

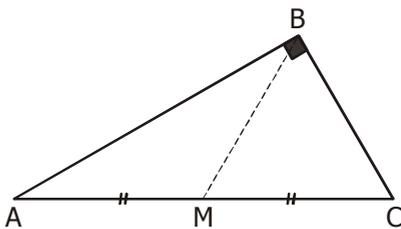
Objetivos

- Conocer y reconocer los triángulos rectángulos de ángulos notables (45° ; 30° ; 60° ; 37° ; 53° ; 16° ; 74°); así como la proporción en la que se encuentran sus lados.
- Operar correctamente los valores de las razones trigonométricas de estos ángulos notables.
- Adaptar las proporciones de los lados de estos triángulos, a la resolución de situaciones geométricas.

Conocimientos previos (Elementos de geometría)

Propiedades diversas

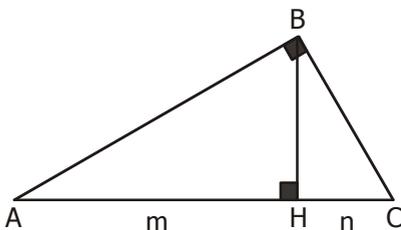
- a. Mediana relativa a la hipotenusa en un triángulo rectángulo



Si \overline{BM} es mediana:

$$AM = MC = BM$$

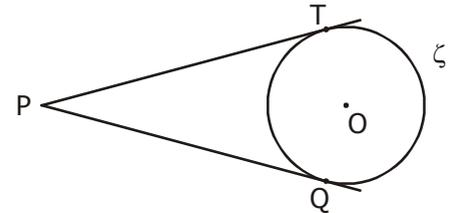
- b. Altura relativa a la hipotenusa en un triángulo rectángulo



Si \overline{BH} es altura: $AH = m$ y $HC = n$

$$BH^2 = m.n$$

- c. Rectas tangentes a una circunferencia

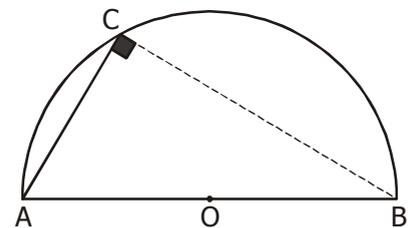


Si \overline{PT} y \overline{PQ} son tangentes a ζ :

$$PT = PQ$$

además: $\overline{OT} \perp \overline{PT}$ y $\overline{OQ} \perp \overline{PQ}$

- d. En la semicircunferencia



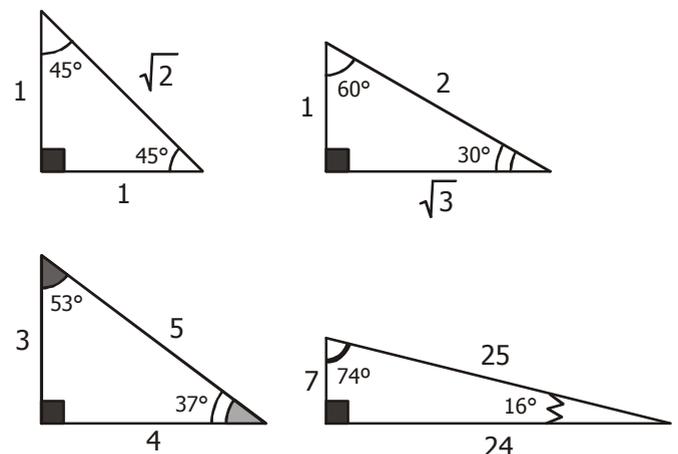
Si \overline{AB} es diámetro y \overline{AC} una cuerda:

$$\overline{BC} \perp \overline{AC}$$

ΔACB : triángulo rectángulo ($\hat{A}CB = 90^\circ$)

Definición

Los triángulos rectángulos de ángulos notables o simplemente triángulos rectángulos notables, son aquellos en los cuales conociendo las medidas de sus ángulos agudos se puede saber en qué proporción se encuentran sus lados o aproximarlas. Van a destacar:



Donde los números colocados en sus lados, indican la proporción en que estos se encuentran. A partir de estos triángulos, se calculan las razones trigonométricas de sus correspondientes ángulos:

	$45^\circ; \frac{\pi}{4}$	$30^\circ; \frac{\pi}{6}$	$60^\circ; \frac{\pi}{3}$	37°	53°	16°	74°
sen	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$
tan	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{24}{7}$
cot	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{24}$
sec	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{7}$
csc	$\sqrt{2}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{25}{24}$

Vamos a encontrar una gran variedad de ejercicios, los que iremos abordando según sus características y grado de dificultad.



Test de Aprendizaje

1. Unir con una línea lo correcto.

Sen 37°	$\frac{3}{5}$
Cos 60°	$\frac{1}{2}$
Sec 53°	$\frac{5}{3}$
tan 45°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	1

2. Calcular: $E = \sqrt{6} \cdot \sec 45^\circ \cdot \tan 30^\circ - 1$

3. Hallar "x": $2x \cdot \sin 30^\circ - \tan 45^\circ = \sec 60^\circ - x$

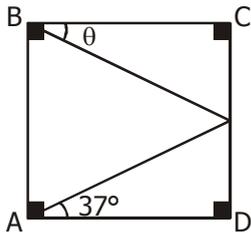
4. Si: $\sin \theta = \tan 37^\circ$, calcular: $\cos \theta$

5. Si: $\operatorname{tg} \alpha = \sin 60^\circ$, hallar: $\sin \alpha$

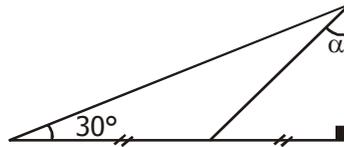
6. Evaluar: $P = (\sec 53^\circ + \operatorname{tg} 53^\circ) \sin 30^\circ$

7. Si: $\text{sen}\theta = \text{cos}60^\circ$, calcular: $\text{tg}\theta$

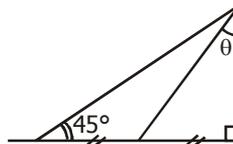
8. En el gráfico ABCD es un cuadrado. Hallar " $\text{cot}\theta$ ".



9. ... α .



10. Hallar: $\text{tg}\theta$



Practiquemos



1. Calcular:

$$C = 2\text{sen}30^\circ + \text{tan}^260^\circ$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Calcular:

$$C = \text{sec}^245^\circ + 3\text{tan}^230^\circ$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Calcular:

$$C = (\text{sec}37^\circ + \text{tan}37^\circ)(\text{sec}^245^\circ + 1)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

4. Calcular:

$$C = (\text{csc}16^\circ + \text{cot}16^\circ)(2\text{sen}30^\circ + \text{sec}^245^\circ)$$

- a) 14 b) 21 c) 7
d) 28 e) 12

5. Calcular:

$$C = \frac{(2\text{tan}45^\circ + \text{sen}30^\circ + 2\text{cot}53^\circ)(\text{sec}53^\circ - \text{tan}53^\circ)}{\text{sec}^230^\circ - 3\text{tan}^230^\circ}$$

- a) 4 b) 2 c) 3
d) 5 e) 1

6. Calcular:

$$\frac{(3\text{sec}^245^\circ + \text{cos}60^\circ + 12\text{tan}16^\circ)(\text{sen}37^\circ + \text{sen}53^\circ)}{6\text{csc}74^\circ + \text{tan}37^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

7. Siendo " θ " un ángulo agudo, tal que:

$$\text{tan}\theta = \text{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

calcular:

$$C = 10\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\text{cos}^2\theta$$

- a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$
d) 2 e) 3

8. Siendo " ϕ " un ángulo agudo, tal que:

$$\text{tan}\phi = 2\text{sen}37^\circ + \text{sen}53^\circ$$

calcular:

$$C = 2\text{csc}^2\phi + \frac{5}{2}\text{sec}^2\phi$$

- a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 25

9. Siendo "λ" un ángulo agudo, tal que: $\cos \lambda = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$

Calcular: $\tan \frac{\lambda}{2}$

- a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{9}$
 d) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

