15 Cálculo de lados en un triángulo rectángulo

COLEGIO TRILCE • COLEGIO TRILCE • COLEGIO TRILCE • COLEGIO TRILCE • COLEGIO TRILCE • COLEGIO TRILCE • COLEGIO
TRILCE

Objetivos

- Determinar los lados de un triángulo rectángulo en función de un lado conocido y de un ángulo agudo también conocido.

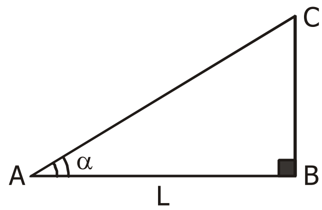
- Adaptar las relaciones determinadas por el cálculo de lados a la resolución de situaciones de características reales.

Cálculo de lados

Es el procedimiento mediante el cual se determinan los lados desconocidos de un triángulo rectángulo en función de un lado conocido y un ángulo agudo también conocido. Para ello, bastará dividir el lado desconocido entre el lado conocido e igualar dicha fracción a una razón trigonométrica del ángulo agudo conocido, para luego despejar el lado que se quiere determinar.

Por ejemplo:

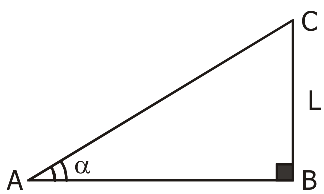
1.



i. $\dfrac{BC}{L} = \tan\alpha \rightarrow BC = L.\tan\alpha$

ii. $\dfrac{AC}{L} = \sec\alpha \rightarrow AC = L.\sec\alpha$

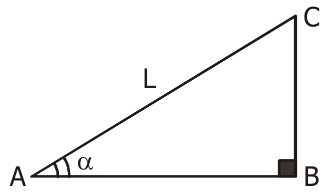
2.



i. $\dfrac{AB}{L} = \cot\alpha \rightarrow AB = L.\cot\alpha$

ii. $\dfrac{AC}{L} = \csc\alpha \rightarrow AC = L.\csc\alpha$

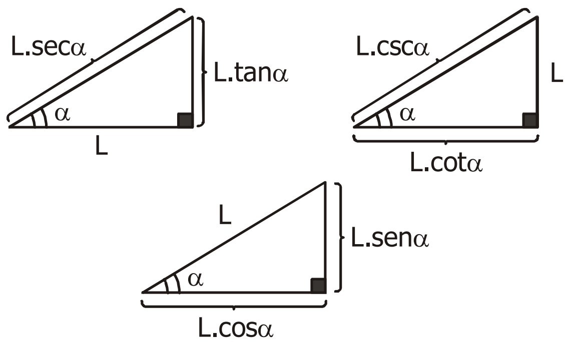
3.



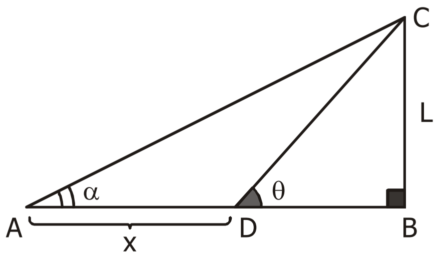
i. $\dfrac{BC}{L} = \text{sen}\alpha \rightarrow BC = L.\text{sen}\alpha$

ii. $\dfrac{AB}{L} = \cos\alpha \rightarrow AB = L.\cos\alpha$

Resumiendo estas situaciones, tenemos:



Por ejemplo, en el gráfico hallemos "x" en función de "L", "θ" y "α".



i. $\triangle_{DBC}$: $\dfrac{DB}{L} = \cot\theta \rightarrow DB = L.\cot\theta$

ii. $\triangle_{ABC}$: $\dfrac{AB}{L} = \cot\alpha \rightarrow AB = L.\cot\alpha$

Pero: $x = AB - DB = L.\cot\alpha - L.\cot\theta$

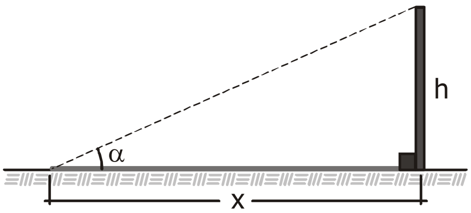
$$\therefore\ x = L(\cot\alpha - \cot\theta)$$

Otro ejemplo:

Un poste de altura "h" proyecta una sombra de longitud "x", notándose que la línea que une el extremo de la sombra con lo alto del poste forma un ángulo "α" con el suelo.

