MATEMÁTICA

PREGUNTA N.º 1

Determine la suma del número n más pequeño y del número N más grande cuatro cifras que sean divisibles por 2; 3; 4; 6; 7; 11 y 14, simultáneamente a n y N.

A) 10 088 B) 11 088 C) 12 088
D) 13 088 E) 14 088

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de divisibilidad

Análisis y procedimiento

Como n y N son números de cuatro cifras y además son divisibles por 2; 3; 4; 6; 7; 11 y 14, ambos números deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{2};\ \overset{\circ}{3};\ \overset{\circ}{4};\ \overset{\circ}{6};\ \overset{\circ}{7};\ \overset{\circ}{11};\ \overset{\circ}{14}$$

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(2; 3; 4; 6; 7; 11; 14)}}$$

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{\overline{924}}$$

Además

$$1000 \leq \overline{abcd} < 10\ 000$$
$$1000 \leq 924k < 10\ 000$$
$$1{,}08... \leq k < 10{,}82...$$

Entonces

$n=924(2)$; para que sea el menor posible.

$N=924(10)$; para que sea el mayor posible.

$\therefore\ n+N=924(12)=11\ 088$

Respuesta: 11 088

PREGUNTA N.º 2

Determine el mayor número de la forma $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, donde x, y, z son enteros con $xyz \neq 0$, con la propiedad que al ser multiplicado por 5, el número de sus divisores aumenta de 48 a 60.

A) 12 000 B) 13 500 C) 26 700
D) 31 500 E) 60 750

RESOLUCIÓN

Tema: Clasificación de los números $\mathbb{Z}^+$

Análisis y procedimiento

Para poder determinar el mayor número de la forma $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, debemos conocer el valor de x, y y z que haga que el número sea el mayor posible.

Si $A=2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ con $\{x; y; z\} \subset \mathbb{Z}^+$, entonces, A se encuentra descompuesto canónicamente.

Por dato tenemos

$\rightarrow\ CD_A=(x+1)(y+1)(z+1)=48$ (I)

Si el número A es multiplicado por 5, obtenemos

$5A=2^x\cdot 3^y\cdot 5^{z+1}$; por dato tenemos

$\rightarrow\ CD_{5A}=(x+1)(y+1)(z+2)=60 \qquad \text{(II)}$

De (I) ÷ (II)

$$\frac{z+1}{z+2}=\frac{4}{5}\rightarrow z=3$$

Reemplazamos $z=3$ en (I).

$(x+1)(y+1)(3+1)=48$

$\underbrace{(x+1)}\underbrace{(y+1)}=12$

$$\begin{array}{ll} 2 & 6\ \rightarrow x=1;\ y=5\\ 3 & 4\ \rightarrow x=2;\ y=3\\ 4 & 3\ \rightarrow x=3;\ y=2\\ 6 & 2\ \rightarrow x=5;\ y=1 \end{array}$$

Como se puede observar, tenemos 4 posibilidades para los valores de x e y mientras que el valor de z siempre es 3; entonces, tendremos 4 posibilidades para el número pedido.

$$2^x\cdot 3^y\cdot 5^z=\begin{cases} 2^1\cdot 3^5\cdot 5^3=60\,750\\ 2^2\cdot 3^3\cdot 5^3=13\,500\\ 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3=9000\\ 2^5\cdot 3^1\cdot 5^3=12\,000 \end{cases}$$

Por lo tanto, el mayor valor de $2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$ es 60 750.

Respuesta: 60 750

PREGUNTA N.° 3

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. Existen números racionales tales que entre ellos no existen números irracionales.

II. Siempre existe el mínimo número racional r tal que $\sqrt{2}\le r$.

III. Los números racionales es denso en los números reales.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFV

RESOLUCIÓN

Tema: Números racionales

Análisis y procedimiento

Tenga en cuenta lo siguiente:

- Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto diferente del vacío. Se dice que A es denso en $\mathbb{R}$ (números reales). Si $\{a;\ b\}\subset\mathbb{R}$ $(a<b)$, existe $c\in A$ tal que $a<c<b$.

- Lo anterior equivale a decir que entre dos números reales existen infinitos elementos de A.

Ejemplos

- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$
  ($\mathbb{Q}$: conjunto de los números racionales)
- $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$
  ($\mathbb{I}$: conjunto de los números irracionales)

Analizando las proposiciones tenemos

I. **Falsa**

Los elementos de $\mathbb{Q}$ también son elementos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces, entre dos números racionales existen infinitos números irracionales.

II. **Falsa**

$$\sqrt{2}\le r\leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\sqrt{2}=r}_{\substack{F\\ \mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\phi}}\vee\underbrace{\sqrt{2}<r}_{\substack{F\\ \text{Por densidad}}}}_{F} \qquad (r\in\mathbb{Q})$$

III. **Verdadera**

Entre dos números reales, existen infinitos números racionales.

Respuesta: FFV

PREGUNTA N.° 4

Se tiene un terreno de 1369 m^2 de forma cuadrada. Se quiere cercar con alambre que cuesta S/0,60 el metro. Determine la suma de sus cifras del costo total del alambre para cercar todo el terreno.

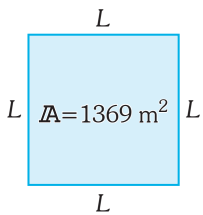
A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

RESOLUCIÓN

Tema: Radicación

Análisis y procedimiento

Si L es el lado del terreno cuadrado, en metros, tenemos



$L^2=1369$

$L=\sqrt{1369}$

$L=37$

Como debemos colocar alambre en el perímetro del terreno, la longitud necesaria de alambre será $37(4)=148$ m.

Finalmente, como el costo de un metro de alambre es S/0,60, hallamos el costo por todo el alambre necesario.

Costo total=148(S/0,60)

Costo total=S/88,8

Por lo tanto, la suma de cifras del costo total es $8+8+8=24$

Respuesta: 24

PREGUNTA N.º 5

Los números 0,98; 0,96 y 0,95 son las leyes respectivas de 3 aleaciones que se funden para formar una de ley 0,97, usándose 390 g de la primera. Si el peso de la segunda es a la tercera como 5 es a 4, determine el peso de la aleación final en gramos.

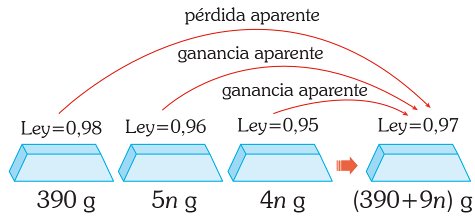
A) 420 B) 440 C) 480
D) 560 E) 660

RESOLUCIÓN

Tema: Regla de mezcla

Análisis y procedimiento

De los datos, tenemos



donde se cumple

pérdida aparente=ganancia aparente

$0{,}01(390)=0{,}01(5n)+0{,}02(4n)$

$390=5n+8n$

$30=n$

Conociendo el valor de n, hallamos el peso de la aleación final.

peso aleación final$=390+9n$

$\therefore$ peso aleación final$=390+9(30)=660$ g

Respuesta: 660

PREGUNTA N.º 6

Se elige aleatoriamente un número de tres cifras en el sistema ternario. Si x es la variable aleatoria que indica la suma de las cifras del número elegido, calcule el valor esperado de x.

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$
D) 3 E) $\frac{7}{2}$

RESOLUCIÓN

Tema: Probabilidades

Análisis y procedimiento

Sea el experimento aleatorio

ε: Se elige aleatoriamente un número de tres cifras en el sistema ternario.

Entonces, su espacio muestral es

$\Omega=\{100_3; 101_3; 102_3; \ldots; 222_3\}$

$$\begin{array}{ccc} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \_ & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$2\times3\times3=18$ numerales

$n(\Omega)=18$

Se define la variable aleatoria discreta

X: Suma de las cifras del número elegido.

