

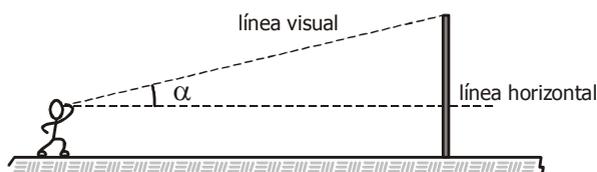
## Objetivos

- Reconocer los ángulos verticales, ya sean de elevación o de depresión; así como su correcta representación gráfica.
- Adaptar la teoría de razones trigonométricas de ángulos agudos y sus diversas partes, a la resolución de ejercicios que tienen que ver con los ángulos de elevación y depresión.

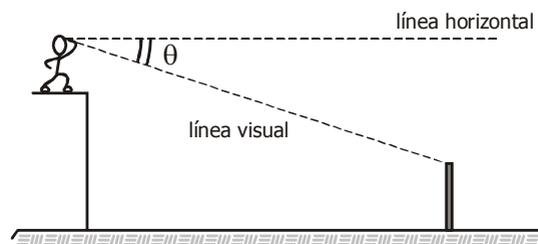
## Definición

Los ángulos verticales son aquellos que están ubicados en un plano vertical y que son formados por una línea visual y una línea horizontal, como resultado de haberse efectuado una observación.

Estos ángulos pueden ser: ángulos de elevación o ángulos de depresión, dependiendo de la ubicación del objeto a observar.



$\alpha$ : ángulo de elevación



$\theta$ : ángulo de depresión

No olvidarse que para dibujar los ángulos de elevación o de depresión, debe trazarse la visual y la horizontal correspondiente. Represente a manera de práctica las siguientes situaciones:

- Un joven de estatura "h" divisa lo alto de una torre de altura "H" con un ángulo de elevación "α".



- Desde lo alto de un edificio se vé un objeto en el suelo con un ángulo de depresión "β".



## Test de Aprendizaje

1. Una hormiga está alejada 40 m de un poste. Si el ángulo de elevación para lo alto del poste es  $37^\circ$ , determinar la longitud de la visual.
2. Si la elevación angular para lo alto de una torre es de  $30^\circ$  y la visual mide 20m, hallar la altura de la torre.

- Desde lo alto de un acantilado se observa un bote con ángulo de depresión de  $37^\circ$ . Calcular la longitud de la visual, si la altura del acantilado es 18m.
- Un niño de 1m observa lo alto de un árbol con ángulo de elevación de  $45^\circ$ . Calcular la altura del árbol, si la distancia que separa al niño y al árbol es 2m.
- Desde un punto en tierra se divisa la parte alta de una torre con ángulo de elevación  $\theta$ . Si la distancia de separación se reduce a la mitad, el nuevo ángulo de elevación es el complemento de  $\theta$ . Hallar la distancia inicial de separación, si la altura de la torre es  $5\sqrt{2}$
- Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste de 24 m con un ángulo de elevación de  $37^\circ$ . ¿A qué distancia del poste se encuentra el punto de observación?
- Desde lo alto de un edificio de 40 m se ve un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de  $53^\circ$ . ¿A qué distancia se encuentra el objeto de la base del edificio?
- Grafique lo más claro posible: "Un niño de estatura "h" divisa los ojos de su padre con un ángulo de elevación " $\alpha$ " y sus pies con un ángulo de depresión " $\beta$ ".
- Grafique: "Desde lo alto de un faro se ven dos barcos, a un mismo lado del faro, con ángulos de depresión " $\alpha$ " y " $\beta$ " ( $\alpha < \beta$ )"
- Un niño observa lo alto del poste de luz y nota que su sombra es el triple de su estatura. Si su estatura es 1,2 m y está a 2,4 m del poste, ¿cuál es la altura del poste?