Hallar "x".

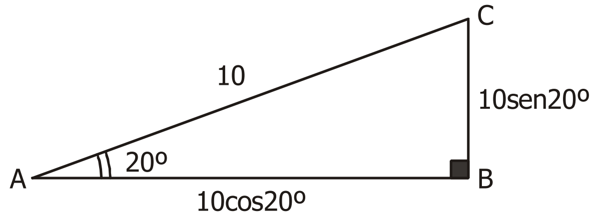
Graficando:



i. $\dfrac{x}{h} = \cot\alpha \rightarrow \therefore\ x = h\cot\alpha$

* Uso de calculadora:

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de los ángulos agudos mide 20°, ¿cuál es su perímetro?



i. $\dfrac{BC}{10} = \text{sen}20° \rightarrow BC = 10\text{sen}20°$

ii. $\dfrac{AB}{10} = \cos20° \rightarrow AB = 10\cos20°$

Luego:

$2p = AC + BC + AB \rightarrow 2p = 10 + 10\text{sen}20° + 10\cos20°$

$2p = 10(1 + \text{sen}20° + \cos20°)$

Pero: sen20° =
cos20° =

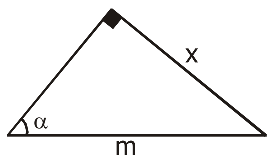
entonces:

2p = 10(1 +)

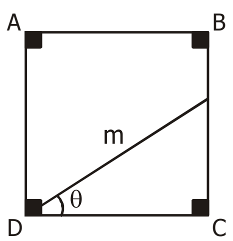
$\therefore$ 2p =

Test de Aprendizaje

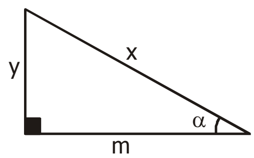
1. Determine "x"



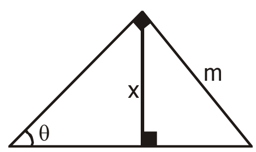
2. Determine el perímetro del cuadrado ABCD.



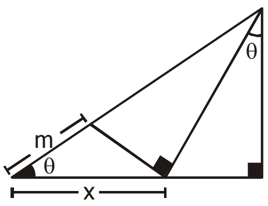
3. Determine "x - y"



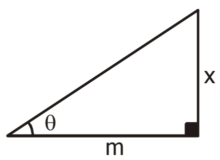
4. Determine "x"



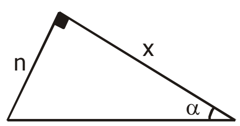
5. Determine "x".



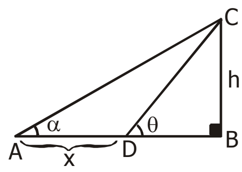
6. Del gráfico, hallar "x" en función de "m" y "θ".



7. Del gráfico, hallar "x" en función de "n" y "α"



8. Del gráfico, hallar "x".



9. Una escalera de longitud "L" está apoyada en la pared formando un ángulo agudo "θ" con el suelo. ¿A qué distancia de la pared se encuentra el punto de apoyo en el suelo?

10. Un edificio de altura "h" forma con los rayos solares un ángulo agudo "θ". ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada?

Practiquemos

1. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}$ = 90°), donde AB = m y $C\hat{A}B$ = α, hallar el lado de mayor longitud.

a) msenα b) mcosα c) mtanα
d) msecα e) mcscα

2. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}$ = 90°), donde BC = n y $A\hat{C}B$ = ϕ, hallar la hipotenusa.

a) nsenϕ b) ncscϕ c) nsecϕ
d) ncosϕ e) ntanϕ

3. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}$ = 90°), donde AB = n y $A\hat{C}B$ = θ, hallar su área en términos de "n" y "θ".

a) $\frac{n^2}{2}\cot\theta$ b) $\frac{n^2}{2}\tan\theta$ c) $\frac{n^2}{2}\cos\theta$

d) $\frac{n^2}{2}\sec\theta$ e) $\frac{n^2}{2}\csc\theta$

4. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B} = 90°$), donde $BC = m$ y $C\hat{A}B = \alpha$, hallar la suma de los catetos.

a) $m(1 + \sec\alpha)$ b) $m(1 + \tan\alpha)$
c) $m(1 + \cot\alpha)$ d) $m(1 + \csc\alpha)$
e) $m(1 + \cos\alpha)$