10. Siendo "ρ" un ángulo agudo, tal que:

$$\cos \rho = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \tan^2 \frac{\pi}{6}$$

Calcular:

$$C = \tan \rho \cdot \cot \frac{\rho}{2}$$

- a) 23 b) 24 c) 25
 d) 26 e) 27

11. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B} = 90^\circ$), se traza la mediana CM ("M" en AB), de modo que: $\hat{M}CB = 37^\circ$ y $\hat{C}AB = \alpha$. Calcular "tan α".

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{5}$
 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{3}{5}$

12. En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{B} = 90^\circ$), se traza la mediana AM ("M" en BC), de modo que: $\hat{A}CB = 37^\circ$ y $\hat{BMA} = \beta$. Calcular "tan β".

- a) 2 b) 3 c) 0,5
 d) 1,5 e) 2,5

13. En un cuadrado ABCD se traza \overline{AE} ("E" en \overline{BC}), luego se une "E" con "M" punto medio de \overline{CD} y con "N" punto medio de \overline{AD} . Si: $\hat{E}MC = \alpha$; $\hat{E}ND = \beta$ y $\hat{BAE} = 37^\circ$, calcular:

$$G = 2 \cot \alpha + \tan \beta$$

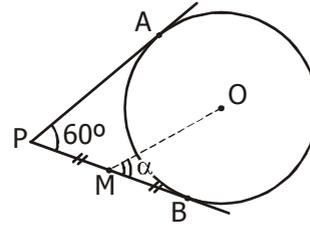
- a) 4 b) 6 c) 2
 d) 3 e) 8

14. En un cuadrado ABCD se traza \overline{AE} ("E" en \overline{CD}), luego se une "E" con "M" punto medio de \overline{BC} y "N" punto medio de \overline{AB} , de modo que: $\hat{E}AD = 16^\circ$; $\hat{E}MC = \alpha$ y $\hat{E}NA = \theta$. Calcular:

$$G = \tan \alpha - 2 \cot \theta$$

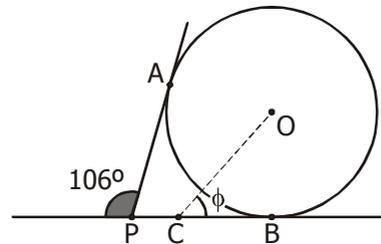
- a) 1 b) 2 c) 3
 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

15. De acuerdo al gráfico, calcular "cot α".



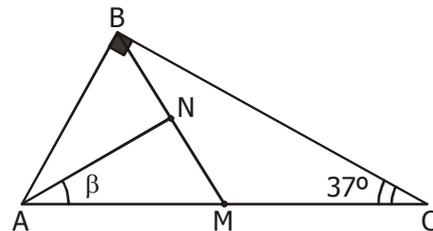
- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

16. De acuerdo al gráfico, calcular "tan φ" si: BC = 2PC.



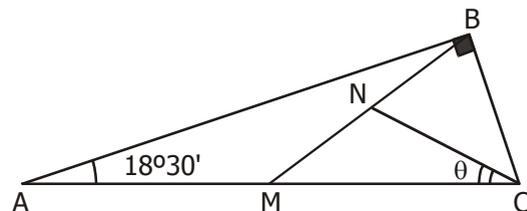
- a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{7}{8}$
 d) $\frac{7}{16}$ e) $\frac{9}{8}$

17. "M" y "N" son puntos medios, calcular "tan β".