## Practiquemos



- Una persona de 1,7 m de estatura divisa lo alto de un edificio con un ángulo de elevación de  $37^\circ$ . Si la persona está a 24 m del edificio, ¿cuál es la altura del edificio?  
 a) 33,7 m      b) 19,7      c) 27,7  
 d) 28,7      e) 37,7
- Desde lo alto de un muro de 2 m de alto, se vé lo alto de un edificio con un ángulo de elevación de  $53^\circ$ . Si el muro está a 36 m del edificio, ¿cuál es la altura del edificio?  
 a) 50 m      b) 48      c) 56  
 d) 64      e) 72
- Desde lo alto de una casa de 7,5 m de altura se ve lo alto de un edificio con un ángulo de elevación de  $16^\circ$ . Si el edificio tiene una altura de 21,5 m, ¿qué distancia separa a la casa del edificio?  
 a) 21 m      b) 28      c) 48  
 d) 96      e) 24
- Una persona de 2 m de estatura está frente a un rascacielo de 98 m de altura, divisando su parte más alta con un ángulo de elevación de  $74^\circ$ . ¿A qué distancia se encuentra la persona del rascacielo?  
 a) 40 m      b) 14      c) 21  
 d) 28      e) 35

5. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de una torre con un ángulo de elevación de  $15^\circ$ . Si nos acercamos 40 m, el ángulo de elevación se duplica, ¿cuánto mide la torre?

- a) 40 m      b) 24      c) 32  
d) 30      e) 20

6. Desde un punto en tierra se ve lo alto de un poste con un ángulo de elevación de  $8^\circ$ . Si nos acercamos 50 m, el ángulo de elevación se duplica. ¿Cuál es la altura del poste?

- a) 14 m      b) 7      c) 48  
d) 24      e) 36

7. Desde lo alto de un edificio se ve un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de  $37^\circ$ . Si el objeto se encuentra a 36 m de la base del edificio, ¿cuál es la altura del edificio?

- a) 36 m      b) 27      c) 48  
d) 72      e) 96

8. Desde lo alto de un faro se ve un barco, a 24 m de su base, con un ángulo de depresión de  $53^\circ$ . ¿Cuál es la altura del faro?

- a) 18 m      b) 12      c) 32  
d) 36      e) 48

9. Desde lo alto de un faro se observan dos barcos en direcciones opuestas con ángulos de depresión de  $16^\circ$  y  $37^\circ$ . Si la altura del faro es de 21 m, ¿qué distancia separa a los barcos?

- a) 90 m      b) 96      c) 98  
d) 100      e) 120

10. Desde lo alto de un poste se observan en direcciones opuestas, a dos objetos en el suelo con ángulos de depresión de  $45^\circ$  y  $16^\circ$ . Si el poste mide 14 m, ¿qué distancia separa a los objetos?

- a) 72 m      b) 56      c) 46  
d) 31      e) 62

11. Un niño de 1 m de estatura divisa los ojos de su padre; de 1,8 m de estatura, con un ángulo de elevación " $\alpha$ " y sus pies con un ángulo de depresión " $\beta$ ".

Calcular:

$$C = \tan\alpha \cdot \cot\beta$$

- a) 0,2      b) 0,4      c) 0,6  
d) 0,8      e) 0,9

12. Desde lo alto de un edificio de 16 m de altura se ve la parte alta y baja de una casa de 6 m de altura con ángulos de depresión " $\alpha$ " y " $\beta$ " respectivamente.

Calcular:  $C = \tan\beta \cdot \cot\alpha$

- a) 1,2      b) 1,4      c) 1,6  
d) 1,3      e) 1,5

13. Desde un punto en tierra se ve lo alto de un poste con un ángulo de elevación de  $16^\circ$ . Si nos acercamos una distancia igual al doble de la altura del poste, el ángulo de elevación es " $\theta$ ". Calcular " $\tan\theta$ ".

- a) 0,7      b) 0,6      c) 0,5  
d) 0,4      e) 0,3

14. Desde un punto en tierra se ve lo alto de un edificio con un ángulo de elevación de  $53^\circ$ . Si nos alejamos una distancia igual a la mitad de la altura del edificio, el ángulo de elevación para su parte más alta sería " $\beta$ ". Calcular " $\tan\beta$ ".

- a) 0,9      b) 0,8      c) 0,7  
d) 0,6      e) 0,5

15. Desde un punto en tierra se ve lo alto de una torre con un ángulo de elevación " $\alpha$ ". Si nos acercamos 24 m el ángulo de elevación es " $\theta$ ", cumpliéndose que:

$$\cot\alpha - \cot\theta = \frac{3}{2}$$

Calcular la altura de la torre.

