $2\pi+1$ c) $2(\pi-1)$
d) $2(\pi+1)$ e) $2(\pi+2)$

8. Si: $\operatorname{arcsen}\left[\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}\right] + \operatorname{arcsen}\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right] = \frac{\pi}{2}$,

el valor de "α" es:

- a) $\alpha=1; \alpha=0$ b) $\alpha=2/3$
c) $0 \leq \alpha \leq 1$ d) $\alpha=1; \alpha=2$
e) $\alpha=1$

9. Reducir: $M = \sec^2(\arctan 3) + \csc^2(\operatorname{arccot} 4)$

- a) 7 b) 13 c) 15
d) 27 e) 12

10. Calcular el valor de:

$$x = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- a) $22^\circ 30'$ b) 45° c) $67^\circ 30'$
d) 30° e) 60°

11. Dada la ecuación:

$$\arctan(x+1) - \arctan(x-1) = \arctan 1$$

Indicar la suma de las soluciones.

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

12. El valor o valores que verifican:

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}(\arccos x) = \frac{3}{2}$$

Son:

- a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\frac{\sqrt{7}}{4}$ b) solo $\frac{\sqrt{7}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ y $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{7}}{8}$
e) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

13. Hallar: x

$$2 \operatorname{arccot} 2 + \arccos \frac{3}{5} = \operatorname{arccsc} x$$

- a) 0 b) $4/5$ c) $24/5$
d) $7/25$ e) $25/24$

14. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}\left[2 \operatorname{arccot} 4 - \arctan \frac{5}{12}\right]$$

- a) $9/100$ b) $19/200$ c) $21/221$
d) 0 e) $1/10$

15. Si: $0 \leq x \leq 1$, entonces, podemos afirmar que:

$\arccos(2x^2 - 1)$ es igual a:

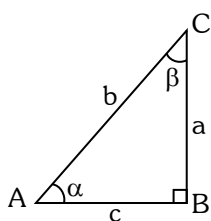
- a) $\operatorname{arccos} x$ b) $\operatorname{arcsen} x$ c) $2 \operatorname{arcsen} x$
d) $2 \operatorname{arccos} x$ e) $\operatorname{arccos} 2x$

33

Complemento de razones trigonométricas de ángulos agudos

Definición de razones trigonométricas

Son los resultados que se obtienen al dividir entre sí los lados de un triángulo rectángulo. Dichos resultados, asumirán un nombre que dependerá de la posición de los lados que se dividen, respecto a uno de los ángulos agudos del triángulo. Así tendremos:



Para: " α ":

a = cateto opuesto (C.O.)

c = cateto adyacente (C.A.)

b = hipotenusa (H)

$$\text{seno de "}\alpha\text{"}: \operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{C.O.}}{H}$$

$$\text{cosecante de "}\alpha\text{"}: \operatorname{csc} \alpha = \frac{H}{\text{C.O.}}$$

$$\text{coseno de "}\alpha\text{"}: \operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{C.A.}}{H}$$

$$\text{secante de "}\alpha\text{"}: \operatorname{sec} \alpha = \frac{H}{\text{C.A.}}$$

$$\text{tangente de "}\alpha\text{"}: \operatorname{tan} \alpha = \frac{\text{C.O.}}{\text{C.A.}}$$

$$\text{cotangente de "}\alpha\text{"}: \operatorname{cot} \alpha = \frac{\text{C.A.}}{\text{C.O.}}$$

Sin olvidar que:

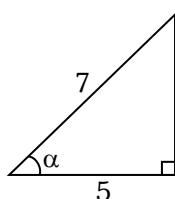
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$a^2 + c^2 = b^2$$

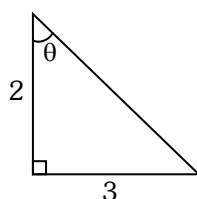
(Teorema de Pitágoras)

Por ejemplo:

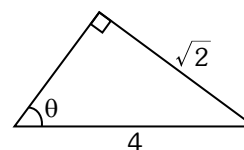
Calcule la razones trigonométricas (R.T.) del ángulo mencionado en cada caso:



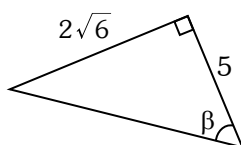
$$\operatorname{tan} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$



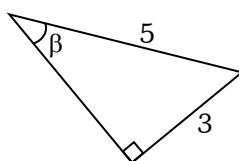
$$\operatorname{csc} \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$



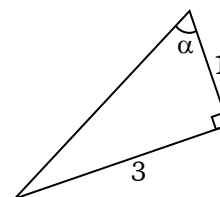
$$\operatorname{cot} \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$\operatorname{cos} \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

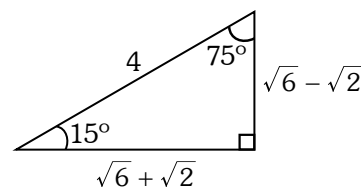
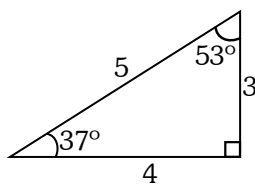
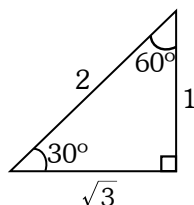
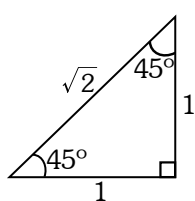


$$\operatorname{sec} \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

Triángulos rectángulos de ángulos notables



R.T. de los ángulos notables

	30°; $\pi/6$	60°; $\pi/3$	45°; $\pi/4$	37°	53°	15°; $\pi/12$	75°; $5\pi/12$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$
csc	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$