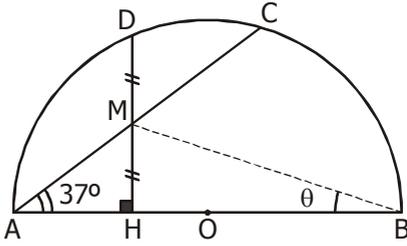
- a) $\frac{17}{63}$ b) $\frac{21}{43}$ c) $\frac{24}{43}$
 d) $\frac{18}{43}$ e) $\frac{16}{43}$

18. Si en el gráfico "M" y "N" son puntos medios de \overline{AC} y \overline{BM} ; calcular "tan θ".



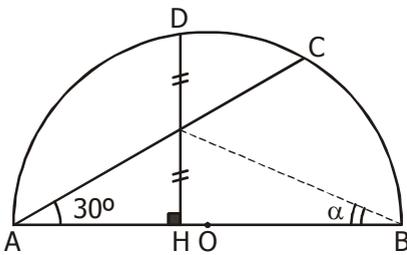
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$
 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

19. Del gráfico, calcular "tanθ".



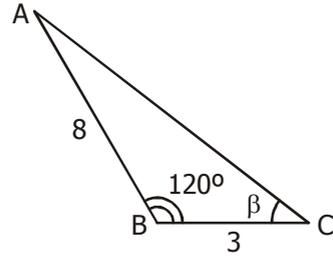
- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$
 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{9}$

20. Del gráfico, calcular "tanα".



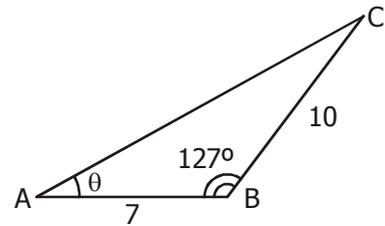
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

21. Del gráfico, calcular "tanβ".



- a) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$
 d) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

22. Del gráfico, calcular: $E = 8\cot\theta + 1$

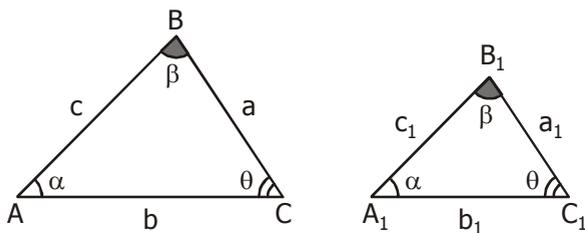


- a) 12 b) 13 c) 14
 d) 15 e) 16



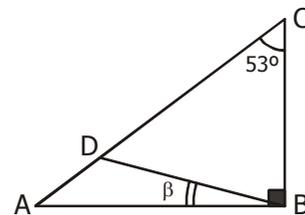
Test de Aprendizaje

1. Se dice que dos triángulos son semejantes si estos poseen los mismos ángulos, estableciéndose entre los lados de ellos una proporción. Así en el gráfico: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; cumpliéndose:



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

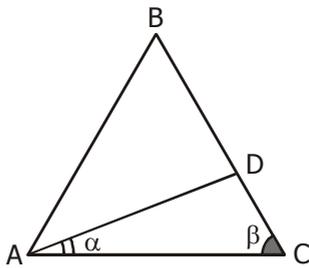
Con el marco teórico anterior; del gráfico calcular "tanβ"; si: $CD = 4AD$.



- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{3}{8}$
 d) $\frac{3}{16}$ e) $\frac{3}{17}$

2. Si el triángulo ABC es isósceles ($AB = BC$), calcular:

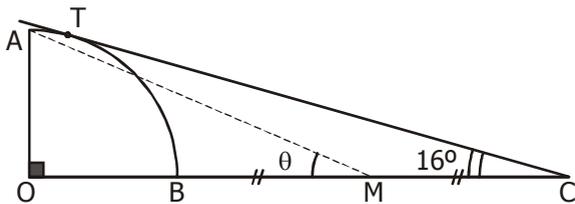
$$E = \tan\alpha \cdot \cot\beta$$



si además: $BD = 3DC$

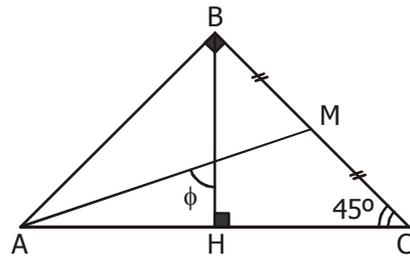
- a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$
 d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{4}{7}$