- a) 16 m      b) 12      c) 18  
d) 20      e) 24

16. Desde un punto en tierra se ve lo alto de un edificio con un ángulo de elevación " $\theta$ ". Después de acercarnos 32 m, el ángulo de elevación es " $\beta$ ", cumpliéndose que:

$$\cot\theta - \cot\beta = \frac{4}{5}$$

¿cuál es la altura del edificio?

- a) 48 m      b) 40      c) 80  
d) 64      e) 30

17. Desde lo alto de un faro se divisan dos barcos con ángulos de depresión " $\alpha$ " y " $90^\circ - \alpha$ "; a distancias de su base iguales a 90 y 40 m respectivamente.

Calcular " $\tan\alpha$ ".

- a)  $\frac{1}{3}$       b) 3      c)  $\frac{2}{3}$   
d)  $\frac{3}{2}$       e)  $\frac{4}{3}$

18. Desde dos puntos en tierra ubicados en extremos opuestos respecto a una torre, a distancias de su base iguales a 10 y 40 m, los ángulos de elevación para su parte más alta son " $\theta$ " y " $90^\circ - \theta$ " respectivamente. Calcular " $\tan\theta$ ".

- a)  $2\sqrt{2}$       b) 4      c)  $\sqrt{2}$   
d) 2      e)  $3\sqrt{2}$

19. Desde un punto del suelo se ve la parte alta del sexto piso de un edificio con un ángulo de elevación " $\theta$ "; y desde lo alto del octavo piso se ve el punto de observación anterior con un ángulo de depresión " $90^\circ - \theta$ ". Calcular " $\tan\theta$ ".

- a)  $\sqrt{3}$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       c)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 d)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. Desde un punto del suelo se divisan lo alto del cuarto piso y la parte baja del décimo piso de un edificio; con ángulos de elevación " $\beta$ " y " $90^\circ - \beta$ " respectivamente. Calcular " $\tan\beta$ ".

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       c)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$   
 d)  $\frac{3}{2}$       e)  $\frac{2}{3}$



## Autoevaluación



1. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de una torre con un ángulo de elevación " $\alpha$ ". Nos acercamos una distancia " $L$ " y el ángulo de elevación es  $45^\circ$ ; pero si volvemos a acercarnos otra distancia " $L$ ", el ángulo de elevación sería " $\beta$ ". Calcular:

$$E = \cot\alpha + \cot\beta$$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

2. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación " $\theta$ ". Si nos acercamos una distancia igual a la altura del poste, el ángulo de elevación sería " $90^\circ - \theta$ ". Calcular:

$$E = \cot^2\theta + \tan^2\theta$$

- a) 3      b) 4      c) 5  
 d) 7      e) 9

3. Un explorador inicia su aventura en un punto "A" de la superficie horizontal, recorriendo en ella 100 m para luego subir una pendiente inclinada un ángulo de  $37^\circ$  respecto a la horizontal. Si sobre la pendiente recorre 100 m, de donde divisa el punto "A" con un ángulo de depresión " $\theta$ ", ¿cuál es el valor de " $\tan\theta$ "?

- a)  $\frac{1}{2}$       b)  $\frac{1}{3}$       c)  $\frac{1}{4}$   
 d)  $\frac{1}{6}$       e)  $\frac{1}{9}$

4. Desde el punto medio del segmento que separa a dos torres de diferentes alturas, los ángulos de elevación para sus partes más altas son complementarios. Calcular el producto de las cotangentes de los ángulos de depresión con que se ven la base de cada torre desde lo alto de la torre opuesta.

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 9

5. Dados los números:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ; su media aritmética se calcula así:

$$M.A. = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

suponga un edificio de " $n$ " pisos idénticos, tales que desde lo alto de cada uno de ellos se divisa un objeto en el suelo con ángulos de depresión tales que la media aritmética de sus tangentes es igual a siete veces la tangente del ángulo de depresión correspondiente al sexto piso. ¿Cuántos pisos tiene el edificio?