Entonces, los valores que puede tomar X son 1; 2; 3; 4; 5 o 6.

$R_X=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

de donde

Suma de cifras del número elegido

1	2	3	4	5	6
100_3	101_3	111_3	211_3	122_3	222_3
	110_3	102_3	121_3	212_3	
	200_3	201_3	112_3	221_3	
		120_3	202_3		
		210_3	220_3		

Se tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$X=x$	1	2	3	4	5	6
$P_{[X=x]}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$

Luego, el valor esperado de X o esperanza matemática de X es

$$E_{(X)}=\sum_{x\in R_X}(x)\cdot P_{[X=x]}$$

$$E_{(X)}=1\left(\frac{1}{18}\right)+2\left(\frac{3}{18}\right)+3\left(\frac{5}{18}\right)+4\left(\frac{5}{18}\right)+5\left(\frac{3}{18}\right)+6\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$E_{(X)}=\frac{63}{18}=\frac{7}{2}$$

Respuesta: $\frac{7}{2}$

PREGUNTA N.º 7

Se tiene un número N cuya representación en dos sistemas de numeración son las siguientes $\overline{xy}_{(z+3)}$ y $\overline{zx}_{(y)}$, donde z e y son cifras pares, tal que $x+y+z=13$. Calcule $3x+6y+4z$.

A) 47 B) 53 C) 59
D) 61 E) 73

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de numeración

Análisis y procedimiento

Se tiene que

$N=\overline{xy}_{(z+3)}=\overline{zx}_{(y)}$

Como las cifras son menores que la base, se deduce que $z<y<z+3$.

De donde y puede ser $(z+1)$ o $(z+2)$, pero como z e y son cifras pares, entonces

$y=z+2$

En la igualdad inicial descomponemos polinómicamente.

$x(z+3)+y=zy+x$

$x(z+2)=y(z-1) \quad\rightarrow\quad x=z-1$

Por dato

$x+y+z=13$

$(z-1)+(z+2)+z=13$

$3z=12$

$z=4$

$\rightarrow x=3 \wedge y=6$

$\therefore\ 3x+6y+4z=3(3)+6(6)+4(4)=61$

Respuesta: 61

PREGUNTA N.° 8

Nicolás recibe una tarjeta de crédito junto con un sobre donde se encuentra impresa la clave, de 5 dígitos. Nicolás extravió la hoja impresa e intenta reconstruir la clave pero solo recuerda que el primer dígito (desde la izquierda) es 3, el último dígito es 5, la suma de los dígitos es 12 y 3 dígitos son pares. ¿Cuántos valores posibles existen para la clave?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN

Tema: Análisis combinatorio

Análisis y procedimiento

De los datos podemos deducir que la clave de Nicolás es de la forma

$$3\,a\,b\,c\,5$$

Donde se debe cumplir que la suma de sus dígitos es 12 y tres de estos dígitos son pares.

Entonces

$3+a+b+c+5=12$

$a+b+c=4$

Como tres de los dígitos deben ser pares y los dígitos 3 y 5 son impares, los dígitos a, b y c son pares.

Entonces, la clave puede ser como sigue

$3\,a\,b\,c\,5$ →
- 3 2 2 0 5
- 3 2 0 2 5
- 3 0 2 2 5
- 3 4 0 0 5
- 3 0 4 0 5
- 3 0 0 4 5

Por lo tanto, existen 6 valores posibles para la clave.

Respuesta: 6

PREGUNTA N.° 9

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

Sean $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times 3}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{3\times 2}$ satisfaciendo $AB=I_2$ (matriz identidad de orden 2).

I. Para todo $Y=\left(y_{ij}\right)_{2\times 1}$, existe $X=\left(x_{ij}\right)_{3\times 1}$ tal que $AX=Y$.

II. Si $AC=I_2$ para alguna matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 2}$, entonces $C=B$.

III. Si $BY=0$ para $Y=\left(y_{ij}\right)_{2\times 1}$, entonces $Y=0$ (matriz nula).

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVF E) FFF

RESOLUCIÓN

Tema: Matrices

Análisis y procedimiento

Tenemos

$A=(a_{ij})_{2\times 3}$; $B=(b_{ij})_{3\times 2}$, tal que $AB=I_2$.

I. **Verdadera**

Como $Y=(y_{ij})_{2\times 1}$ es fijo y arbitrario, consideraremos $X=BY$.

$$AX=A_{2\times 3}\cdot X_{3\times 1}=A_{2\times 3}(B_{3\times 2}\cdot Y_{2\times 1})=$$
$$(A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2})\,Y_{2\times 1}=I_{2\times 2}\cdot Y_{2\times 1}$$

Entonces para todo $Y\ \exists\ X$, tal que $AX=Y$.

II. **Falsa**

Un contraejemplo es

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\\2&-1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

donde

$AC=I$, $AB=I$, pero $B\neq C$.

III. **Verdadera**

Como $BY=0$, multiplicando por A a la izquierda, tenemos

$$A(BY)=A(0)\rightarrow \underbrace{(AB)}_{I}Y=0\ \rightarrow\ Y=0$$

Respuesta: VFV

PREGUNTA N.º 10

Halle el promedio de los valores máximo y mínimo de la función $f_{(x;\,y)}=4x+y+3$ sujeta a la región
$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: |x-2|+|y-4|\leq 3\}$

A) 3 B) 7 C) 10
D) 15 E) 19

RESOLUCIÓN

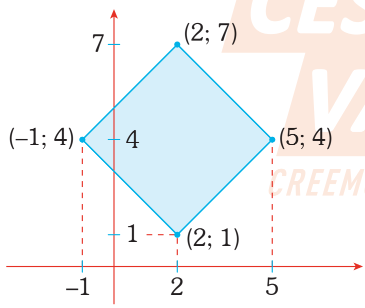
Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

Se tiene $f_{(x;\,y)}=4x+y+3$

Sujeta a la región
$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: |x-2|+|y-4|\leq 3\}$

Graficamos S.



Evaluamos en los vértices de la región S.

$f_{(5;\,4)}=4(5)+4+3=27$

$f_{(2;\,7)}=4(2)+7+3=18$

$f_{(-1;\,4)}=4(-1)+4+3=3$

$f_{(2;\,1)}=4(2)+1+3=12$

Luego
Máx $f_{(x;\,y)}=27$, Mín $f_{(x;\,y)}=3$

$\therefore\ \dfrac{27+3}{2}=15$

Respuesta: 15

PREGUNTA N.º 11

Si la siguiente proposición lógica $p \rightarrow (q \vee r)$ es falsa, determine la verdad o falsedad de $(q \wedge r) \vee p$; de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$.

A) VVV B) FVV C) FFV
D) VVF E) VFV

RESOLUCIÓN

Tema: Lógica proposicional

Análisis y procedimiento

Tenga en cuenta que

p q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \nleftrightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V V	**V**	V	V	F	V
V F	F	V	**F**	**V**	**F**
F V	F	V	V	**V**	**F**
F F	F	**F**	V	F	V

Tenemos por dato

$$\underbrace{p}_{V} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{q}_{F} \vee \underbrace{r}_{F})}_{F} \equiv F$$

$\therefore\ p\equiv V;\ q\equiv F;\ r\equiv F$

Analizamos las proposiciones.