3. Del gráfico, calcular " $\tan\theta$ ".



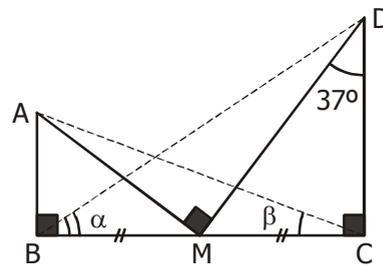
- a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{7}{16}$
 d) $\frac{9}{16}$ e) $\frac{11}{16}$

4. Del gráfico, calcular " $\tan\phi$ ".



- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

5. Del gráfico, calcular: $G = \cot\beta - \tan\alpha$



- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) $\frac{3}{2}$



Tarea domiciliaria



1. Calcular: $C = 4\text{sen}30^\circ + \tan^2 60^\circ$

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

2. Calcular: $L = (\text{sen}^2 60^\circ + \frac{1}{2} \text{sen}^2 45^\circ) \text{sec} 60^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 6

3. Calcular: $C = (5\text{sen}37^\circ + 4\tan 37^\circ) \text{sen}^2 45^\circ + \text{csc}^2 30^\circ$

- a) 7 b) 5 c) 4
 d) 3 e) 2

4. Calcular: $L = (\text{sec}16^\circ + \tan 16^\circ) \cot 53^\circ$

- a) 3 b) 4 c) $\frac{9}{16}$
 d) $\frac{16}{9}$ e) 1

5. Calcular: $C = (6\tan 16^\circ + \tan 37^\circ) \text{sec}^2 60^\circ$

- a) 8 b) 5 c) 10
 d) 16 e) 20

6. Calcular:

$$L = \frac{3 \tan 53^\circ + \cos 60^\circ + \cos^2 45^\circ}{2 \tan^2 60^\circ + \text{sen} 30^\circ + \text{sen}^2 45^\circ}$$

- a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{7}$
 d) $\frac{6}{7}$ e) 1

7. Hallar el valor simplificado de:

$$E = \sqrt{\sin^2 30^\circ + \sec 60^\circ + \tan 37^\circ} - \cos 30^\circ$$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2
 d) 3 e) $\frac{1}{3}$

8. Si: $37x \tan^2 30^\circ - 5x \sec^2 30^\circ = 7 \tan 45^\circ + 5 \sec 60^\circ$
 calcular: $P = \tan^2 15x + \cot^2 10x$

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

9. Reducir:

$$P = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ} + \frac{\sec 60^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{2 \tan 45^\circ}{\cot 45^\circ}$$

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

10. Si: $\sec \alpha = 2 \cdot \tan 45^\circ$. Calcular: $\sec \alpha \cdot \tan \alpha$; si " α " es agudo.

- a) 1 b) 1,2 c) 1,3
 d) 1,4 e) 1,5

11. Siendo " θ " un ángulo agudo tal que: $\tan \theta = \tan^2 30^\circ$
 calcular: $C = 3 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta$

- a) 1 b) 2 c) 1,5
 d) 2,5 e) 5

12. Siendo " β " un ángulo agudo tal que: $\sin \beta = \frac{1}{2} \cos 60^\circ$
 calcular: $L = 2 \cot^2 \beta + 1$

- a) 30 b) 31 c) 32
 d) 33 e) 34

13. Siendo " θ " un ángulo agudo tal que: $\cos \theta = \tan^4 \frac{\pi}{6}$
 calcular:

$$C = \tan \theta \cdot \cot \frac{\theta}{2}$$

- a) 8 b) 9 c) 10
 d) 11 e) 12

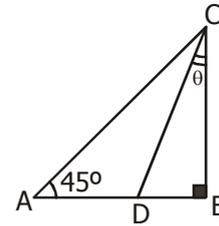
14. Siendo " ϕ " un ángulo agudo, tal que: $\cos \phi = \cos^4 \frac{\pi}{4}$
 calcular:

$$L = \tan \phi \cdot \tan \frac{\phi}{2}$$

- a) 3 b) 4 c) 5
 d) 6 e) 7

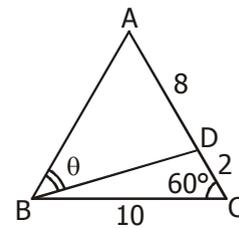
15. Señale el valor de " $\tan \theta$ " a partir del gráfico, si:

$$BC = \frac{3}{2} AD$$



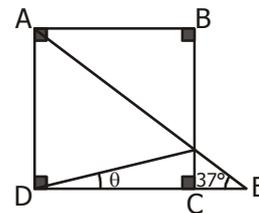
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

16. Calcular " $\cot \theta$ ", de acuerdo al gráfico mostrado.



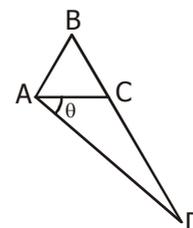
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

17. Del gráfico, hallar " $\tan \theta$ " (ABCD es cuadrado)



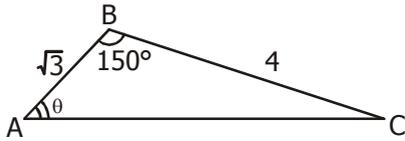
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

18. Sabiendo que ABC es un triángulo equilátero, donde $CD = 2(AB)$. Hallar: " $\tan \theta$ ".



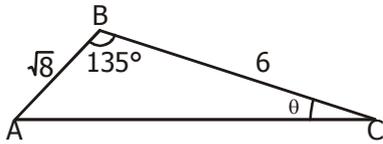
- a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

19. En el gráfico mostrado, hallar "cotθ"



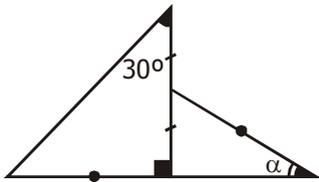
- a) $3\sqrt{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. En el gráfico mostrado, hallar "tanθ"



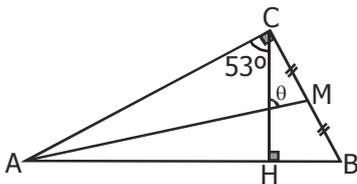
- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$
 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

21. Determine "tanα", en el gráfico.



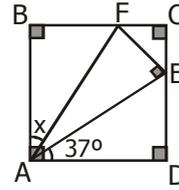
- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

22. Calcular "tanθ" del gráfico:



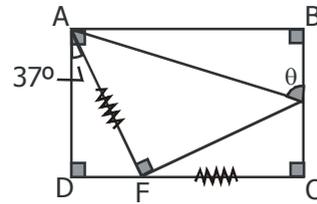
- a) $\frac{31}{12}$ b) $\frac{41}{12}$ c) $\frac{3}{7}$
 d) $\frac{21}{43}$ e) $\frac{7}{3}$

23. Si: ABCD es un cuadrado, calcular "tanx".



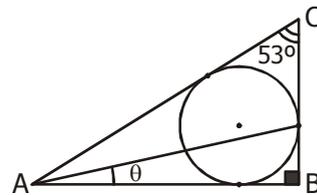
- a) $\frac{13}{15}$ b) $\frac{13}{16}$ c) $\frac{13}{17}$
 d) $\frac{17}{16}$ e) $\frac{15}{13}$

24. Del gráfico obtener "tanθ", si: AF = FC



- a) 4 b) 8 c) 16
 d) 32 e) 2

25. Del gráfico, calcular "tanθ".



- a) $\frac{7}{17}$ b) $\frac{7}{36}$ c) $\frac{7}{31}$
 d) $\frac{14}{27}$ e) $\frac{14}{31}$