- a) 41      b) 84      c) 81  
 d) 82      e) 83



## Tarea domiciliaria



- A 120 m del pie de un edificio su ángulo de elevación es de  $60^\circ$ , ¿cuál es la altura del edificio?
  - $40\sqrt{3}$  m
  - $60\sqrt{3}$
  - $80\sqrt{3}$
  - $20\sqrt{3}$
  - $120\sqrt{3}$
- A 20 m del pie de un poste, la elevación angular para lo alto del mismo es de  $37^\circ$ . ¿Cuál es la altura del poste?
  - 15 m
  - 12
  - 20
  - 24
  - 25
- Un niño de estatura de 1,5 m; está ubicada a 6 m de una torre y observa su parte más alta con un ángulo de elevación de  $53^\circ$ . ¿Cuál es la altura de la torre?
  - 8,5 m
  - 9,5
  - 10,5
  - 12,5
  - 13,5
- Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte que ha caído hacia el suelo forma con este un ángulo de  $37^\circ$  y la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 30 m?
  - 10 m
  - 60
  - 80
  - 50
  - 90
- Una persona de 2 m de estatura que se ubica a 32 m de una torre de 34 m de altura, divisa la parte más alta de la torre con un ángulo de elevación de:
  - $20^\circ$
  - $15^\circ$
  - $30^\circ$
  - $60^\circ$
  - $45^\circ$
- El ángulo de elevación de la parte superior de una torre es de  $30^\circ$ , acercándose 100 m se encuentra que el ángulo de elevación es de  $60^\circ$ . ¿Cuál es la altura de la torre?
  - 50 m
  - 100
  - $50\sqrt{3}$
  - $100\sqrt{3}$
  - 200
- El ángulo de elevación de un edificio es de  $22^\circ 30'$ . Nos acercamos una distancia "m" y el nuevo ángulo de elevación es de  $45^\circ$ . Hallar "m" si la altura del edificio es de 10 m.
  - 10 m
  - 20
  - $10\sqrt{2}$
  - $10\sqrt{3}$
  - $20\sqrt{2}$
- Un observador se encuentra a 48 m del pie de una torre y el ángulo de elevación para la parte más alta es  $45^\circ$ . ¿Cuánto debe acercarse dicho observador para que el nuevo ángulo de elevación sea de  $53^\circ$ ?
  - 10 m
  - 4
  - 12
  - 16
  - 8
- Un nadador se dirige hacia un faro y lo observa con un ángulo de elevación de  $30^\circ$ , al avanzar 10 m, el nuevo ángulo de elevación se duplica. Hallar la altura del faro.
  - 8,7 m
  - 4,6
  - 9,6
  - 8,6
  - 5,3
- Desde un punto en tierra se observa lo alto del tercer piso de un edificio con un ángulo de elevación " $\alpha$ "; y la parte baja del quinto piso con un ángulo de elevación " $\beta$ ". Hallar:  $\tan\beta/\tan\alpha$ .
  - 12
  - 0,75
  - 1,3
  - 0,3
  - 0,25
- Desde la parte superior de un edificio de seis pisos iguales el ángulo de depresión para un punto en el suelo es " $\beta$ " y desde la parte más alta del cuarto piso el ángulo de depresión es " $\alpha$ ". Calcular: " $\tan\alpha \cdot \cot\beta$ ".
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{2}{3}$
  - $\frac{3}{4}$
  - $\frac{4}{5}$
  - $\frac{5}{6}$
- Una antena de radio está colocada en la azotea de un edificio, a 12 m de distancia del edificio sobre el suelo; los ángulos de elevación de la punta de la antena y de la parte superior del edificio  $53^\circ$  y  $37^\circ$  respectivamente. Hallar la longitud de la antena.
  - 5
  - 7
  - 9
  - 6
  - 10
- Desde lo alto de un acantilado se observa dos barcos en una misma dirección con ángulos de depresión de  $45^\circ$  y  $37^\circ$  respectivamente. Calcular la distancia de separación de los barcos y además la altura del acantilado es de 24 m.
  - 12 m
  - 24
  - 8
  - 64
  - 128
- Una persona colocada a 36 m de una torre, observa su parte más alta con un ángulo de elevación " $\alpha$ " ( $\tan\alpha = 7/12$ ). ¿Qué distancia habría que alejarse para que el ángulo de elevación sea " $\theta$ "; donde:  $\tan\theta = 1/4$ ?
  - 12 m
  - 13
  - 48
  - 24
  - 38