I. **Verdadera**

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{q}_{F} \wedge \underbrace{r}_{F})}_{F} \vee \underbrace{p}_{V}}_{V}$$

II. **Falsa**

$$\underbrace{\underbrace{p}_{V} \rightarrow \underbrace{q}_{F}}_{F}$$

III. **Verdadera**

$$\underbrace{\underbrace{q}_{F} \rightarrow \underbrace{r}_{F}}_{V}$$

Respuesta: VFV

PREGUNTA N.º 12

Sea un triángulo rectángulo ABC recto en C, con $m\sphericalangle A=37°$ y $AC=4$ m. De C se traza una perpendicular a AB, intersecando en D, de dicho punto se traza una perpendicular a BC intersecando en E, y así sucesivamente. Determine la longitud total de todas las perpendiculares trazadas a partir del punto C.

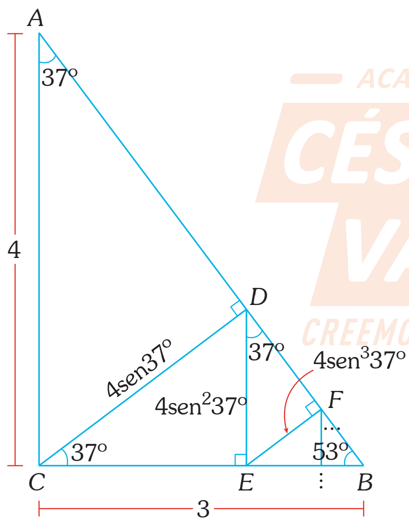
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN

Tema: Series

Análisis y procedimiento

Del enunciado



Piden

$S=CD+DE+EF+\ldots$

$S=4\text{sen}37°+4\text{sen}^2 37°+4\text{sen}^3 37°+\ldots$

$$S=4\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\ldots\right]$$

$$S=4\left(\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}\right)=6$$

Respuesta: 6

PREGUNTA N.º 13

Indique la alternativa correcta después de determinar si las proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

Dada la función $f_{(x)}=2^x-2^{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$

I. $f_{(x)}\leq 0$, para todo x número real.

II. Existe la inversa de f.

III. f es estrictamente creciente.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFF

RESOLUCIÓN

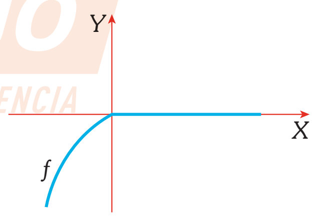
Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Tenemos la función

$$f_{(x)}=2^x-2^{|x|}=\begin{cases}2^x-2^{-x}; & x<0\\ 0; & 0\leq x\end{cases}$$

Su gráfica es



Entonces

I. **Verdadero**
$f_{(x)}\leq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ por su rango.

II. **Falso**
No existe inversa de f porque no es inyectiva.

III. **Falso**
Cuando $x\geq 0$, la función no es creciente.

Por lo tanto, la secuencia correcta es VFF.

Respuesta: VFF

PREGUNTA N.º 14

Sea la función f: $[1; 3\rangle \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_{(x)}=\begin{cases}3-x, & 1\le x<2\\ x, & 2\le x<3\end{cases}$$

Entonces $f_{(x)}$ también se puede expresar como

A) $[\![|x-2|]\!]$
B) $|x-2|+x$
C) $|x-2|-|x|$
D) $[\![|x-2|]\!]+x$
E) $|x-2|+[\![x]\!]$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$f_{(x)}=\begin{cases}3-x; & 1\le x<2\\ x; & 2\le x<3\end{cases}$$

Analizando cada intervalo.

$$f_{(x)}=3-x;\ 1\le x<2$$

$$f_{(x)}=\underbrace{-(x-2)}_{\downarrow}+\underbrace{1}_{\downarrow};\ 1\le x<2$$

$$f_{(x)}=|x-2|+[\![x]\!];\ 1\le x<2$$

además

$$f_{(x)}=x;\ 2\le x<3$$

$$f_{(x)}=\underbrace{(x-2)}_{\downarrow}+\underbrace{2}_{\downarrow};\ 2\le x<3$$

$$f_{(x)}=|x-2|+[\![x]\!];\ 2\le x<3$$

Entonces

$$f_{(x)}=|x-2|+[\![x]\!]$$

Respuesta: $|x-2|+[\![x]\!]$

PREGUNTA N.º 15

Se origina la siguiente sucesión de cuadrados: Primer cuadrado de lado a. Segundo cuadrado de lado igual a la diagonal del primer cuadrado. Tercer cuadrado de lado igual a la diagonal del segundo cuadrado, y así sucesivamente. Determine la suma de las áreas de los k-ésimos primeros cuadrados.

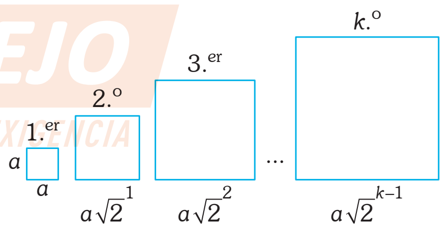
A) $a^2(k-1)$
B) $a^2(2^k-1)$
C) a^22^k
D) $a^2(2^k+1)$
E) a^2k^2

RESOLUCIÓN

Tema: Sumatoria

Análisis y procedimiento

Se tiene la siguiente sucesión de cuadrados:



donde S=suma de áreas de los k cuadrados.

$$S=a^2+2a^2+2^2a^2+\ldots+2^{k-1}a^2$$

$$S=a^2\left(1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}\right)$$

$$S=a^2\left(\frac{2^k-1}{2-1}\right)$$

$$\therefore\ S=a^2\left(2^k-1\right)$$

Respuesta: $a^2\left(2^k-1\right)$

PREGUNTA N.º 16

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

Sean A y B conjuntos y $\varnothing$ el conjunto vacío.

I. Si $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)=\varnothing$, entonces $A=B$

II. Si $A \cap B^C=\varnothing$ y $B \cap A^C=\varnothing$, entonces $A \neq B$.

III. Si $A^C \cap B^C=\varnothing$, entonces la unión de A con B es el conjunto universal.

A) VVV B) VFF C) VVF
D) VFV E) FFV

RESOLUCIÓN

Tema: Teoría de conjuntos

Análisis y procedimiento

Tenga en cuenta que si M y N son conjuntos

- la notación M/N, usualmente lo representamos $M-N$.
- $M \cap N^C=M-N$

Analizando las proposiciones

I. **Verdadera**

$$(A-B) \cup (B-A)=\varnothing$$
$$\to A-B=\varnothing \ \wedge \ B-A=\varnothing$$
$$\to A \subset B \ \wedge \ B \subset A$$
$$\to A=B$$

II. **Falsa**

$$A \cap B^C=\varnothing \ \wedge \ B \cap A^C=\varnothing$$
$$\to A-B=\varnothing \ \wedge \ B-A=\varnothing$$
$$\to A \subset B \ \wedge \ B \subset A$$
$$\to A=B$$

III. **Verdadera**

$$A^C \cap B^C=\varnothing \quad \to \quad (A \cup B)^C=\varnothing; \ (U^C=\varnothing)$$
$$\to A \cup B=U \text{ (conjunto universal)}$$

Respuesta: VFV

PREGUNTA N.º 17

Se corta en cada esquina de una placa rectangular un cuadrado de 2 cm, y la placa sobrante se dobla hacia arriba para formar una caja abierta. Se requiere que la caja mida 4 cm más de largo que de ancho y que su volumen esté entre 24 y 42 cm^3. Determine el intervalo que debe satisfacer el ancho de la caja formada.