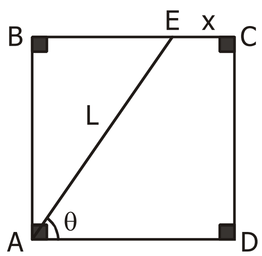
5. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B} = 90°$), se sabe que: $AC = n$ y $A\hat{C}B = \theta$. Halle el perímetro del triángulo.

a) $n(1 + \sec\theta + \tan\theta)$ b) $n(1 + \cot\theta + \csc\theta)$
c) $n(1 + \mathrm{sen}\theta + \cos\theta)$ d) $n(1 + \sec\theta + \cos\theta)$
e) $n(1 + \csc\theta + \mathrm{sen}\theta)$

6. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide "L" y uno de sus ángulos agudos mide "α", ¿cuál es el área del triángulo?

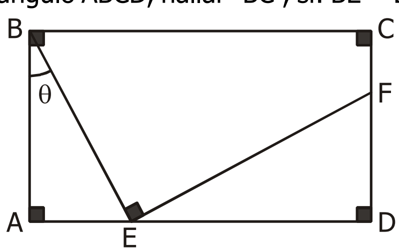
a) $L^2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$ b) $\frac{L^2}{2}.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$
c) $\frac{L^2}{4}.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$ d) $2L^2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$
e) $4L^2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$

7. Si ABCD es un cuadrado, hallar "x" en términos de "L" y "θ".



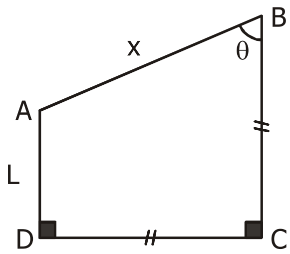
a) $L(1 - \mathrm{sen}\theta)$ b) $L(1 - \cos\theta)$
c) $L(\mathrm{sen}\theta - \cos\theta)$ d) $L(\cos\theta - \mathrm{sen}\theta)$
e) $L(\cot\theta - \tan\theta)$

8. En el rectángulo ABCD, hallar "BC", si: BE = EF = m.



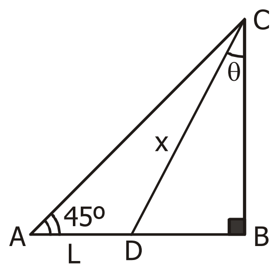
a) $m(\mathrm{sen}\theta + \cos\theta)$ b) $m(\cos\theta - \mathrm{sen}\theta)$
c) $m(\sec\theta - \csc\theta)$ d) $m(\sec\theta + \csc\theta)$
e) $m(\tan\theta + \cot\theta)$

9. En el gráfico, hallar "AB" en función de "L" y "θ".



a) $\frac{L}{\mathrm{sen}\theta + \cos\theta}$ b) $\frac{L}{\mathrm{sen}\theta - \cos\theta}$
c) $\frac{L}{\sec\theta + \csc\theta}$ d) $\frac{L}{\sec\theta - \csc\theta}$
e) $\frac{L}{\tan\theta - \cot\theta}$

10. Del gráfico, hallar "x" en función de "L" y "θ".



a) $\frac{L}{\cos\theta - \mathrm{sen}\theta}$ b) $\frac{L}{\cos\theta + \mathrm{sen}\theta}$
c) $\frac{L}{\mathrm{sen}\theta - \cos\theta}$ d) $\frac{L}{\sec\theta + \csc\theta}$
e) $\frac{L}{\sec\theta - \csc\theta}$

11. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 12 cm y uno de los ángulos agudos mide 26°, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

a) 28,046 cm b) 27,316 c) 31,143
d) 32,027 e) 28,216

12. Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y uno de sus ángulos agudos mide 35°.

a) 26,132 cm b) 24,517 c) 23,927
d) 22,218 e) 20,146

13. Una escalera de longitud 12 m está apoyada en lo alto de un edificio formando con el suelo un ángulo de 54°. ¿Cuál es la altura del edificio?

a) 10,122 m b) 9,708 c) 10,716
d) 9,416 e) 8,132

14. Una escalera de 14 m de longitud está apoyada en un edificio, formando con el suelo un ángulo de 70°. ¿A qué distancia de la base del edificio se encuentra el punto de apoyo de la escalera en el suelo?

a) 3,648 m b) 3,518 c) 4,788
d) 4,168 e) 5,218

15. Desde un punto en tierra ubicado a 40 m de un poste, el ángulo de elevación para su parte más alta es de 24°. ¿Cuál es la altura del poste?