Por ejemplo, determine el valor de cada expresión, en:

$K = \frac{\text{sen } 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \tan 37^\circ}{\sec^2 60^\circ + \sec^2 45^\circ}$	$K = \frac{\text{sen } 37^\circ \cos 60^\circ (2 \tan^2 60^\circ - 1)}{\tan^2 30^\circ + \text{sen } 30^\circ}$
$K = \frac{(\sec 53^\circ + \cot 37^\circ)(\csc 53^\circ + \tan 37^\circ)}{\tan 45^\circ + \tan^2 60^\circ}$	$K = \frac{(\csc 30^\circ + 3 \tan 53^\circ) \cos^2 30^\circ}{\sec^2 30^\circ \tan 37^\circ}$

Práctica

- En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$); reducir:
 $L = \operatorname{sen} A \cdot \sec C + \cos A \cdot \csc C$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) abc e) 4
- En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$); simplificar:
 $L = \frac{\tan A \cdot \tan C + 1}{\cot A \cdot \cot C + 1}$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) ac e) 4
- En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$); reducir:
 $L = \frac{a \cdot \operatorname{sen} C + c \cdot \operatorname{sen} A}{ac}$
 a) b b) 2b c) b^{-1}
 d) $2b^{-1}$ e) 3b
- En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$); reducir:
 $L = 3\sqrt{\frac{a \tan A}{c \cdot \tan C}}$
 a) 1 b) $1/2$ c) 2
 d) a/c e) 3
- En un triángulo rectángulo los lados menores miden 3 y $\sqrt{7}$. Calcular el seno del mayor ángulo agudo de dicho triángulo.
 a) 0,25 b) 0,45 c) 0,5
 d) 0,75 e) 0,35
- En un triángulo rectángulo los catetos miden $2\sqrt{5}$. Calcular la secante del mayor ángulo agudo.
 a) 1,25 b) 0,45 c) 0,5
 d) 0,75 e) 1,5
- En un triángulo rectángulo, el seno de uno de los ángulos agudos vale 0,6. Calcular el perímetro del triángulo, si la hipotenusa mide 15 cm.
 a) 12 cm b) 21 c) 36
 d) 48 e) 25
- En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de los ángulos agudos vale 3. Si la hipotenusa mide $2\sqrt{10}$ cm, ¿cuál es el área del triángulo?
 a) 6 cm^2 b) 3 c) $3/2$
 d) 2 e) 4
- En un triángulo rectángulo un cateto es el doble del otro. Calcular la secante del mayor ángulo agudo.
 a) $\sqrt{5}$ b) 3 c) $3/2$
 d) $\sqrt{5}/2$ e) 2
- Si " α " es un ángulo agudo, tal que: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$; calcular " $\cot \alpha$ ".
 a) $1/2$ b) 2 c) $\sqrt{5}$
 d) $\sqrt{5}/2$ e) 4
- Si " θ " es un ángulo agudo; tal que: $\cos \theta = \frac{1}{3}$; calcular " $\tan \theta$ ".
 a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$
 d) $4\sqrt{2}$ e) 4
- Si " ϕ " es un ángulo agudo; tal que: $\sec \phi = \frac{\sqrt{13}}{3}$, Calcular: $L = 13 \operatorname{sen}^2 \phi + 4 \cot^2 \phi$
 a) 7 b) 9 c) 11
 d) 13 e) 16
- En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$); se traza la ceviana "AD" ("D" en $\overline{BC}$), tal que: $BD = 2DC$. Si: $\widehat{BAD} = \alpha$ y $\widehat{ACB} = \beta$; calcular: $L = \tan \alpha \cdot \tan \beta$
 a) 2 b) 3 c) $2/3$
 d) $3/2$ e) $1/3$
- En un cuadrado ABCD se traza la ceviana AE ("E" en $\overline{BC}$). Si: $\widehat{BEA} = \alpha$ y $\widehat{EDC} = \beta$; calcular:
 $L = \cot \alpha + \tan \beta$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
- En un cuadrado ABCD se toman los puntos "E" y "F" sobre $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente; tales que: $BE = 3EC$ y $CF = FD$. Si: $\widehat{BAF} = \alpha$ y $\widehat{EFC} = \beta$; calcular:
 $L = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$
 a) 1 b) 2 c) 4
 d) 1,5 e) 3
- Se tiene una circunferencia de radio 5 cm. Si la distancia mínima de un punto exterior "P" a la circunferencia es de 2 cm; calcular la cotangente de la mitad del ángulo que forman las tangentes trazadas desde "P" a dicha circunferencia.
 a) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 d) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
- Reducir: $C = \operatorname{sen}^2 45^\circ + \operatorname{sen}^2 30^\circ$
 a) $1/4$ b) $1/2$ c) 2
 d) $3/4$ e) $2/5$
- Siendo: $\tan \phi = \operatorname{sen} 60^\circ$, calcular " $\operatorname{sen} \phi$ "
 a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{7}}$
 d) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Tarea domiciliaria

1. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B} = 90^\circ$);

Simplificar:

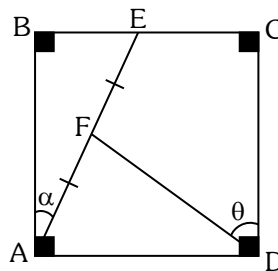
$$K = \frac{a \tan C + b \cos A}{c}$$

- a) 1 b) 2 c) 2c
d) $c/2$ e) 3
2. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B} = 90^\circ$), cuyo perímetro es "2p"; hallar:
 $K = c \tan A + a \csc A + b \sec C$
a) p b) 2p c) $p/2$
d) 4p e) 3p
3. En un triángulo rectángulo, un cateto es el triple del otro. Calcular el seno del mayor ángulo agudo del triángulo.
a) $1/4$ b) $1/\sqrt{10}$ c) $3/\sqrt{10}$
d) $3/4$ e) $1/2$
4. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el cuádruple de un cateto. Calcular el cuadrado de la cotangente del menor ángulo agudo del triángulo.
a) 16 b) 15 c) 17
d) $1/15$ e) 11
5. En un triángulo rectángulo, el seno de uno de sus ángulos agudos es 0,6. Si el perímetro del triángulo es 48 cm, ¿cuánto mide el menor lado?
a) 6 cm b) 3 c) 12
d) 16 e) 5
6. En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de sus ángulos agudos es 2,4. Si el mayor lado del triángulo mide 52 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo?
a) 100 cm b) 120 c) 160
d) 140 e) 150
7. Si: $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; " α " es agudo, calcular:
 $P = \sqrt{5} \cot \alpha + \frac{1}{2}$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
8. Si: $\cos \beta = \frac{1}{3}$; " β " es agudo, calcular: $Q = \sqrt{2} \tan \beta + 1$
a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
9. Si: $\tan \theta = 2$; " θ " es agudo, calcular: $R = \sin \theta \cdot \cos \theta$
a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3
d) 0,4 e) 0,5

10. Si: $\sec \phi = 1,5$; " ϕ " es agudo, calcular:

$$S = \sin \phi \cdot \tan \phi + \frac{1}{6}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
11. Calcular el valor de: $P = \sin^2 45^\circ \cos 30^\circ$
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
12. Calcular: $Q = \frac{\sin 60^\circ \tan 30^\circ + \sin^2 45^\circ}{\tan 37^\circ}$
a) $3/4$ b) $3/2$ c) $2/3$
d) $4/3$ e) $1/2$
13. Siendo: $\tan \alpha = \sin 60^\circ$; " α " es agudo, Calcular: $R = 2 \sec^2 \alpha + \cos^2 45^\circ$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
14. Siendo: $\sin \beta = \tan 37^\circ$; " β " es agudo, Calcular: $S = 3 \cot^2 \beta - \tan^2 30^\circ$
a) 1 b) 2 c) 3
d) -1 e) -2
15. En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$), reducir:
 $J = a \cdot \sec C + b \cdot \sin A + c$
Si su perímetro es 20 cm
a) 20 cm b) 10 c) 5
d) 40 e) 30
16. Del gráfico, calcular: $Q = \tan \alpha + \tan \theta$; si: ABCD es un cuadrado.



- a) 1 b) 2 c) 1,5
d) 2,5 e) 3
17. En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90^\circ$), se cumple: $\tan A = 4 \tan C$. Calcular: $\sin A \cdot \sin C$
a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3
d) 0,4 e) 0,5

34

Complemento de identidades trigonométricas de una variable

Definición

Son aquellas igualdades que se establecen entre las razones trigonométricas de una cierta variable angular y se verifican para todo valor admisible de dicha variable.

Clasificación

I. I. T. recíprocas

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x = 1$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\bullet \operatorname{csc} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\bullet \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\bullet \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

II. I. T. por división

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

III. I. T. pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\operatorname{csc}^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\bullet \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\bullet \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\bullet \operatorname{csc}^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\bullet \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\bullet \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\bullet \cot^2 x = \operatorname{csc}^2 x - 1$$

Los problemas que vamos a resolver en este capítulo serán de tipo simplificación y tipo condicionales.

Práctica

1. Reducir:

$$E = \tan x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x$$

- a) $\operatorname{sen} x$ b) $\operatorname{sen} 2x$ c) $2\operatorname{sen} x$
d) 2 e) 3

2. Reducir:

$$E = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cot^2 x \cdot \sec^2 x$$

- a) $\operatorname{sen} x$ b) $\cos x$ c) 1
d) $\operatorname{sen}^2 x$

3. Reducir:

$$E = \operatorname{sen} x \cot x + \cos x \tan x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{csc} x - \cos^2 x \sec x$$

- a) 1 b) $2\operatorname{sen} x$
c) $2(\operatorname{sen} x - \cos x)$ d) 0
e) 3

4. Reducir:

$$E = [(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2] \tan x$$

- a) 2 b) $2\operatorname{sen} x$ c) $2\cos x$
d) $4\operatorname{sen}^2 x$ e) 3

5. Reducir:

$$E = (2\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - 2\cos x)^2$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 7 e) 9

6. Reducir:

$$E = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos^2 x} + 1$$

- a) $\operatorname{sen}^2 x$ b) $\cos^2 x$ c) $\sec^2 x$
d) $\operatorname{csc}^2 x$ e) $\tan^2 x$

