

Objetivos

- Conocer las relaciones básicas entre las razones trigonométricas de una cierta variable.
- Aplicar las relaciones anteriores en la demostración de igualdades y simplificación de expresiones que contienen razones trigonométricas diversas de una cierta variable.

Definición

Son aquellas igualdades entre las razones trigonométricas de una cierta variable; las cuales se verifican para todo valor de la variable, que no indetermina a la razón trigonométrica existente en la igualdad.

Clasificación

I. I.T. Recíprocas

$\text{sen } x \cdot \text{csc } x = 1; \forall x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}$	$\rightarrow$	$\text{csc } x = \frac{1}{\text{sen } x}$
$\text{cos } x \cdot \text{sec } x = 1; \forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$	$\rightarrow$	$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$
$\text{tan } x \cdot \text{cot } x = 1; \forall x \neq n\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$	$\rightarrow$	$\text{cot } x = \frac{1}{\text{tan } x}$

II. I.T. Por división

$\text{tan } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}; \forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$
$\text{cot } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}; \forall x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}$

III. I.T. Pitagóricas

$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1; \forall x \in \mathbb{R}$	$\rightarrow$	$\begin{cases} \text{sen}^2 x = 1 - \text{cos}^2 x \\ \text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \end{cases}$
$\text{tan}^2 x + 1 = \text{sec}^2 x; \forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{R}$	$\rightarrow$	$\begin{cases} \text{sec}^2 x - \text{tan}^2 x = 1 \\ \text{tan}^2 x = \text{sec}^2 x - 1 \end{cases}$
$\text{cot}^2 x + 1 = \text{csc}^2 x; \forall x \neq n\pi; n \in \mathbb{R}$	$\rightarrow$	$\begin{cases} \text{csc}^2 x - \text{cot}^2 x = 1 \\ \text{cot}^2 x = \text{csc}^2 x - 1 \end{cases}$

Los tipos de ejercicios que vamos a trabajar a partir de este capítulo son los de: demostración de igualdades; simplificación de expresiones y ejercicios con condición. En esta clase, veremos los dos primeros tipos, con los siguientes ejemplos:

Tipo Demostración:

1. Demostrar:

$$\sin^3 x \cdot \csc x \cdot \cot^2 x = \cos^2 x$$

Resolución:

Trabajando en el primer miembro, pasaremos a senos y cosenos; tratando de que al reducir nos quede la expresión del segundo miembro:

$$\sin^3 x \cdot \csc x \cdot \cot^2 x = \cos^2 x$$

$$\sin^3 x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x$$

Reduciendo:

$$\cos^2 x = \cos^2 x \text{ (demostrado)}$$

2. Demostrar:

$$\sin^3 x \cdot \csc x + \cos^3 x \cdot \sec x = 1$$

Resolución:

Pasando a senos y cosenos:

$$\sin^3 x \cdot \csc x + \cos^3 x \cdot \sec x = 1$$

$$\sin^3 x \cdot \frac{1}{\sin x} + \cos^3 x \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

Reduciendo:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1} = 1 \rightarrow 1 = 1 \text{ (demostrado)}$$

3. Demostrar:

$$[(\sin x + \cos x)^2 - 1] \tan x = 2 \sin^2 x$$

Resolución:

Recuerde que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En el primer miembro:

$$[(\sin x + \cos x)^2 - 1] \tan x = 2 \sin^2 x$$

$$\underbrace{(\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1)}_1 \tan x = 2 \sin^2 x$$

$$(1 + 2 \sin x \cdot \cos x - 1) \tan x = 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \tan x = 2 \sin^2 x$$

Pasando a senos y cosenos:

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin^2 x$$

Reduciendo:

$$2 \sin^2 x = 2 \sin^2 x \text{ (demostrado)}$$

Tipo Simplificación:

1. Simplificar:

$$C = \sin x \cdot \cot x \cdot \cos x (\tan^2 x + 1)$$

Resolución:

Antes de pasar a senos y cosenos, reconozca:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Luego:

$$C = \sin x \cdot \cot x \cdot \cos x \cdot \sec^2 x$$

$$C = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Reduciendo:

$$C = 1$$

2. Simplificar:

$$L = \sin x \cdot \tan x + \cos x$$

Resolución:

Pasando a senos y cosenos:

$$L = \sin x \cdot \tan x + \cos x$$

$$L = \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x$$

$$L = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1}$$

Operando:

$$L = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

pero: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\text{Luego: } L = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

3. Reducir:

$$C = (\sec x - \cos x)(\tan x + \cot x) \sin x$$

Resolución:

Pasando a senos y cosenos:

$$C = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1} \right) \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \sin x$$

Operando:

$$C = \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \right) \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \right) \sin x$$

pero: $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Luego:

$$C = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} \cdot \sin x$$

Reduciendo:

$$C = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

4. Reducir:

$$C = (\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - \cos x)^2$$

Resolución:

En este caso sólo nos queda desarrollar los binomios:

$$C = \sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x + 4\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$$

Reduciendo:

$$C = 5\sin^2 x + 5\cos^2 x$$

$$C = 5(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1)$$

$$\therefore C = 5$$



Test de Aprendizaje

1. Demostrar: $\sin x \cot x + 2\cos x = 3\cos x$

2. Demostrar: $\tan x \cos x + \cot x \sin x = \cos x + \sin x$

3. Demostrar: $\sin^4 x \csc^2 x + \cos^4 x \sec^2 x = 1$

4. Simplificar: $C = \sin^2 x \cot x \sec x$

5. Simplificar: $C = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x}$

6. A qué es igual: $K = \tan x \cdot \cos x + \sin x$

7. Reducir: $K = (1 - \sin^2 x) \sec x$

8. Reducir: $K = \frac{\tan x + 1}{\sin x + \cos x}$

9. Reducir: $K = (\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cos x$

10. Si: $\tan x - \cot x = \sqrt{3}$; calcule: $K = \tan^2 x + \cot^2 x$



Practiquemos



1. Demostrar que:

$$\tan x \cdot \sec x \cdot \cot^2 x = \csc x$$

2. Demostrar que:

$$\sec^3 x \cdot \cot^2 x \cdot \csc x \cdot \sec x = \cos x$$

3. Demostrar que:

$$\sec^4 x \cdot \csc^2 x + \cos^4 x \cdot \sec^2 x = 1$$

4. Demostrar que:

$$\sec^5 x \cdot \csc^3 x + \cos^5 x \cdot \sec^3 x = 1$$

5. Demostrar que:

$$[(\sec x + \cos x)^2 - 1] \csc x = 2 \cos x$$

6. Demostrar que:

$$[(\sec x - \cos x)^2 - 1] \sec x = -2 \sec x$$

7. Demostrar que:

$$(\tan x + \cot x) \sec^2 x = \tan x$$

8. Demostrar que:

$$(\tan x + \cot x) \cos^2 x = \cot x$$

9. Demostrar que:

$$(\sec x - \cos x)(\csc x - \sec x) = \sec x \cdot \cos x$$

10. Demostrar que:

$$(\sec x - \sec x \cdot \tan x)(\csc x - \cos x \cdot \cot x) = \sec x \cdot \cos x$$

11. Simplificar:

$$C = \sec x(1 + \cot x) + \cos x(1 - \tan x)$$

- a) 2 b) 1 c) $2 \sec x$
d) $2 \cos x$ e) 0

12. Simplificar:

$$L = \tan x(1 + \cos x) - \sec^2 x \cdot \csc x$$

- a) $\tan x$ b) $2 \tan x$ c) $\cos x$
d) $2 \cos x$ e) $\sec x$

13. Reducir:

$$C = \sec x(1 + \sec x - \cos x) + \cos x(1 + \cos x + \sec x) - 1$$

- a) $\sec x$ b) $\cos x$ c) $2 \sec x \cdot \cos x$
d) $\sec x + \cos x$ e) $\sec x - \cos x$