a) 18,216 m b) 17,126 c) 16,103
d) 17,809 e) 18,506

16. Desde lo alto de un edificio de 36 m de altura, se observa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de 25°. ¿A qué distancia de la base del edificio se encuentra el objeto?

a) 70,161 m b) 74,126 c) 75,312
d) 76,102 e) 77,202

17. Desde lo alto de un faro de 12 m de altura se divisa dos barcos en direcciones opuestas con ángulos de depresión de 32° y 50°. ¿Cuál es la distancia entre los barcos?

a) 28,162 m b) 29,273 c) 30,123
d) 31,123 e) 32,716

18. Desde dos puntos en tierra ubicados a un mismo lado de una torre de 24 m de altura, se divisa su parte más alta con ángulos de elevación de 10° y 48°. ¿Cuál es la distancia entre dichos puntos?

a) 114,501 m b) 115,206 c) 132,143
d) 97,203 e) 157,72

19. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de 21° y después de acercanos 14 m el ángulo de elevación se duplica. ¿Cuál es la altura del poste?

a) 8,122 m b) 7,648 c) 7,146
d) 9,368 e) 9,876

20. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un pedestal con un ángulo de elevación de 20° y lo alto de la estatua, sobre dicho pedestal, con un ángulo de elevación de 40°. ¿Cuál es la relación entre la altura del pedestal y la altura de la estatua?

a) 0,618 b) 0,132 c) 0,766
d) 0,516 e) 0,476

Autoevaluaciòn

1. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), se traza $\overline{AD}$ ("D" en $\overline{BC}$), tal que: 3DC = 2BD; $B\hat{C}A = \alpha$ y $D\hat{A}C = \theta$. Calcular:

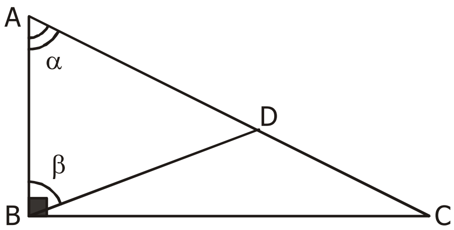
$$E = \tan\alpha . \cot\theta$$

a) $\frac{2}{3}$ b) 2 c) 4

d) 8 e) $\frac{3}{4}$

2. Del gráfico, determine "$\tan\beta$" en función de "α", si:

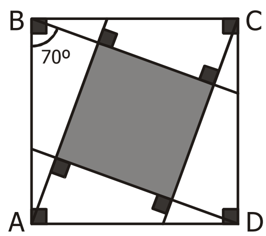
$$\frac{AD}{3} = \frac{DC}{2}$$



a) $\frac{2}{3}\tan\alpha$ b) $\frac{3}{2}\tan\alpha$ c) $\frac{3}{2}\cot\alpha$

d) $\frac{2}{3}\cot\alpha$ e) $\frac{2}{5}\tan\alpha$

3. Si ABCD es un cuadrado de lado 4 cm, calcular el perímetro de la región sombreada con la ayuda de una calculadora.

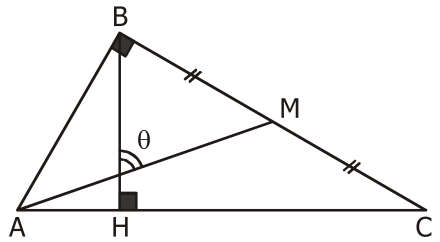


a) 9,563 cm b) 10,163 c) 8,246
d) 12,148 e) 9,126

4. En el análisis matemático se puede comprobar que el valor mínimo que puede tomar la expresión:

$$E = ax + \frac{b}{x}; \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

con "a" y "b" constantes positivas, es $2\sqrt{ab}$. Según esa teoría, en el gráfico adjunto, ¿cuál es el mínimo valor de "tanθ"?



a) 2　　b) $\sqrt{2}$　　c) $2\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$　　e) 4

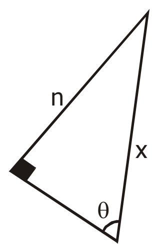
5. Un joven deslumbrado por una chica, divisa sus ojos ... θ". El joven, toma valor y decide acercarse una distancia igual al doble de la diferencia de sus estaturas, notando que el ángulo de elevación es ahora: 90° - θ. Calcular el valor de:

$$C = \frac{\cot\theta + \tan\theta}{\cot^2\theta + \tan^2\theta}$$

a) $\sqrt{2}$　　b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　e) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

