27 Identidades trigonométricas II

Objetivos

- Resolver correcta y rápidamente ejercicios tipo condicionales; aplicando las identidades trigonométricas fundamentales.
- Usar correctamente las identidades auxiliares.

<u>Tipo Condicionales</u>:

1. Siendo:

$$\text{senx.cotx} + \text{cosx} = 1$$

hallar el valor de "x" si es agudo.

<u>Resolución</u>:

En la condición, pasando a senos y cosenos:

$$\text{senx.cotx} + \text{cosx} = 1$$

$$\text{senx.}\frac{\cos x}{\text{senx}} + \text{cosx} = 1$$

Reduciendo:

$$\text{cosx} + \text{cosx} = 1 \rightarrow 2\text{cosx} = 1$$

$$\text{cosx} = \frac{1}{2} \rightarrow \therefore x = 60°$$

2. Siendo:

$$\text{tanx} - \text{cotx} = \sqrt{7}$$

calcular:

$$C = \tan^2 x + \cot^2 x$$

<u>Resolución</u>:

En la condición, elevando al cuadrado:

$$\text{tanx} - \text{cotx} = \sqrt{7}$$

$$(\text{tanx} - \text{cotx})^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$\tan^2 x - 2\underbrace{\tan x.\cot x}_{1} + \cot^2 x = 7$$

$$\tan^2 x - 2 + \cot^2 x = 7 \rightarrow \underbrace{\tan^2 x + \cot^2 x}_{C} = 9$$

$$\therefore C = 9$$

3. Siendo:

$$\text{senx} + \text{cosx} = \sqrt{\frac{7}{6}}$$

calcular:

$$C = \text{senx.cosx}$$

<u>Resolución</u>:

Para formar "senx.cosx"; elevamos al cuadrado la condición así:

$$\text{senx} + \text{cosx} = \sqrt{\frac{7}{6}}$$

$$(\text{senx} + \text{cosx})^2 = \left(\sqrt{\frac{7}{6}}\right)^2$$

Desarrollando: $\underbrace{\text{sen}^2 x + 2\text{senx.cosx} + \cos^2 x}_{1} = \frac{7}{6}$

Quedaría:

$$1 + 2\text{senx.cosx} = \frac{7}{6} \rightarrow 2\text{senx.cosx} = \frac{1}{6}$$

$$\underbrace{\text{senx}.\cos x}_{C} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore C = \frac{1}{12}$$

4. Siendo:

$$\text{tanx} + \text{cotx} = 3$$

calcular:

$$C = \text{sen}^3 x.\text{cosx} + \text{senx}.\cos^3 x$$

<u>Resolución</u>:

Pasamos la condición a senos y cosenos:

$$\text{tanx} + \text{cotx} = 3$$

$$\frac{\text{senx}}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{senx}} = 3 \rightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x.\text{senx}} = 3$$

$$\frac{1}{\text{senx}.\cos x} = 3 \rightarrow \text{senx.cosx} = \frac{1}{3}$$

Piden:

$$C = \text{sen}^3 x.\text{cosx} + \text{senx}.\cos^3 x$$

Factorizando:

$$C = \text{senx.cosx}(\underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1}) \rightarrow C = \underbrace{\text{senx}.\text{cosx}}_{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore C = \frac{1}{3}$$

Identidades auxiliares

1.	$\tan x + \cot x = \sec x.\csc x$
2.	$(\operatorname{sen}x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\operatorname{sen}x.\cos x$
3.	$\operatorname{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\operatorname{sen}^2x.\cos^2x$
4.	$\operatorname{sen}^6x + \cos^6x = 1 - 3\operatorname{sen}^2x.\cos^2x$

Veamos algunas aplicaciones en los siguientes ejemplos:

1. Reducir: $C = (\sec x.\csc x - \tan x)(\tan x + \cot x)$

   Resolución:
   En la expresión note los cambios:

   $$C = (\underbrace{\sec x.\csc x}_{\tan x+\cot x} - \tan x)(\underbrace{\tan x + \cot x}_{\sec x.\csc x})$$
   $$C = (\tan x + \cot x - \tan x)\sec x.\csc x$$
   $$C = \cot x.\sec x.\csc x$$