7. Reducir:

$$E = \frac{(\sec^2 x - 1) \cot x}{(\csc^2 x - 1) \tan x}$$

- a) $\tan x$ b) $\tan^2 x$ c) $\cot x$
d) $\cot^2 x$ e) $\sec x$

8. Reducir:

$$E = \tan x \cdot \sec x + \cos x$$

- a) $\sec x$ b) $\sec x$ c) $\csc x$
d) $\cos x$ e) $\tan x$

9. Reducir:

$$E = \cot x \cdot \cos x + \sec x$$

- a) $\sec x$ b) $\cos x$ c) $\csc x$
d) $\sec x$ e) $\tan x$

10. Reducir:

$$E = \frac{\sec x + \tan x + 1}{\csc x + \cot x + 1}$$

- a) 1 b) $\tan x$ c) $\cot x$
d) $\csc x \sec x$ e) $\sec x$

11. Reducir:

$$E = \frac{\sec x \csc x - \cot x}{\sec x \csc x - \tan x} + 1$$

- a) $\csc^2 x$ b) $\sec^2 x$ c) $\tan^2 x$
d) $\cot^2 x$ e) $\sec^2 x$

12. Reducir:

$$E = \left(\frac{\sec^4 x - \cos^4 x}{\sec x + \cos x} \right) \sec x + 1$$

- a) 1 b) $\tan x$ c) $\cot x$
d) $\sec x$ e) $\cos x$

13. Reducir:

$$E = \frac{\sec^3 x + \cos^3 x}{\sec x + \cos x} + \frac{\sec^3 x - \cos^3 x}{\sec x - \cos x}$$

- a) 1 b) 2
c) 3 d) $2 \sec x \cos x$
e) $2(1 + \sec x \cos x)$

14. Reducir:

$$E = \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x - \cot^2 x}$$

- a) $\tan^2 x$ b) $\tan^4 x$ c) $\tan^6 x$
d) $\tan^8 x$ e) $\tan^3 x$

15. Si: $\tan x + \cot x = 2\sqrt{2}$; calcular:

$$E = \tan^2 x + \cot^2 x$$

- a) 4 b) 6 c) 8
d) 12 e) 14

16. Si: $\sec x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; calcular:

$$E = \sec x \cos x$$

- a) 1/2 b) 1/4 c) 1/6
d) 1/16 e) 1/5

17. Si: $\tan x + \cot x = 3$; calcular:

$$E = \sec x \cos x$$

- a) 1/3 b) 2/3 c) 1/6
d) 1/12 e) 2/5

18. Si: $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x = 1$; hallar:

$$E = \cot x + \tan^3 x$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Si: $\sec x + \cos x = n$, hallar:

$$E = \tan x + \cot x + \sec x + \csc x$$

- a) $\frac{2}{n-1}$ b) $\frac{2}{n+1}$ c) $\frac{2}{n}$
d) $\frac{2}{n^2-1}$ e) $-\frac{2}{n}$

20. Si: $\sec^2 x = \cos x$; hallar:

$$E = (1 - \sec^4 x) \csc^2 x$$

- a) 1 b) 2 c) 1/2
d) 1/4 e) 1/6

Tarea domiciliaria

1. Reducir: $C = \sin^2 x \cdot \cot x \cdot \sec x$

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\cos 3x$
d) $\cos 2x$ e) $\tan x$

2. Reducir: $C = \tan x \cdot \cot^2 x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \sec x$

- a) $\cos x$ b) $\tan x$ c) $2 \tan x$
d) $2 \cos x$ e) $2 \sin x$

3. Simplificar: $C = (\sin x \cdot \cot x)^2 + (\cos x \cdot \tan x)^2$

- a) 1 b) 2 c) $\tan x$
d) $\cot x$ e) $\sec x$

4. Simplificar: $C = \sin^3 x \cdot \csc x + \cos^3 x \cdot \sec x$

- a) 1 b) $\sin x + \cos x$
c) $\sin x \cdot \cos x$ d) $\tan x$
e) $\cot x$

5. Reducir:

$$C = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sec x + \csc x} \right) \tan x$$

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\sin^2 x$
d) $\cos^2 x$ e) $\tan x$

6. Reducir: $C = (\sec x + \tan x)(1 - \sin x)$

- a) $\cos x$ b) $\cos^2 x$ c) $\sin^2 x$
d) $\sec x$ e) $\csc x$

7. Simplificar: $C = (\csc x - \cot x)(1 + \cos x) \cot x$

- a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\sin^2 x$
d) $\cos^2 x$ e) $\tan x$

8. Reducir:

$$C = \frac{\sec x + \tan x + 1}{\csc x + \cot x + 1}$$

- a) $\sec x \cdot \csc x$ b) $\sin x \cdot \cos x$
c) $\tan x$ d) $\cot x$
e) $\csc x$

9. Reducir:

$$C = \frac{3 \sec x - 3 \tan x + 1}{3 \csc x + \cot x - 3}$$

- a) $\sec x \cdot \csc x$ b) $\sin x \cdot \cos x$
c) $\tan x$ d) $\cot x$
e) $\csc x$

10. Simplificar: $C = (2 \sin x + \cos x)^2 + (\sin x - 2 \cos x)^2$

- a) 3 b) 2
c) 5 d) 4
e) $5 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