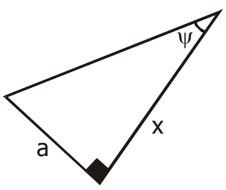
Tarea domiciliaria

1. Determinar "x".



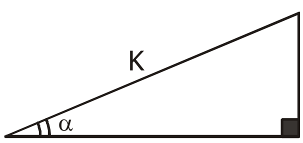
a) nsenθ　　b) ncosθ　　c) ntanθ
d) ncotθ　　e) ncscθ

2. Hallar "x"



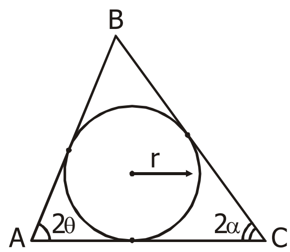
a) atanψ　　b) asenψ　　c) acotψ
d) asecψ　　e) acscψ

3. Hallar el área del triángulo, de la figura mostrada:



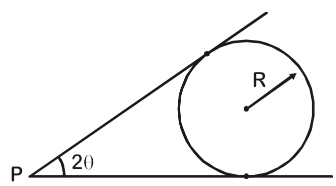
a) K^2senα.cosα　　b) $(K^2/2)$senα.cosα
c) $(K^2/3)$senα.cosα　　d) $(K^2/4)$senα.cosα
e) $(K^2/5)$senα.cosα

4. Hallar "AC".



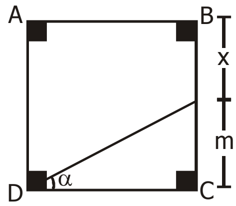
a) rcotθ . cotα　　b) r(cotα - cotθ)
c) r(tanθ + cotα)　　d) r(cotθ + cotα)
e) r(cotθ - cotα)

5. Hallar la distancia mínima del punto "P" a la circunferencia.



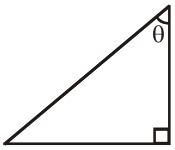
a) Rcscθ　　b) R(cscθ - 1)
c) R(tanθ + 1)　　d) R(cotθ - 1)
e) R(cscθ + 1)

6. Si ABCD es un cuadrado, hallar "x".



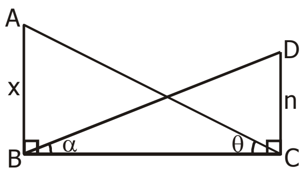
a) m(senα - 1)
b) m(cosα - 1)
c) m(cotα - 1)
d) m(tanα - 1)
e) m(secα - 1)

7. Determine el perímetro del triángulo mostrado:



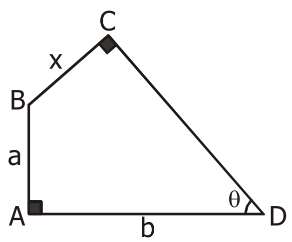
a) m (1 + senθ + cosθ)
b) m (1 + tanθ + secθ)
c) m (1 + cotθ + cscθ)
d) m (senθ + cosθ)
e) m (secθ + cscθ)

8. Del gráfico, hallar "x".



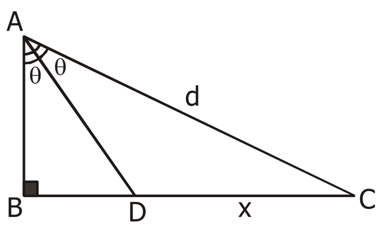
a) nsenαcotθ
b) ncotαtanθ
c) ntanαtanθ
d) nsenαtanθ
e) nsecαcotθ

9. Hallar "x"



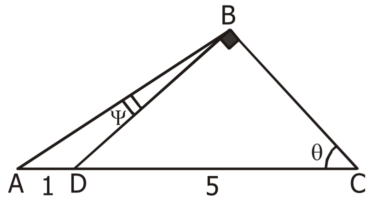
a) senθ + a cosθ
b) bsenθ + cosθ
c) bsenθ - acosθ
d) asenθ + bcosθ
e) asecθ + btanθ

10. Hallar "x"



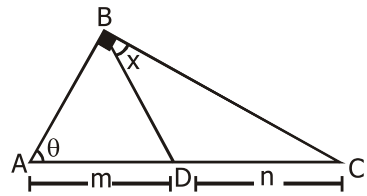
a) tanθ
b) dtanθ
c) dcotθ
d) dsenθ
e) dcosθ