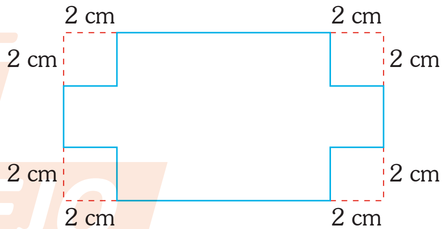
A) $\langle 2; 3\rangle$ B) $\langle 1; 3\rangle$ C) $\langle 2; 4\rangle$
D) $\langle 3; 5\rangle$ E) $\langle 0; 3\rangle$

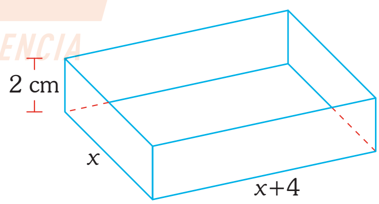
RESOLUCIÓN

Tema: Inecuación cuadrática

Análisis y procedimiento

Graficamos





Volumen$=x(x+4)2$

Por condición

$$\cancel{24} < \cancel{2}x(x+4) < \cancel{42} \quad {+4}$$
$$16 < x^2+4x+4 < 25$$
$$4^2 < (x+2)^2 < 5^2 \quad \sqrt{\ }$$

Como $x > 0$, $\quad 4 < x+2 < 5$
$$2 < x < 3$$

$$\therefore \ x \in \langle 2; 3\rangle$$

Respuesta: $\langle 2; 3\rangle$

PREGUNTA N.° 18

Determine el rango de la función definida por $f_{(x)}=e^{\text{sen}x}$, con $x\in\mathbb{R}$.

A) $\langle 0;\infty\rangle$ B) $[1; e]$ C) $\left[\frac{1}{e};1\right]$

D) $\left[\frac{1}{e};e\right]$ E) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Nos piden el rango de la función

$$f_{(x)}=e^{\text{sen}x};\ x\in\mathbb{R}$$

Como

$$-1\leq \text{sen}x\leq 1;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

$$e^{-1}\leq \underbrace{e^{\text{sen}\,x}}_{f_{(x)}}\leq e^{1}$$

$$\therefore\ \text{Ran}\,f=\left[\frac{1}{e};e\right]$$

Respuesta: $\left[\frac{1}{e};e\right]$

PREGUNTA N.° 19

Considere el polinomio $p_{(x)}$ de coeficientes enteros; se afirma que:

I. Si r es raíz de $p_{(x)}$ en $\mathbb{Q}$, entonces r es raíz de $p_{(x)}$ en $\mathbb{R}$.
II. Si s es raíz de $p_{(x)}$ en $\mathbb{C}$, entonces s es raíz en $\mathbb{R}$.
III. Si $p_{(x)}$ no tiene raíz entera, entonces $p_{(x)}$ no tiene raíz en $\mathbb{Q}$.

Son correctas

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) solo I y II
E) solo I y III

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuaciones polinomiales

Análisis y procedimiento

I. **Correcta**

Como r es raíz de $P_{(x)}$ en $\mathbb{Q}\wedge\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, entonces $r\in\mathbb{R}\wedge r$ es raíz de $P_{(x)}$ en $\mathbb{R}$.

II. **Incorrecta**

Contraejemplo

Sea $P_{(x)}=x^2+1$, que tiene como raíces a $i\wedge -i$, que no son raíces en $\mathbb{R}$.

III. **Incorrecta**

Contraejemplo

Sea $P_{(x)}=(2x-1)(3x-1)$, no tiene raíz entera, pero sí racional.

Respuesta: solo I

PREGUNTA N.° 20

Si a, $b>0$, $a\neq b$, $\log_b a>0$, $\log_{\sqrt[7]{2}} b>0$ y sabemos que

$$\log_b a+11\log_a b=12$$

$$\log_{\sqrt[7]{2}} b-7\log_b\sqrt[7]{2}=6$$

Entonces calcule $M=\frac{a}{32}+4\log_{0,5}a$.

A) 10 B) 12 C) 16
D) 18 E) 20

RESOLUCIÓN

Tema: Logaritmos

Análisis y procedimiento

Se tiene a; $b>0$; $a\neq b$.

$$\log_b a>0\ \rightarrow\ a>b^0\ \rightarrow\ a>1$$

$$\log_{\sqrt[7]{2}} b>0\ \rightarrow\ b>\sqrt[7]{2}^{\,0}\ \rightarrow\ b>1$$

De $\log_{\sqrt[7]{2}} b - 7\log_b \sqrt[7]{2} = 6$

$$\log_{\sqrt[7]{2}} b - \frac{7}{\log_{\sqrt[7]{2}} b} = 6$$

$$\left(\log_{\sqrt[7]{2}} b - 7\right)\cancel{\left(\underbrace{\log_{\sqrt[7]{2}} b}_{>0} + 1\right)} = 0$$

$$\log_{\sqrt[7]{2}} b = 7 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt[7]{2}^{\,7}$$

$$b=2$$

Reemplazamos $b=2$ en la ecuación.

$$\log_b a + 11\log_a b = 12$$

$$\log_2 a + 11\log_a 2 = 12$$

$$\log_2 a + \frac{11}{\log_2 a} = 12$$

$$\rightarrow \log_2 a = 11 \quad \vee \quad \log_2 a = 1$$

$$a = 2^{11} \quad \vee \quad a = 2^1$$

Como $a \neq b \;\; \rightarrow \;\; a \neq 2.$

Luego, $a=2^{11}$.

Nos piden calcular

$$M = \frac{a}{32} + 4\log_{\frac{1}{2}} a$$

$$M = \frac{2^{11}}{2^5} + 4\log_{2^{-1}} 2^{11}$$

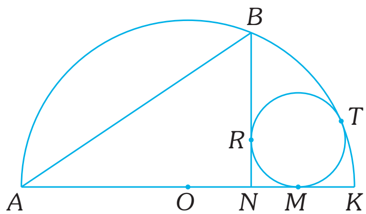
$$M = 2^6 - 4(11)$$

$$\therefore \;\; M = 20$$

Respuesta: 20

PREGUNTA N.° 21

En la figura se muestra una semicircunferencia de centro O y una circunferencia en donde T, R y M son puntos de tangencia.
Sabiendo que $AN=32$ cm, $NK=18$ cm, calcule el área de la región triangular ABR (en cm^2).



A) 250 B) 252 C) 254
D) 256 E) 258

RESOLUCIÓN

Tema: Áreas de regiones triangulares

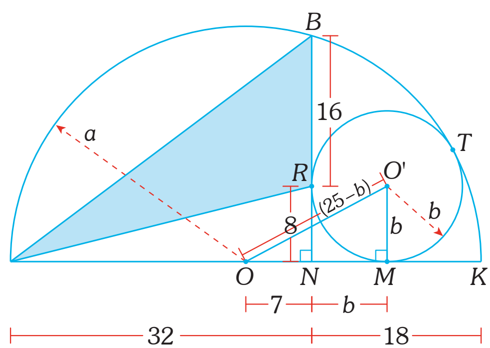
Análisis y procedimiento

Piden $\mathbb{A}_{(\triangle ABR)} = S$.

Datos:

$AN=32$ cm

$NK=18$ cm



$$S=\frac{(BR)\cdot 32}{2} \rightarrow S=16(BR)$$

$a=25 \rightarrow ON=7$

$\triangle O'MO$: $b^2+(7+b)^2=(25-b)^2 \rightarrow b=8$

$(BN)^2=32\cdot 18 \rightarrow BN=24 \rightarrow BR=16$

$S=16\cdot 16$

$\therefore\ S=256$

Respuesta: 256 cm^2

PREGUNTA N.° 22

En una pirámide de vértice V y arista lateral $\overline{VA}$ se trazan 2 planos paralelos a la base de la pirámide que intersecan a $\overline{VA}$ en M y N ($M\in\overline{VN}$). Calcule el volumen (en u^3) del tronco de pirámide determinado por los planos en la pirámides si el volumen de la pirámide es 216 u^3 y $\frac{VM}{1}=\frac{MN}{2}=\frac{NA}{3}$.