11. Simplificar: $C = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

- a) 2 b) $2(\tan^2 x + \cot^2 x)$
c) 4 d) $4(\tan^2 x + \cot^2 x)$
e) 5

12. Reducir:

$$C = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$$

- a) 1 b) -2
c) -1 d) $4 \sin x \cdot \cos x$
e) 3

13. Reducir:

$$C = (\sin x + \csc x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

- a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 8

14. Reducir:

$$C = \frac{\sin x \cdot \tan x + \cos x \cdot \cot x}{\sin x + \cos x} + 1$$

- a) $\sin x \cdot \cos x$ b) $\sec x \cdot \csc x$
c) $2 \sin x \cdot \cos x$ d) $2 \sec x \cdot \csc x$
e) $\cos x \cdot \sin x$

15. Reducir: $E = (3 \sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - 3 \cos \theta)^2$

- a) 10 b) 6
c) 9 d) $12 \sin \theta \cos \theta$
e) $6 \sin \theta \cos \theta$

16. Reducir: $E = \csc^3 x \cdot \cot^2 x \cdot \sin x \cdot \sec^2 x$

- a) $\csc x$ b) $\sin 2x$ c) $\csc 2x$
d) $\csc 4x$ e) $\sin 4x$

17. Simplificar:

$$E = \frac{\tan x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \csc x}{1 - \cos^2 x}$$

- a) $\csc x$ b) $2 \csc x$ c) $2 \cos x$
d) $3 \sec x$ e) $3 \csc x$

18. Simplificar:

$$M = \frac{\sin \theta \cdot \sec \theta \cdot \tan \theta + \sin^2 \theta \cdot \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta - 1}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Reducir:

$$M = \frac{(\tan \alpha + 2 \cot \alpha)^2 + (2 \tan \alpha - \cot \alpha)^2}{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$$

- a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 10

20. Reducir:

$$E = \frac{(\sin \theta - 1)^2 + (\cos \theta - 1)^2 - 1}{1 - \sin \theta - \cos \theta}$$

- a) -2 b) -1 c) 1
d) 2 e) 3

35

Miscelánea de identidades

1. Simplificar la expresión:

$$E = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y) + (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y)(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$$

- a) $\operatorname{ctg} x$ b) $-\operatorname{ctg} y$ c) $\operatorname{tg} x$
d) 0 e) $\sec x$

2. Calcular:

$$E = \sec^4 \alpha - \operatorname{tg}^4 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

- a) 1 b) 2 c) 0
d) -1 e) -2

3. Si: $x = \operatorname{sena} + \operatorname{cosa}$

$$y = \operatorname{sena} - \operatorname{cosa}$$

Hallar la relación entre "x" e "y" independiente de "a"

- a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $x^2 - y^2 = 2$
c) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$
e) $x^2 - y^2 = 3$

4. Eliminar "a", partiendo de:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = x$$

$$\sec \alpha + \csc \alpha = y$$

- a) $y^2 = x^2 - 2x$ b) $y^2 = 2x + x^2$
c) $y^2 + 2x = x^2 + 2$ d) $y^2 = 2x - x^2$
e) $x^2 + 2y = y^2 + 2$

5. En el siguiente sistema:

$$y \operatorname{sen} x = a$$

$$y \operatorname{cos} x = b$$

El valor de "y" es:

- a) $y = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ b) $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$
c) $y = a^2 - b^2$ d) $y = \pm \sqrt{b^2 - a^2}$
e) $y = b^2 - a^2$

6. Determinar el valor de la expresión:

$$E = \sec x (1 + \operatorname{cos} x) - \csc x \cdot \operatorname{tg} x$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. Si: $\operatorname{sen} x = a$ y $\operatorname{tg} x = b$

$$\text{Calcular: } E = (1 - a^2)(1 + b^2)$$

- a) 2 b) 0 c) -1
d) 1 e) -2

8. La expresión: $\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{tg} a + \operatorname{cos}^2 a \cdot \operatorname{ctg} a + 2 \operatorname{sena} \cdot \operatorname{cosa}$ es equivalente a:

- a) $\operatorname{sena} + \operatorname{cosa}$ b) $\sec a + \csc a$
c) $\operatorname{tga} + \operatorname{ctga}$ d) $\operatorname{sena} \cdot \operatorname{cosa}$
e) $\operatorname{cos} x + \operatorname{sena}$

9. Si: $1 + \operatorname{tg} x = \sec y$

$$1 + \operatorname{tg} y = \sec x$$

Calcular: $E = \sec x + \sec y$

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2} - 1$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e) $\sqrt{2} - 2$

10. Si:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \sec x + 1}{\operatorname{ctg} x + \csc x + 1} = \frac{A}{B}; \quad (B \neq 0; A \neq B)$$

Hallar:

$$E = \frac{A \operatorname{sen} x - B \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x}$$

- a) $A - B$ b) $\frac{A - B}{2}$ c) AB^2
d) $A + B$ e) $A^2 - B^2$

11. Reducir:

$$W = 3 \sqrt{\frac{\sec x - \operatorname{cos} x}{\csc x - \operatorname{sen} x}}$$

- a) $\frac{\operatorname{ctg} x}{2}$ b) $\sec x$ c) $\csc x$
d) $\operatorname{tg} x$ e) $\operatorname{ctg} x$

12. Simplificar:

$$\frac{\sec^4 \alpha (1 - \operatorname{sen}^4 \alpha) - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\csc^4 \alpha (1 - \operatorname{cos}^4 \alpha) - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

- a) 1 b) 2 c) 4
d) $9/2$ e) $3/5$

13. Si: $(1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2 = A(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{cos} x)$

Hallar el valor de "A".