15. Desde un punto en tierra se observa lo alto de un poste de 30 m de altura, con un ángulo de elevación cuya secante es igual a 2,125. Calcular la distancia del punto al poste.
- a) 16 m            b) 32            c) 8  
d) 19            e) N.A.
16. Un edificio tiene diez pisos de 2,5 m cada uno; y desde lo alto del mismo se observa un objeto en tierra con un ángulo de depresión de  $53^\circ$ . ¿A qué distancia de la base del edificio se encuentra el objeto?
- a) 15,75 m        b) 15,25        c) 18,25  
d) 18,75        e) 17,75
17. Desde un punto, ubicado a 36 m de la base de un poste, se observa la parte superior de este con un ángulo de elevación de  $37^\circ$ . ¿Cuánto se tendrá que avanzar para que el nuevo ángulo de elevación tenga una tangente igual a 0,9?
- a) 2 m            b) 3            c) 5  
d) 6            e) 4
18. De lo alto de un edificio de 24 m de altura se divisa una torre con un ángulo de elevación de  $30^\circ$  y la base de la torre con un ángulo de depresión de  $60^\circ$ . Hallar la altura de la torre.
- a) 26 m            b) 28            c) 30  
d) 34            e) 32
19. Una persona de 2 m de estatura observa la base de un poste de luz con un ángulo de depresión de  $30^\circ$  y la parte superior con un ángulo de elevación de  $60^\circ$ . Calcular la altura del poste.
- a)  $4\sqrt{3}$  m        b) 6            c) 4  
d) 8            e)  $6\sqrt{3}$
20. A 20 m de un poste, se ve el foco de la parte superior con un ángulo de elevación que tiene como tangente 0,5. ¿Cuánto habrá que acercarnos al poste con un ángulo de elevación que es el complemento del anterior?
- a) 5 m            b) 10            c) 15  
d) 20            e) 12,5
21. Desde un punto del suelo se observa la parte superior de un poste con un ángulo de elevación " $\alpha$ ", acercándose 5 m hacia el poste el nuevo ángulo de elevación es el complemento de " $\alpha$ ". Si el poste mide 6 m, calcular " $\tan\alpha$ ".
- a)  $\frac{1}{2}$             b)  $\frac{2}{3}$             c)  $\frac{3}{4}$   
d) 2            e)  $\frac{3}{2}$
22. Una persona de 2 m de altura observa la parte superior de un poste con un ángulo de elevación " $\theta$ ", si la persona se acerca 45 m hacia el poste el nuevo ángulo de elevación es " $\phi$ ". Si:  $\cot\theta - \cot\phi = 3$  Calcular la altura del poste.
- a) 13 m            b) 15            c) 17  
d) 19            e) 21
23. Desde la parte superior de una torre se observan dos piedras en el suelo con ángulos de depresión de  $37^\circ$  y  $53^\circ$ . Si la altura de la torre es 12 m y las piedras están en línea recta y a un mismo lado de la base de la torre, calcular la distancia entre las piedras.
- a) 4 m            b) 5            c) 6  
d) 7            e) 8
24. Desde lo alto de un edificio se ve un punto en tierra con un ángulo de depresión " $\alpha$ " y otro punto ubicado a la mitad entre el primer punto y el edificio, con un ángulo de depresión " $90^\circ - \alpha$ ". Calcular " $\cot^2\alpha$ ".
- a) 1            b) 2            c) 3  
d) 5            e) 4
25. Una mosca que está en el suelo observa un pajarito con un ángulo de elevación de  $45^\circ$ . Si la mosca, para llegar donde está el pajarito describe una trayectoria similar al de un cuarto de circunferencia y además esta mosca en su recorrido observa en un determinado momento a la mosca con un ángulo de elevación de  $37^\circ$ . ¿A qué altura se halla la mosca en esta última observación, si el pajarito está a una altura de 2,5m?
- a) 50 cm            b) 60            c) 70  
d) 80            e) 90