A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

RESOLUCIÓN

Tema: Pirámide

Análisis y procedimiento

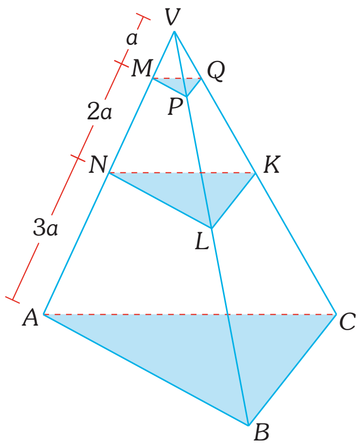
Nos piden

$\mathbb{V}_{\text{T.P.}}$ determinado por planos paralelos$=\mathbb{V}_x$.

Por dato

$\mathbb{V}_{(V\text{-}ABC)}=216$ u^3

$VM=a$; $MN=2a$; $NA=3a$



Observación

Al asumir una pirámide triangular no se le quita generalidad al problema.

Como $\triangle MPQ // \triangle NLR // \triangle ABC$

$\rightarrow V\text{-}MPQ \sim V\text{-}NLR \sim V\text{-}ABC$

Sabemos

$$\frac{\mathbb{V}_{(V\text{-}MPQ)}}{\mathbb{V}_{(V\text{-}NLK)}}=\frac{a^3}{(3a)^3}=\frac{1}{27}$$

$$\frac{\mathbb{V}_{(V\text{-}MPQ)}}{\mathbb{V}_{(V\text{-}ABC)}}=\frac{a^3}{(6a)^3}=\frac{1}{216}$$

Por dato

$\mathbb{V}_{(V\text{-}ABC)}=216$

$\rightarrow \mathbb{V}_{(V\text{-}MPQ)}=1$

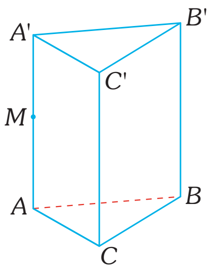
$\rightarrow \mathbb{V}_{(V\text{-}NLK)}=27$

$\therefore\ \mathbb{V}_x=26$

Respuesta: 26

PREGUNTA N.° 23

En la figura se muestra un prisma recto triangular ABC-$A'B'C'$ donde $AM=MA'=BC=12$ cm y el área de la región triangular CMB es 120 cm^2. Determine el volumen del prisma (en cm^3).



A) 2300   B) 2302   C) 2304
D) 2306   E) 2308

RESOLUCIÓN

Tema: Prisma

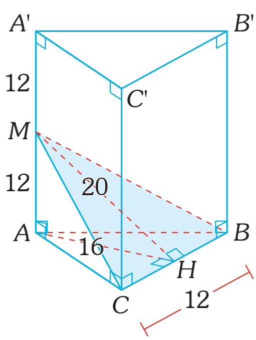
Análisis y procedimiento

Nos piden

$\mathbb{V}_{(ABC\text{-}A'B'C')}=\mathbb{V}_x$

Datos:

- $AM=MA'=BC=12$ cm
- $\mathbb{A}_{\triangle CMB}=120$ cm^2



$\mathbb{V}_x=\mathbb{A}_{\triangle ACB}\times 24$

$\overline{AH}\perp\overline{CB} \quad \rightarrow \quad \overline{MH}\perp\overline{CB}$

Por dato

$$120=\frac{12(MH)}{2}$$

$\rightarrow$ $MH=20$

En el $\triangle MAH$: $AH=16$

Reemplazamos.

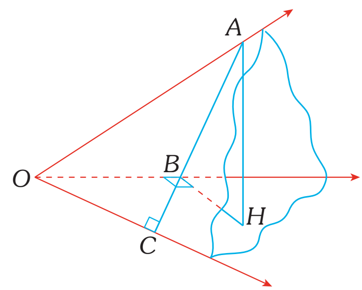
$$\mathbb{V}_x=\left(\frac{12\times 16}{2}\right)\times 24$$

$\therefore$ $\mathbb{V}_x=2304$

Respuesta: 2304

PREGUNTA N.° 24

Las medidas de las caras del ángulo triedro O-ABC están en progresión aritmética, siendo el término intermedio la cara BOC. Si H es la proyección de A sobre la cara BOC y además $AB=OC=2\sqrt{2}$ cm, y $AC=3$ cm, calcule BH (en cm).



A) 1   B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2   E) $\sqrt{5}$

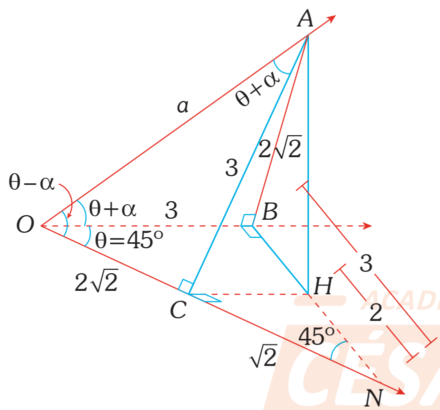
RESOLUCIÓN

Tema: Ángulo triedro

Análisis y procedimiento

Piden BH.

Dato: $AB=OC=2\sqrt{2}$; AC=3



Por teorema de las tres perpendiculares

$m\measuredangle OBA=90°$ y

$m\measuredangle HCN=90°$

$\triangle OCA \cong \triangle OBA$

$\rightarrow$ $OB=AC=3$ y

$m\measuredangle OAC=m\measuredangle AOB=\theta+\alpha$

En el $\triangle OCA$:

$\theta-\alpha+\theta+\alpha=90°$

$\theta=45°$

En el $\triangle OBN$ (notable de 45°)

$OB=BN=3 \rightarrow ON=3\sqrt{2}$

$\rightarrow CN=\sqrt{2}$ y $HN=2$

Luego:

$BH=1$

Respuesta: 1

PREGUNTA N.° 25

Calcule la medida del ángulo diedro formado por una cara lateral y la base de una pirámide de base hexagonal regular cuyo lado mide 4 cm y de área lateral 48 cm^2.

A) 30°
B) 45°
C) 22°30'
D) 15°
E) 37°

RESOLUCIÓN

Tema: Pirámide

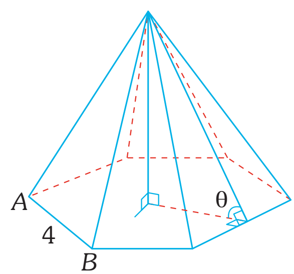
Análisis y procedimiento

Piden θ.

θ: medida del ángulo diedro entre una cara lateral y la base

Datos:

- $AB=4$
- $\mathbb{A}_{SL}=48$



Se sabe

$$\mathbb{A}_{\text{base}}=(\mathbb{A}_{SL})\cos\theta$$

$$6\left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right)=48\cos\theta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\theta$$

$\therefore\ \theta=30^\circ$

Nota

Falta indicar que la pirámide debe ser regular.

Respuesta: 30°

PREGUNTA N.° 26

Un cono se llama equilátero si la generatriz mide igual que el diámetro en la base.
Calcule el volumen (en cm^3) de un cono equilátero, si la longitud del radio de la esfera inscrita es $\sqrt{3}$ cm.