- a) 1 b) 2 c) -1
d) -2 e) 3

14. Si: $\cot x < \tan x < 0$, reducir:

$$J = \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x + 2} - \sqrt{\cot^2 x + \tan^2 x - 2}$$

- a) $2 \cot x$ b) $-2 \cot x$ c) $2 \tan x$
d) $-2 \tan x$ e) $2 \sec x$

15. Si: $(\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{1}{9}$, hallar: $R = \cot\theta$

- a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

16. Simplificar la siguiente expresión:

$$R = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos^2\alpha}{2 \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

- a) $1 - \cos\alpha$ b) $\sec\alpha \csc\alpha$
c) $1 - \csc\alpha$ d) $\csc\alpha + 1$
e) $1 + \operatorname{sen}\alpha$

17. Hallar: $\frac{8}{17} \sec\alpha$, sabiendo que: $\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{4}$

- a) 1 b) 1,5 c) 2
d) 1,8 e) 1,7

18. Si: $\csc x - \sec x = 2$, calcular: $\tan x + \cot x$

- a) $1 - \sqrt{5}$ b) $1 + \sqrt{5}$ c) $2\sqrt{5}$
d) $2 + \sqrt{5}$ e) $2 - \sqrt{5}$

19. Si: $\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{N} + \frac{1}{\cot^2\theta}$, hallar "N"

- a) $\cos^2\theta$ b) $\operatorname{sen}^2\theta$ c) $\sec^2\theta$
d) $\tan^2\theta$ e) $\csc^2\theta$

20. Si se tiene que: $\sec x + \operatorname{sen} x = 1$, hallar: $A = \frac{\cos^3 x}{1 + \operatorname{sen} x}$

- a) 1 b) 0 c) 2
d) -2 e) -1

Tarea domiciliaria

1. Cuál será el valor de "N", sabiendo que:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}; N = \operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x$$

- a) $\frac{49}{64}$ b) $\frac{96}{128}$ c) $\frac{97}{128}$
d) $\frac{95}{128}$ e) $\frac{50}{60}$

2. El valor de "F" en la siguiente identidad: $-\pi < \theta < \pi$:

$$\operatorname{sen}^3\theta + F \cos^2\theta = \operatorname{sen}\theta$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \text{ es:}$$

- a) $F = \operatorname{sen}^2\theta$ b) $F = \cos^2\theta$
c) $F = \cos\theta$ d) $F = \operatorname{sen}\theta$
e) $F = \tan^2\theta$

3. Si: $a^2 - \cos^2 x - \sec^2 x = 2$; encontrar el valor de: $\operatorname{sen} x \cdot \tan x + 2\cos x$

- a) $-\sqrt{a^2 - 2}$ b) $\sqrt{a}$ c) $-\sqrt{a}$
d) $\pm a$ e) $-a$

4. Si: $\frac{1 + \operatorname{sen}^4 a}{1 + \cos^4 a} = \tan a$; hallar:

$$P = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen}^3 a + \operatorname{sen}^5 a - \operatorname{sen}^7 a}{\cos a - \cos^3 a + \cos^5 a - \cos^7 a}$$

- a) 2 b) 3 c) 1
d) -1 e) -2

5. Si: $\operatorname{sen} a + \csc a = \frac{5}{2}$; hallar: $Z = \cot a + \cos a$

- a) $3\sqrt{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $2\sqrt{3}$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

6. Hallar el valor de:

$$E = \operatorname{sen}^2 1^\circ + \operatorname{sen}^2 2^\circ + \operatorname{sen}^2 3^\circ + \dots + \operatorname{sen}^2 90^\circ$$

- a) 22,5 b) 30 c) 45
d) 45,5 e) 25

7. Si: $\operatorname{sen}\theta = \frac{\pi}{4} + \cos\theta$; entonces el valor de:

$$\tan\left(\sqrt{1 - \frac{2}{\tan\theta + \cot\theta}}\right)$$

- a) -1 b) 1 c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{2}$

8. Si: $\tan a = \frac{n}{m}$; a qué es igual:

$$n(2\cos a + \sec a) - 2m\operatorname{sen} a$$

- a) $m \cos a$ b) $m \sec a$ c) mn
d) $n \sec a$ e) $m \operatorname{sen} a$

9. Hallar "a", "b" y "c" tal que:

$$\frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1} = a \operatorname{sen} x + b \cos x + c$$

- a) 0; 2; 0 b) 0; 1; 1 c) 1; 1; 0
d) 1; 1; 1 e) 1; 0; 1

10. Si: $A = 2K\pi + \frac{\pi}{2}$; la expresión equivalente de:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{sen} A} - 2 \sec^2 A, \text{ es:}$$

- a) $\frac{1}{1 - \operatorname{sen} A}$ b) $\frac{-1}{1 - \operatorname{sen} A}$
c) $\frac{-1}{1 + \cos A}$ d) $\frac{-1}{1 - \cos A}$
e) $\frac{1}{1 - \csc A}$

11. Simplificar la expresión:

$$K = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 - \operatorname{sen} x}} + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}}$$

$$\text{Si: } \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

- a) $-\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{2} \sec x$ c) $\sqrt{2} \sec x$
 d) $\sqrt{2} \cos x$ e) $\sqrt{2} \csc x$