11. Hallar "tanψ" en función de "θ". (sug.: cotθ = $\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$)



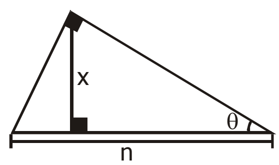
a) $\frac{1}{2}$tanθ
b) $\frac{1}{3}$tanθ
c) $\frac{1}{4}$tanθ
d) $\frac{1}{5}$tanθ
e) $\frac{1}{6}$cotθ

12. En la figura, determinar "tanx". (sug.: cotθ = $\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$)



a) $\frac{n}{m}\tan\theta$
b) $\frac{m}{n}\cot\theta$
c) $\frac{n}{m}\cot\theta$
d) $\frac{m}{n}\tan\theta$
e) $\frac{m}{2n}\tan\theta$

13. Hallar "x".



a) nsen$^2\theta$
b) ncos$^2\theta$
c) nsenθ
d) nsenθcosθ
e) ntanθ

14. Desde un punto en tierra ubicado a 20 m de un edificio, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de 26°, ¿cuál es la altura del edificio?

a) 8,7674 m
b) 9,7547
c) 17,9759
d) 22,252
e) 45,6234

15. Desde lo alto de un edificio de 30 m de altura se ve un objeto en tierra con un ángulo de depresión de 38°, ¿a qué distancia de la base del edificio, se encuentra el objeto?

a) 23,4386 m
b) 23,6403
c) 18,4698
d) 38,3982
e) 48,7281

16. Desde lo alto de una torre de 24 m de altura se divisa un avión que se encuentra a 100 m de altura, con un ángulo de elevación de 54°. ¿Cuál es la distancia entre el avión y la parte alta de la torre, en ese momento?

a) 80,5805 m b) 112,2859 c) 90,8412
d) 53,3951 e) 93,9431

17. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de una torre con un ángulo de elevación de 10°. Si nos acercamos 20 m, el ángulo de elevación se duplica. ¿Cuál es la altura de la torre?

a) 13,1615 m b) 12,1206 c) 6,8404
d) 9,1624 e) 8,1632

18. Desde un punto en tierra ubicado a 40 m de un gran hotel, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de 37°, ¿cuál es, aproximadamente, la altura del hotel?

a) 30,1422 m b) 32,1326 c) 42,1672
d) 28,1724 e) 26,1332

19. Desde lo alto de una torre se divisa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión "a". Si la torre mide "h", ¿a qué distancia de su base se encuentra el objeto?

a) h.cosa b) h.cota c) h.sena
d) h.tana e) h.seca

20. Desde un punto en tierra se ve lo alto de un poste con un ángulo de elevación "θ". Nos acercamos una distancia "d" y el ángulo de elevación es ahora "β". ¿Cuál es la altura del poste?

a) $\dfrac{d}{\tan\theta - \tan\beta}$ b) $\dfrac{d}{\cot\theta - \cot\beta}$

c) $\dfrac{d}{\sec\theta - \sec\beta}$ d) $d(\tan\theta - \tan\beta)$

e) $d(\cot\theta - \cot\beta)$

21. Desde lo alto de un faro de 20 m de altura se divisan dos barcos en direcciones opuestas con ángulos de depresión de 24° y 72°. ¿Qué distancia separa a los barcos?

a) 51,42 m b) 72,36 c) 49,64
d) 61,26 e) 56,38

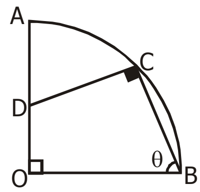
22. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B}$ = 90°) se inscribe un cuadrado de lado 4 cm, tal que un lado descansa sobre $\overline{AC}$. Si: $A\hat{C}B$ = 20°, ¿cuál es la longitud de $\overline{AC}$?

a) 12,38 cm b) 15,27 c) 16,45
d) 17,26 e) 18,72

23. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se sabe que BC = 10 cm y $A\hat{B}C$ = 40°. Calcular la longitud del radio del círculo inscrito en dicho triángulo.

a) 3,17 cm b) 2,17 c) 3,57
d) 6,57 e) 2,395

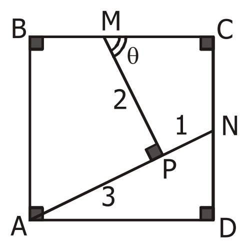
24. Del gráfico mostrado obtener el valor de: $2\cos\theta + \cot\theta$ sabiendo que AD = BC y "O" es centro.



a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

25. Siendo ABCD un cuadrado, hallar "$\tan\theta$".

(sug.: $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$)



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$