A) $4\sqrt{3}\pi$ B) $6\sqrt{3}\pi$ C) $7\sqrt{3}\pi$

D) $8\sqrt{3}\pi$ E) $9\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN

Tema: Cono

Análisis y procedimiento

Nos piden

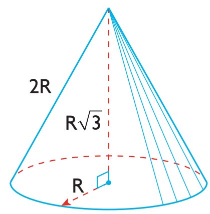
$$\mathbb{V}_{(\text{cono equilátero})}=\mathbb{V}_x$$

Por dato sabemos que

$$r=\sqrt{3}\ \text{cm}$$

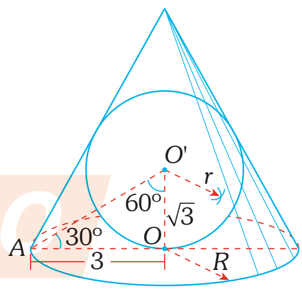
Nota

Cono equilátero



$$\mathbb{V}=\frac{R^3\sqrt{3}\pi}{3}$$

En el problema tenemos



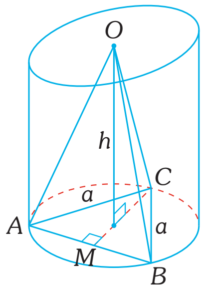
- $\triangle O'OA$: $R=3$
- $\mathbb{V}_x=\dfrac{3^3\sqrt{3}\pi}{3}$

$\therefore\ \mathbb{V}_x=9\sqrt{3}\pi$

Respuesta: $9\sqrt{3}\pi$

PREGUNTA N.° 27

Si el volumen de una pirámide regular es $5\sqrt{3}$ cm^3, donde *ABC* es equilátero. Entonces el volumen del tronco de cilindro es (en cm^3)



A) 12π B) 14π C) 16π
D) 18π E) 20π

RESOLUCIÓN

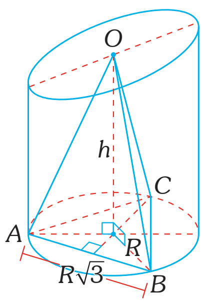
Tema: Tronco de cilindro

Análisis y procedimiento

Piden $\mathbb{V}_{\text{T.C.}}$

Datos

- $\triangle ABC$ es equilátero.
- $\mathbb{V}_{O\text{-}ABC} = 5\sqrt{3}$ cm^3



Sea

$\mathbb{V}_{\text{T.C.}}$: volumen del tronco de cilindro

$\mathbb{V}_{\text{T.C.}} = \pi R^2 h$ (*)

Del dato

$$\mathbb{V}_{O\text{-}ABC} = \frac{1}{3}\frac{(R\sqrt{3})^2\cancel{\sqrt{3}}}{4}\times h = 5\cancel{\sqrt{3}}$$

$\rightarrow R^2h = 20$

Reemplazando en (*).

$\mathbb{V}_{\text{T.C.}} = 20\pi$

Respuesta: 20π

PREGUNTA N.° 28

Dadas las siguientes proposiciones:

I. Dados tres puntos no colineales es posible escoger un cuarto punto de modo que el cuadrilátero formado tenga sus diagonales de la misma longitud.

II. Es posible construir un cuadrilátero cuyos lados sean 1; 2; 4 y 10 unidades.

III. Si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces el cuadrilátero es un trapecio isósceles.

Son correctas:

A) solo I B) I y II C) I y III
D) II y III E) solo III

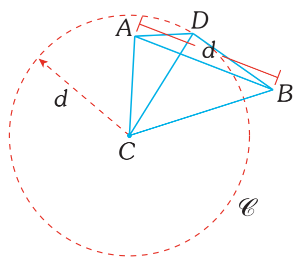
RESOLUCIÓN

Tema: Cuadrilátero

Análisis y procedimiento

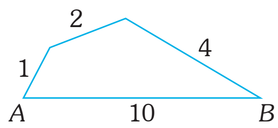
Nos piden indicar qué proposiciones son correctas.

I. **Correcta**



Sí es posible ubicar un punto en la $\mathscr{C}$, tal que dicho cuadrilátero tiene diagonales de igual longitud.

II. **Incorrecta**



Debe cumplir que

$AB < 1+2+4$

$AB < 7$

Como $AB=10$, entonces la proposición es incorrecta.

III. **Incorrecta**

El cuadrado tiene diagonales congruentes y no es un trapecio isósceles.

Respuesta: solo I

PREGUNTA N.º 29

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, $AC=2AB$. Si $AC=6$ cm, calcule la longitud (en cm) de $\overline{IM}$, donde M es el punto medio de $\overline{AC}$ e I es el incentro del triángulo ABC.

A) $3\sqrt{3-\sqrt{3}}$ B) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ C) $3\sqrt{3+\sqrt{3}}$
D) $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$ E) $3\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN

Tema: Puntos notables

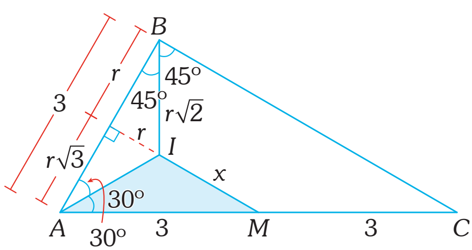
Análisis y procedimiento

Nos piden x.

Por dato

$AC=2(AB)=6$

I: incentro del $\triangle ABC$



Se observa que

$\triangle ABI \cong \triangle AIM$ (caso L-A-L)

$\rightarrow$ $MI=BI$ o sea $x=r\sqrt{2}$

$AB=r\left(\sqrt{3}+1\right)=3$

$r=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

Luego

$$x=r\sqrt{2}=3\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x=3\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ x=3\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Respuesta: $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$

PREGUNTA N.º 30

En un cono truncado está inscrita una esfera, cuyo volumen es igual a $\dfrac{6}{13}$ del volumen del cono truncado.

Determine la medida del ángulo formado por la generatriz del cono y su base interior.

A) 15º B) 30º C) 45º
D) 60º E) 75º

RESOLUCIÓN

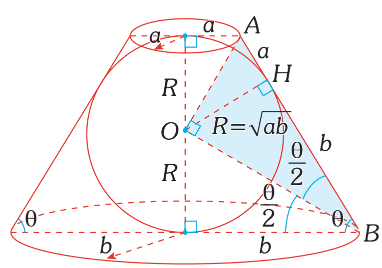
Tema: Tronco de cono

Análisis y procedimiento

Nos piden la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y la base del cono (θ).

Dato:

$$\mathbb{V}_{\text{esfera}}=\frac{6}{13}\mathbb{V}_{\text{cono}}$$



Del dato

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{6}{13}\left[\frac{\pi 2R}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)\right]$$

$$\rightarrow\ 10R^2=3\left(a^2+b^2\right) \qquad (*)$$

En el ⊿AOB, $R^2=ab$.

Reemplazamos en (*).

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{10}{3}$$

$$\rightarrow\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{1}{3}+3$$

Y como $a<b \rightarrow a=1$ y $b=3$

El ⊿AOB es notable.

$$\rightarrow\ \frac{\theta}{2}=30^\circ$$

$$\therefore\ \theta=60^\circ$$

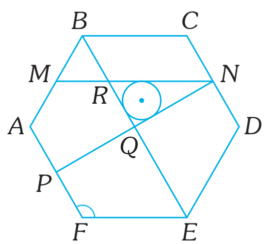
Nota

Faltó indicar que el tronco de cono es de revolución.

Respuesta: 60°

PREGUNTA N.° 31

En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular; M, N y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AF}$ respectivamente; calcule el radio (en cm) de la circunferencia inscrita en el triángulo QNR, si $AF=\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN

Tema: Polígonos

Análisis y procedimiento

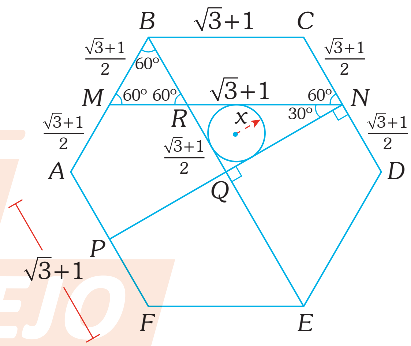
Datos:

$ABCDEF$ es un hexágono regular.