12. Si "P", "Q", "R" son constantes que satisfacen la siguiente relación:

$$P + Q \tan^R x = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{1}{\csc x - 1}$$

Calcular el producto "P.Q.R"

- a) 2 b) 4 c) 8
 d) 12 e) 15

13. Hallar el mínimo valor de:

$$M = 10 - 9 \cos^2 x + \operatorname{sen} x$$

- a) $\frac{17}{18}$ b) $\frac{35}{36}$ c) $\frac{27}{28}$
 d) $\frac{45}{46}$ e) $\frac{18}{17}$

14. Simplificar: $E = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{1}{2 + \tan^2 \theta}$

- a) -1 b) 1 c) $\frac{1}{3}$
 d) 2 e) 3

15. Hallar " $\sec \alpha$ "; sabiendo que: $\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3}$

- a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$
 d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{5}$

16. En la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + k \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x (\tan x + \cot x)^2$$

Hallar el valor de "k".

- a) $\sec x \cdot \csc x$ b) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
 c) 3 d) 2
 e) 1

17. Si: $\sec x - \cos x = \frac{3}{2}$; hallar el valor de la expresión:
 $8(\sec^2 x + \cos^2 x)$

- a) 56 b) 21 c) 34
 d) 42 e) 22

18. Si: $\csc x - \sec x = 3$, calcular: $\tan x + \cot x$.

- a) $1 - \sqrt{10}$ b) $1 + \sqrt{10}$ c) $2\sqrt{10}$
 d) $2 + \sqrt{10}$ e) $2 - \sqrt{10}$

19. Si: $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{N} - \frac{1}{\cot^2 \theta}$; hallar "N".

- a) $\cos^2 \theta$ b) $\operatorname{sen}^2 \theta$ c) $\sec^2 \theta$
 d) $\tan^2 \theta$ e) $\operatorname{ctg}^2 \theta$

20. Si se tiene que: $\sec x + \operatorname{sen} x = 1$, hallar:

$$A = \cos^3 x + \cos^2 x + \cos x$$

- a) 1 b) 0 c) 2
 d) -2 e) -1

36

Repaso general

1. Un ángulo se expresa como $\overline{abb}^0$ y también como $\frac{a(b+2)0^g}{a(b-a)5^0}$ señale el equivalente en radianes de:

- a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{2\pi}{5}$
 d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{5\pi}{6}$

2. Calcular "R", si: $\frac{S}{4} = \frac{C}{5} + 3$

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{5}$ c) $\frac{5\pi}{7}$
 d) $\frac{7\pi}{9}$ e) $\frac{9\pi}{11}$

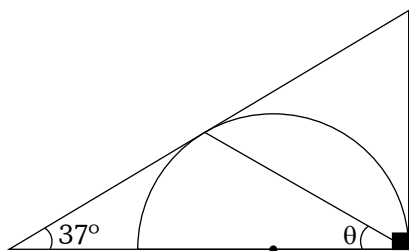
3. Si a y b son números reales positivos hállese el mínimo número de radianes del ángulo que satisface la igualdad:

$$C + S = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2ab}$$

- a) $\frac{\pi}{180}$ b) $\frac{\pi}{190}$ c) $\frac{\pi}{200}$
 d) $\frac{\pi}{210}$ e) $\frac{\pi}{220}$

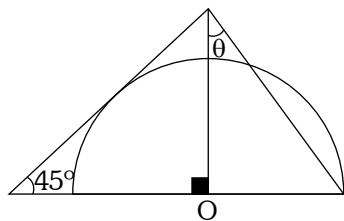
4. Del gráfico, calcular: $E = \sqrt{4 \operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta}$

- a) 1
 b) 2
 c) 3
 d) 4
 e) 5



5. Del gráfico, calcular "ctg θ "

- a) 1
 b) 2
 c) 3
 d) $\sqrt{2}$
 e) $\sqrt{3}$



6. Si: $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + x \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 2\sqrt{3}$

$$\text{Calcular: } E = \csc x + \sec 2x$$

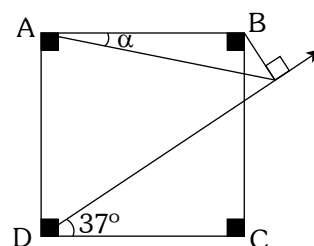
- a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) 4
 d) $3\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{3}$

7. Si: $\operatorname{ctg} \left(\frac{5x - 96^\circ}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{ctg} \left(\frac{4x}{3} \right)}$, determine "x".

- a) 36° b) 30° c) 45°
 d) 20° e) 35°

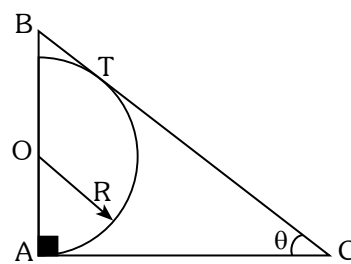
8. En el cuadrado ABCD, calcular: $\operatorname{ctg} \alpha$

- a) 1
 b) 3
 c) 5
 d) 7
 e) 9



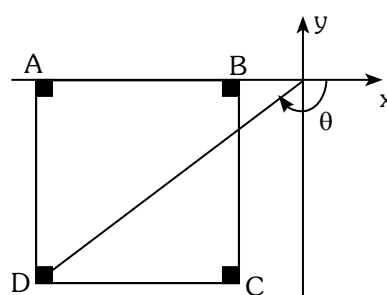
9. En la figura halle AB en términos de R y θ .