   Pasando a senos y cosenos:

   $$C = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}.\frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

   Reduciendo:

   $$C = \frac{1}{\operatorname{sen}^2x} \rightarrow \therefore\ C = \csc^2x$$

2. Siendo: $\tan x + \cot x = \sqrt{6}$
   calcular: $C = \operatorname{sen}^6x + \cos^6x$

   Resolución:
   En la condición:

   $$\tan x + \cot x = \sqrt{6} \quad \rightarrow \sec x.\csc x = \sqrt{6}$$
   $$\rightarrow \operatorname{sen}x\ .\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

   En la expresión pedida:

   $$C = \operatorname{sen}^6x + \cos^6x$$
   $$C = 1 - 3\underbrace{\operatorname{sen}^2x.\cos^2x}_{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}$$
   $$\rightarrow C = 1 - 3.\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2}$$
   $$\therefore\ C = \frac{1}{2}$$

3. Siendo:

   $$\operatorname{sen}x + \cos x = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

   calcular:

   $$C = \operatorname{sen}^4x + \cos^4x$$

   Resolución:
   En la condición, elevando al cuadrado:

   $$\operatorname{sen}x + \cos x = \sqrt{\frac{5}{4}}$$
   $$\underbrace{(\operatorname{sen}x + \cos x)^2}_{1+2\operatorname{sen}x.\cos x} = \frac{5}{4}$$
   $$2\operatorname{sen}x.\cos x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen}x.\cos x = \frac{1}{8}$$

   Piden:

   $$C = \operatorname{sen}^4x + \cos^4x$$
   $$C = 1 - 2\underbrace{\operatorname{sen}^2x.\cos^2x}_{\left(\frac{1}{8}\right)^2} \rightarrow C = 1 - 2\frac{1}{64} = 1 - \frac{1}{32}$$
   $$\therefore\ C = \frac{31}{32}$$

Test de Aprendizaje

1. Reducir: $C = \sec x \csc x - \cot x$

2. Reducir:

   $$C = \frac{(\operatorname{sen}x + \cos x)^2 - 1}{2\cos x}$$

3. Reducir:

$$C=\frac{sen^4x + cos^4x - 1}{2sen^2x}$$

4. Hallar "n" en la igualdad:

$$(secx\,cscx - 2cotx)tanx = tan^n x - 1$$

5. Si: $tanx + cotx = \sqrt{6}$, calcular: $C = tan^2x + cot^2x$

6. Reducir: $K = secx.cscx - cotx$

7. Si: $tanx + cotx = 3$; calcule: $K = secx.cscx$

8. Hallar:

$$K = \frac{sen^4x + cos^4x + 1}{sen^6x + cos^6x + 2}$$

9. Reducir: $K = (senx + cosx)^2 + (senx - cosx)^2$

10. Si: $3senx + 4cosx = 5$; halle "senx"

Practiquemos

1. Hallar el valor agudo de "x" que verifica:

$$sen^2x.cotx.cscx = 0,5$$

a) 37° b) 53° c) 30°
d) 60° e) 45°

2. Hallar el valor agudo de "x" que cumple:

$$tanx.secx.senx = 3$$

a) 37° b) 53° c) 30°
d) 60° e) 45°

3. Hallar el valor agudo de "x" que cumple:

$$\frac{sec\,x + tan\,x + 1}{csc\,x + cot\,x + 1} = 1$$

a) 30° b) 45° c) 37°
d) 53° e) 60°

4. Hallar "x" agudo que cumple:

$$\frac{sec\,x + senx}{csc\,x + cos\,x} = \sqrt{3}$$

a) 30° b) 60° c) 45°
d) 37° e) 15°

5. Siendo: $\tan x - \cot x = \sqrt{3}$
calcular: $C = \tan^2 x + \cot^2 x$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