M, N y P son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AF}$.

$AF=\left(\sqrt{3}+1\right)$

Nos piden el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (x).



Se observa que $\overline{BE}//\overline{CD}$ y $\overline{BC}//\overline{MN}$

$$\rightarrow\ RN=\sqrt{3}+1$$

El ⊿RQN es notable de 30° y 60°.

$$\rightarrow\ RQ=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ y } QN=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

Por Poncelet

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=\sqrt{3}+1+2x$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}$$

Respuesta: $\frac{1}{2}$

PREGUNTA N.° 32

Se tiene un hexaedro regular *ABCD-EFGH*, se ubican los centros *M*, *N* y *T* de las caras *AEFB*, *EFGH* y *GCDH* respectivamente, *J* es punto medio de $\overline{GC}$. Sabiendo que *EF*=4 cm, calcule el área de la región *MNJ* (en cm^2).

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

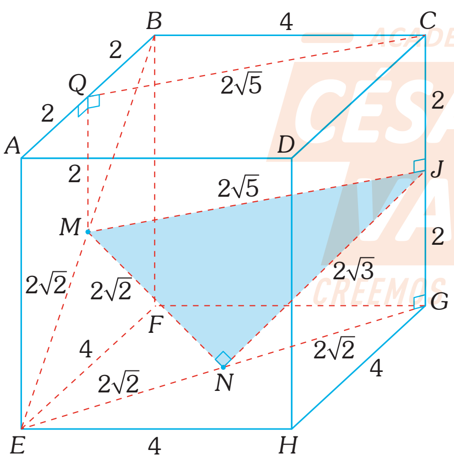
RESOLUCIÓN

Tema: Poliedros regulares

Análisis y procedimiento

Datos: *M*, *N* y *T* son centros de las caras *AEFB*, *EFGH* y *GCDH*, además, *CJ*=*JG* y *EF*=4.

Piden $\mathbb{A}_{MNJ}$.



Note que $\triangle EMN$ es equilátero, entonces $MN = 2\sqrt{2}$.

$\triangle QBC$: $QC = 2\sqrt{5} \rightarrow MJ = 2\sqrt{5}$

$\triangle NGJ$: $NJ = 2\sqrt{3}$

Luego: $m\measuredangle MNJ=90° \rightarrow \mathbb{A}_{MNJ} = \dfrac{(MN)(NJ)}{2}$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{MNJ} = \frac{(2\sqrt{2})(2\sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore \mathbb{A}_{MNJ} = 2\sqrt{6}$$

Respuesta: $2\sqrt{6}$

PREGUNTA N.° 33

Dada la ecuación trigonométrica $5\cos(x)-4\text{sen}(x)=4$, determine el valor positivo de $\text{sen}(x_1)$, donde x_1, es una solución de la ecuación planteada.

A) $\dfrac{9}{41}$ B) $\dfrac{16}{41}$ C) $\dfrac{25}{41}$
D) $\dfrac{32}{41}$ E) 1

RESOLUCIÓN

Tema: Identidades trigonométricas del arco doble

Análisis y procedimiento

$$5\cos x-4\text{sen}x=4$$

$$5\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)-4\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)=4$$

$$5-5\tan^2\frac{x}{2}-8\tan\frac{x}{2}=4+4\tan^2\frac{x}{2}$$

$$9\tan^2\frac{x}{2}+8\tan\frac{x}{2}-1=0$$

$$\left(9\tan\frac{x}{2}-1\right)\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)=0$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{9}$$

$$\tan\frac{x_1}{2}=\frac{1}{9}$$

Nos piden

$$M=\text{sen}x_1$$

$$M=\frac{2\tan\frac{x_1}{2}}{1+\tan^2\frac{x_1}{2}}$$

$$M=\frac{2\left(\frac{1}{9}\right)}{1+\left(\frac{1}{9}\right)^2}$$

$$M=\frac{\frac{2}{9}}{1+\frac{1}{81}}$$

$$\therefore\ M=\frac{9}{41}$$

Respuesta: $\dfrac{9}{41}$

PREGUNTA N.º 34

Simplifique la expresión

$$H=\frac{\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{2a}{1+a^2}\right)+2\operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)}{\operatorname{arc\,tan}\left[\operatorname{arc\,cot}(\tan(2a))-\operatorname{arc\,cot}(\tan(3a))\right]}$$

considerando $\operatorname{arc\,tan}(a)\neq 0$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas inversas

Análisis y procedimiento

Nos piden simplificar la expresión H.

Sea $a=\tan\alpha$ y además por dato $\arctan(a)\neq 0$.

Reemplazando en H.

$$H=\frac{\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)+2\operatorname{arccos}\left(\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)}{\arctan\left(\left(\dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}-\arctan(\tan 2a)\right)-\left(\dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}-\arctan(\tan 3a)\right)\right)}$$

$$H=\frac{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}2\alpha)+2\operatorname{arc\,cos}(\cos 2\alpha)}{\arctan(\arctan(\tan 3a)-\arctan(\tan 2a))}$$

$$H=\frac{2\alpha+2(2\alpha)}{\arctan(a)}$$

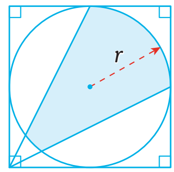
$$H=\frac{6\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}}$$

$\therefore\ H=6$

Respuesta: 6

PREGUNTA N.º 35

En la figura mostrada "r" mide 3 cm. Determine el valor aproximado del área sombreada en cm^2.

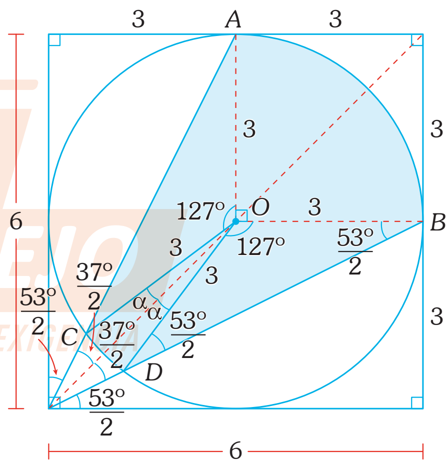


A) 15,52 B) 16,35 C) 17,40
D) 18,53 E) 19,23

RESOLUCIÓN

Tema: Área de un sector circular

Análisis y procedimiento



Del gráfico

$$\frac{37^\circ}{2}+\alpha=\frac{53^\circ}{2}\ \rightarrow\ \alpha=8^\circ$$

$$\mathbb{S}=\mathbb{S}_{\triangleleft COD}+2\mathbb{S}_{\triangle ODB}+\mathbb{S}_{\triangleright AOB}$$

$\mathbb{S}$: Área de la región sombreada

Donde

$$\mathbb{S}_{\triangleleft COD}=\frac{16\pi}{180}\frac{(3)^2}{2};\ \mathbb{S}_{\triangle ODB}=\frac{3\cdot 3}{2}\operatorname{sen}127^\circ$$

$$\text{y } \mathbb{S}_{\triangleright AOD}=\frac{\pi\cdot 3^2}{4}$$

Luego

$$\mathbb{S}=\frac{2\pi}{5}+2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{9\pi}{4}=\frac{53\pi}{20}+\frac{36}{5}$$

Considerando π=3,14.