- a) $R \operatorname{tg} \theta (\csc \theta + 1)$
 b) $R \operatorname{tg} \theta (\csc \theta + 1)$
 c) $R \operatorname{tg} \theta (\csc \theta + 1)$
 d) $R \operatorname{tg} \theta (\csc \theta + 1)$
 e) $R \operatorname{tg} \theta (\csc \theta + 1)$



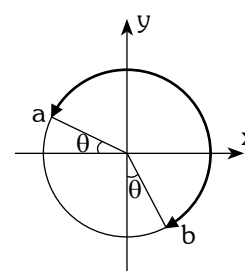
10. Siendo ABCD cuadrado, calcular $\operatorname{ctg} \theta$, si $C(-2; -5)$

- a) -1,2
 b) 1,2
 c) -1,4
 d) 1,4
 e) 0,2



11. Del gráfico, hallar: $E = \frac{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} b}{\sec^2 a - 1}$

- a) 1
 b) -1
 c) 0
 d) -2
 e) 2



12. La expresión simplificada de:

$$\left[\frac{1}{4} \cos^2 x \right] \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)$$

- a) $\cos x$ b) $4 \cos^2 x$ c) $4 \sin^2 x$
d) $\sin x$ e) $4 \sin x \cos x$

13. Si: $\sin^2 x + 4 \cos x = -4$. Entonces $\cos x$, es igual a:

- a) 5 b) 4 c) 1
d) -1 e) a y d

14. Si: $\operatorname{tg} 14^\circ = y$ ($\operatorname{tg} 52^\circ - \operatorname{tg} 38^\circ$). Hallar el valor de y .

- a) $2/5$ b) $3/4$ c) 2
d) $1/2$ e) $5/2$

15. Calcular:

$$E = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 20^\circ \operatorname{tg}^2 40^\circ}}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ}$$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $1/2$
d) 2 e) $\sqrt{2}$

16. Reducir:

$$E = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \csc(5\pi + x) \cdot \operatorname{ctg}(4\pi + x) \cdot \sec(3\pi - x)$$

- a) $-\sec x$ b) $-\csc x$ c) -1
d) $-\operatorname{tg} x$ e) $\operatorname{tg} x$

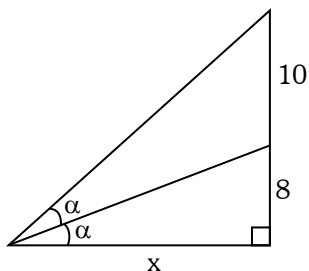
17. Si: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(2K+1)}{3}$ y $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{K}{2}$

El valor de K es:

- a) $-2/7$ b) $7/2$ c) $-7/2$
d) $3/7$ e) $7/3$

18. De acuerdo con la gráfica, calcular "x".

- a) 9
b) 12
c) 18
d) 24
e) 30



19. Si: $\sin 2a = 0,4$, cuál es el valor de $\sin^4 a + \cos^4 a$

- a) $4/25$ b) $1/5$ c) $0,84$
d) $23/25$ e) $0,96$

20. La suma de las raíces de la ecuación:

$$\cos 2x + \sin^4 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0; \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

- a) $2\pi/5$ b) $\pi/4$ c) $2\pi/3$
d) $5\pi/6$ e) $\pi/3$

21. Si: $3 \sin x + 4 \cos x = 5$. Calcular: $E = \operatorname{tg} x + \frac{1}{4}$

- a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) 1

- d) $2\sqrt{3}$ e) 2

22. Si: $\csc 2x + \csc 4x = \frac{\sin Ax}{\sin Bx \cdot \sin Cx}$

Calcular: $A + B + C$

- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

23. Si: $A + B = 120^\circ$, calcular:

$$E = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin A \sin B$$

- a) $5/4$ b) $3/4$ c) $7/4$
d) $1/2$ e) $1/4$

24. Si: $\alpha + \beta + \delta = \pi$, entonces: $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \delta$, es:

- a) $\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2}$ b) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2}$
c) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{4} \cdot \cos \frac{\delta}{4}$ d) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2}$
e) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{4} \cdot \cos \frac{\delta}{4}$

25. Si A y B son agudos y $\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B = \frac{2}{3}$

Calcular: $\operatorname{ctg}(A+B)$

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
d) $\sqrt{5}$ e) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

26. Calcular la suma de los senos de 3 ángulos en progresión aritmética de razón $\frac{2\pi}{3}$.

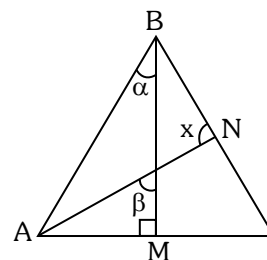
- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

27. Calcular: $E = \sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ - 4 \cos 20^\circ$

- a) 0,125 b) 0,25 c) 0,5
d) 1 e) 1,5

28. De la figura $AB=BC$, y además AN y BM son bisectrices los ángulos BAC y ABC , respectivamente. Si: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$, entonces el valor de "x" es:

- a) 150°
b) 120°
c) 135°
d) 105°
e) 127°



29. Los lados de un triángulo están representados por 3 números impares consecutivos, si el mayor ángulo mide 120° . Indicar el perímetro.

- a) 13 b) 15 c) 19
d) 21 e) 23