6. Siendo: $\tan x + \cot x = 5$
calcular: $L = \tan^2 x + \cot^2 x$

a) 25 b) 23 c) 27
d) 7 e) 3

7. Siendo:

$$\operatorname{sen}x + \cos x = \sqrt{\frac{9}{8}}$$

calcular: $C = \operatorname{sen}x.\cos x$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{16}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{16}$

8. Siendo:

$$\operatorname{sen}x - \cos x = \frac{1}{2}$$

calcular: $L = \operatorname{sen}x.\cos x$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

9. Siendo: $\operatorname{sen}x + \cos x = n$

hallar: $C = \tan x + \cot x$

a) $\frac{2}{n^2-1}$ b) $\frac{1}{n^2-1}$ c) $\frac{2}{n^2+1}$
d) $\frac{1}{n^2+1}$ e) $\frac{2n}{n^2+1}$

10. Siendo: $\operatorname{sen}x - \cos x = n$

hallar: $L = \sec x - \csc x$

a) $\frac{n}{n^2-1}$ b) $\frac{2n}{1-n^2}$ c) $\frac{2n}{n^2-1}$
d) $\frac{n}{1-n^2}$ e) $\frac{2n^2}{1-n^2}$

11. Reducir: $C = (\sec x.\csc x - \cot x)\cos x$

a) senx b) cosx c) senx.cosx
d) $\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x$ e) 1

12. Reducir: $L = (\sec x.\csc x + 2\tan x)\tan x - 1$

a) $2\tan^2 x$ b) $3\tan^2 x$ c) $2\cot^2 x$
d) $3\cot^2 x$ e) 1

13. Siendo: $\tan x + \cot x = 6$
calcular: $C = (\operatorname{sen}x + \cos x)^2$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$
d) 2 e) $\frac{5}{3}$

14. Siendo: $\tan x + \cot x = 4$
calcular: $L = (\operatorname{sen}x - \cos x)^2$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{16}$

15. Siendo: $\tan x + \cot x = 6$
calcular: $C = (\operatorname{sen}x + \cos x)^6$

a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{16}{9}$ c) $\frac{64}{9}$
d) $\frac{64}{27}$ e) $\frac{16}{27}$

16. Siendo: $\tan x + \cot x = 3$
calcular: $L = (\operatorname{sen}x - \cos x)^4$

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{8}{9}$

17. Simplificar:

$$C = \frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x}{3}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{24}$

18.Simplificar:

$$L = \frac{sen^4x + cos^4x + 3}{sen^6x + cos^6x + 5}$$

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

19.Siendo: tanx + cotx = 3

calcular: $C = sen^2x.tanx + cos^2x.cotx$

a) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{13}{3}$ c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{7}{8}$

20.Siendo: tanx + cotx = 4

calcular: $L = sen^4x.tanx + cos^4x.cotx$

a) $\frac{13}{16}$ b) $\frac{15}{16}$ c) $\frac{17}{4}$

d) $\frac{11}{4}$ e) $\frac{13}{4}$

Autoevaluaciòn

1. En trigonometría se definen tres líneas trigonométricas auxiliares; llamadas: verso, coverso y exsecante; denotadas y definidas por:

$$vers\theta = 1 - cos\theta$$
$$cov\theta = 1 - sen\theta$$
$$exsec\theta = sec\theta - 1$$

según lo anterior, reducir:

$$C = \frac{vers^2\theta + cov^2\theta - 4}{(1 + sen\theta)^2 + (1 + cos\theta)^2 - 1}$$

a) 1 b) -1 c) 2

d) -2 e) $-\frac{1}{2}$

2. Demostrar que:

$$(vers\theta + cov\theta - 1)^2 = 2vers\theta.cov\theta$$

3. Simplificar:

$$C = \frac{(vers^2\theta + cov^2\theta - 1)^2}{vers\theta \,.\, cov\theta}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 16