$\mathbb{S}$=15,52 (aproximadamente)

Respuesta: 15,52

PREGUNTA N.º 36

Determine la ecuación polar de la parábola

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

A) $r=\dfrac{1}{1+2\operatorname{sen}\theta}$

B) $r=\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$

C) $r=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}\theta}$

D) $r=\dfrac{-1}{1+\operatorname{sen}\theta}$

E) $r=\dfrac{-1}{1-\operatorname{sen}\theta}$

RESOLUCIÓN

Tema: Ecuación polar de una cónica

Análisis y procedimiento

Nos piden la ecuación polar de la parábola.

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

Reemplazamos $x=r\cos\theta \wedge y=r\operatorname{sen}\theta$.

$$r\operatorname{sen}\theta=-\frac{1}{2}r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}$$

$$2r\operatorname{sen}\theta=-r^2\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)+1$$

$$2r\operatorname{sen}\theta=-r^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta+1$$

$$r^2=r^2\operatorname{sen}^2\theta-2r\operatorname{sen}\theta+1$$

$$r^2=(r\operatorname{sen}\theta-1)^2$$

$$r=r\operatorname{sen}\theta-1 \vee r=-r\operatorname{sen}\theta+1$$

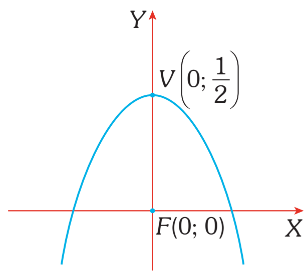
$$r=\frac{-1}{1-\operatorname{sen}\theta} \vee r=\frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$$

Graficamos.

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

$$x^2=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

$$\to V\left(0;\frac{1}{2}\right) \wedge \begin{array}{l}4P=-2\\ P=-\dfrac{1}{2}\end{array}$$



Como el foco (F) está ubicado en el polo, la ecuación polar de la parábola es

$$r=\frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$$

Respuesta: $r=\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$

PREGUNTA N.º 37

Sean S, C y R las medidas en grados sexagesimales, centesimales y radianes de un mismo ángulo, respectivamente.

Se cumple: $\left(\dfrac{S}{3}-\dfrac{C}{5}\right)^2-\dfrac{20R}{\pi}>0$

Calcule el menor valor posible (en radianes) para dicho ángulo positivo, sabiendo que S y C son números enteros.

A) $\dfrac{\pi}{10}$ B) $\dfrac{\pi}{11}$ C) $\dfrac{\pi}{13}$

D) $\dfrac{\pi}{15}$ E) $\dfrac{\pi}{20}$

RESOLUCIÓN

Tema: Sistemas de medidas angulares

Análisis y procedimiento

$$\left(\frac{S}{3}-\frac{C}{5}\right)^2-\frac{20R}{\pi}>0;\ S>0\wedge C>0$$

$$\left(\frac{9k}{3}-\frac{10k}{5}\right)^2-\frac{20}{\pi}\left(\frac{\pi k}{20}\right)>0;\ k>0$$

$$k^2-k>0$$

$$k(k-1)>0$$

$$k<0\vee k>1$$

Nos piden el menor valor entero positivo.

$\rightarrow\ k=2$

Reemplazamos

$$R=\frac{\pi}{20}k$$

$$R=\frac{\pi}{20}(2)$$

$$\therefore\ R=\frac{\pi}{10}$$

Respuesta: $\frac{\pi}{10}$

PREGUNTA N.º 38

Calcule el mayor valor entero de k, si θ pertenece al cuarto cuadrante y se cumple:

$$\begin{cases}4\operatorname{sen}^2(\theta)-4[\![\cos(\theta)+1]\!]\operatorname{sen}(\theta)-[\![\operatorname{sen}(\theta)]\!]\leq 0,\\ \operatorname{sen}(\theta)=\dfrac{2k-3}{2}\end{cases}$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN

Tema: Inecuaciones trigonométricas

Análisis y procedimiento

Nos piden el mayor valor entero de k.

Por dato sabemos que

$\theta\in$ IVC; entonces, $0<\cos\theta<1$

I. Si analizamos la inecuación dada, tenemos

$$4\operatorname{sen}^2\theta-4[\![\cos\theta+1]\!]\operatorname{sen}\theta-[\![\operatorname{sen}\theta]\!]\leq 0$$

Entonces,

$\operatorname{sen}\theta=1/2$ (resultado incorrecto ya que $\theta\in$ IVC)

Debido a lo anterior, consideraremos que la condición debe ser

$$4\operatorname{sen}^2\theta+4[\![\cos\theta+1]\!]\operatorname{sen}\theta-[\![\operatorname{sen}\theta]\!]\leq 0$$

$$4\operatorname{sen}^2\theta+4(1)\operatorname{sen}\theta-(-1)\leq 0$$

$$4\operatorname{sen}^2\theta+4\operatorname{sen}\theta+1\leq 0$$

$$(2\operatorname{sen}\theta+1)^2\leq 0$$

Luego

$$2\operatorname{sen}\theta+1=0$$

$$\operatorname{sen}\theta=-\frac{1}{2}$$

II. Reemplazamos en

$$\underbrace{\operatorname{sen}\theta}=\frac{2k-3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{2k-3}{2}$$

$$\therefore\ k=1$$

Respuesta: 1

PREGUNTA N.º 39

Calcule el mayor valor de $x<360º$, correspondiente al máximo valor de $V=\operatorname{sen}(4x)+\cos(4x)$.

A) 324º45'
B) 358º45'
C) 258º45'
D) 281º15'
E) 326º15'

RESOLUCIÓN

Tema: Circunferencia trigonométrica

Análisis y procedimiento

$V=\text{sen}4x+\cos4x;\ x<360°$

$V=\sqrt{2}\,\text{sen}(4x+45°)$

Para que V sea máximo, se debe cumplir

$\text{sen}(4x+45°)=1 \rightarrow 4x+45°=360°n+90°;\ n\in\mathbb{Z}$

como, $x<360° \rightarrow \dfrac{360°n+45°}{4}<360°$

$\rightarrow$ $n<3{,}875$ para que x sea el mayor valor, n tiene que ser máximo.

$\rightarrow$ $n=3$

Luego

$$x=\frac{360°(3)+45°}{4}$$

$$x=\frac{\overset{90}{\cancel{360°}}(3)}{\underset{1}{\cancel{4}}}+\frac{45°}{4}=270°+\frac{45°}{4}$$

$x=270°+11°+15'$

$\therefore\ x=281°15'$

Respuesta: 281°15'

PREGUNTA N.° 40

Calcule el menor valor que toma la función definida por:

$$f_{(x)}=\frac{\text{sen}(3x)+2\cdot\text{sen}(2x)}{\text{sen}(x)}$$

A) -2 B) -1 C) 0

D) $\dfrac{1}{4}$ E) 1

RESOLUCIÓN

Tema: Funciones trigonométricas directas

Análisis y procedimiento

Nos piden el menor valor de $f_{(x)}$.

Analizando $f_{(x)}$, se observa que sen$x\neq0$.

$$f_{(x)}=\frac{\cancel{\text{sen}\,x}\,(2\cos2x+1)+2\left(2\cancel{\text{sen}\,x}\cos x\right)}{\cancel{\text{sen}\,x}}$$

$f_{(x)}=2\cos2x+1+4\cos x$

$f_{(x)}=2\left(2\cos^2x-1\right)+1+4\cos x$

$f_{(x)}=4\cos^2x+4\cos x-1$

$f_{(x)}=(2\cos x+1)^2-2$ (*)

Debido a que sen$x\neq0$, entonces

$-1<\cos x<1$

Formando (*) obtenemos

$0\leq(2\cos x+1)^2<9$

$-2\leq\underbrace{(2\cos x+1)^2-2}_{f_{(x)}}<7$

$-2\leq f_{(x)}<7$

Por lo tanto, el menor valor de $f_{(x)}$ es -2.

Respuesta: -2