4. Siendo:

$$tanx + cotx = 3$$

calcular:

$$L = \frac{sec\,x + csc\,x}{sec\,x - csc\,x}$$

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) 3

d) $\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{5}$

5. Siendo:

$$f(tanx + cotx) = \frac{sen^4x + cos^4x}{sen^6x + cos^6x}$$

calcular: $f(\sqrt{6})$

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

d) 3 e) $\frac{3}{2}$

Tarea domiciliaria

1. Demostrar que:

$$\tan x + \cot x = \sec x.\csc x$$

2. Demostrar que:

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x.\csc^2 x$$

3. Demostrar que:

$$\sec x.\csc x - \tan x = \cot x$$

4. Demostrar que:

$$\sec^2 x.\csc^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x + 1$$

5. Demostrar que:

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 1 = -2\text{sen}^2 x.\cos^2 x$$

6. Demostrar que:

$$\frac{\text{sen}^6 x + \cos^6 x - 1}{\text{sen}^2 x} = -3\cos^2 x$$

7. Demostrar que:

$$\frac{\text{sen}^4 x + \cos^4 x + 1}{\text{sen}^6 x + \cos^6 x + 1} = \frac{2}{3}$$

8. Demostrar que:

$$\frac{\text{sen}^4 x + \cos^4 x + 3}{\text{sen}^6 x + \cos^6 x + 5} = \frac{2}{3}$$

9. Demostrar que:

$$(1 + \text{sen}x + \cos x)^2 \,\text{cov}x.\text{vers}x = 2\text{sen}^2 x.\cos^2 x$$

10. Demostrar que:

$$\frac{(1 - \text{sen}x + \cos x)^2 \text{vers}x}{\text{cov}\,x} = 2\text{sen}^2 x$$

11. Demostrar que:

$$\text{sen}^8 x + \cos^8 x = 1 - 4\text{sen}^2 x.\cos^2 x + 2\text{sen}^4 x.\cos^4 x$$

12. Demostrar que:

$$\sec^4 x + \csc^4 x - \sec^4 x.\csc^4 x = -2\sec^2 x.\csc^2 x$$

13. Simplificar:

$$C = (\sec x.\csc x - \cot x)\csc x$$

a) 1 b) cosx c) senx
d) $\sec^2 x$ e) secx

14. Reducir:

$$C = (\sec x.\csc x - \tan x)\sec x$$

a) senx b) cscx c) tanx
d) cotx e) 1

15. Simplificar:

$$C = \sec^2 x.\csc^2 x - \cot^2 x - \tan^2 x$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
d) -2 e) -1

16. Reducir:

$$C = \sec^2 x.\csc^2 x - \tan^2 x - 1$$

a) $\sec^2 x$ b) $\csc^2 x$ c) $\tan^2 x$
d) $\cot^2 x$ e) 1

17. Simplificar:

$$C = \frac{\text{sen}^4 x + \cos^4 x}{2} - \frac{\text{sen}^6 x + \cos^6 x}{3}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$
d) $-\frac{1}{6}$ e) $-\frac{1}{2}$

18. Reducir:

$$C = 3(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) - 2(\text{sen}^6 x + \cos^6 x)$$

a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) $\frac{1}{2}$

19. Reducir:

$$C = (\text{sen}^2 x - \cos^2 x)^2 - 1$$

a) $\text{sen}^2 x.\cos^2 x$ b) $-\text{sen}^2 x.\cos^2 x$
c) $2\text{sen}^2 x.\cos^2 x$ d) $-2\text{sen}^2 x.\cos^2 x$
e) $-4\text{sen}^2 x.\cos^2 x$

20. Reducir:

$$C = 3(\text{sen}^2 x - \cos^2 x)^2 - 4(\text{sen}^6 x + \cos^6 x)$$

a) 1 b) 2 c) -1
d) -2 e) 0

21. Siendo: $\tan x + \cot x = 6$

calcular: $C = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1

d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{5}{3}$

22. Siendo: $\tan x + \cot x = 4$
calcular: $C = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{12}$

23. Siendo: $\tan x + \cot x = \sqrt{6}$
calcular: $C = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{12}$

24. Si se sabe que: $\tan x + \cot x = 2\sqrt{2}$
calcular: $C = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{4}$ e) 1

25. Siendo: $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{2}$

calcular: $C = \operatorname{vers} x . \operatorname{cov} x$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{16}$