14. Reducir:

$$L = \sec x(\csc x + \sec x) + \cos x(\sec x + \cos x) + 1$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. Reducir:

$$C = \frac{\sec^2 x - \sec^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$$

- a) $\tan^2 x$ b) $\cot^2 x$ c) 1
d) $\sec^2 x$ e) $\csc^2 x$

16. Reducir:

$$L = \frac{\sec^4 x - \sec^6 x}{\cos^4 x - \cos^6 x}$$

- a) 1 b) $\tan^2 x$ c) $\cot^2 x$
d) $\tan^4 x$ e) $\cot^4 x$

17. Reducir:

$$C = (3 \sec x + 2 \cos x)^2 + (2 \sec x - 3 \cos x)^2$$

- a) 7 b) 5 c) 12
d) 13 e) 15

18. Reducir:

$$L = (3 \sec x + \cos x)^2 + (\sec x - 3 \cos x)^2$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 9 e) 10

19. Reducir:

$$C = \frac{1}{\sec x + \tan x} + \frac{1}{\sec x - \tan x}$$

- a) 2 b) $2 \sec x$ c) $2 \tan x$
d) $2 \csc x$ e) $2 \cot x$

20. Reducir:

$$L = \frac{1}{\csc x - \cot x} - \frac{1}{\csc x + \cot x}$$

- a) 2 b) $2 \sec x$ c) $2 \tan x$
d) $2 \csc x$ e) $2 \cot x$



Autoevaluación



1. Demostrar que:

$$(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^4 + 3 = 4(1 + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x)$$

2. Demostrar que:

$$\sec^4 x + \tan^4 x = 1 + 2\sec^2 x \cdot \tan^2 x$$

3. Reducir:

$$C = \frac{\operatorname{sen}^6 x - \operatorname{cos}^6 x}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos}^2 x} + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x$$

- a) 1 b) 2 c) $\operatorname{sen}^4 x$
d) $\operatorname{cos}^4 x$ e) $\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{cos}^4 x$

4. Reducir:

$$C = (\sec x - \tan x - 1)(\csc x + \cot x + 1)$$

- a) 1 b) 2 c) -1
d) -2 e) $-2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$

5. Simplificar:

$$C = \frac{1 - \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x + 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x - 1}$$

- a) $\operatorname{sen} x$ b) $\operatorname{cos} x$ c) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$
d) $\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x$ e) $2(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)$



Tarea domiciliaria



1. Demostrar que:

$$\tan x \cdot \operatorname{cos}^2 x \cdot \csc x = \operatorname{cos} x$$

2. Demostrar que:

$$\cot x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \sec x = \operatorname{sen} x$$

3. Demostrar que:

$$\operatorname{sen} x(1 + \cot x) + \operatorname{cos} x(1 + \tan x) = 2(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)$$

4. Demostrar que:

$$\sec x(\operatorname{cos} x + \cot x) = 1 + \csc x$$

5. Demostrar que:

$$\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x) + \operatorname{cos} x(1 + \operatorname{cos} x) = 1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$$

6. Demostrar que:

$$\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x) + \operatorname{cos} x(1 - \operatorname{cos} x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x - 1$$

7. Demostrar que:

$$(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$$

8. Demostrar que:

$$(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2 = 1 - 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$$

9. Demostrar que:

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos}^4 x$$

10. Demostrar que:

$$\tan^2 x + \tan^4 x = \sec^4 x - \sec^2 x$$

11. Demostrar que:

$$\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$$

12. Demostrar que:

$$(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{cos} x)$$

13. Reducir:

$$C = \tan x \cdot \operatorname{cos} x \cdot \csc^2 x$$

- a) 1 b) $\operatorname{sen} x$ c) $\operatorname{cos} x$
d) $\sec x$ e) $\csc x$

14. Reducir:

$$C = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cot x + \operatorname{cos}^2 x \cdot \tan x$$

- a) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$ b) $2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$ c) 1
d) 2 e) $\sec x \cdot \csc x$

15. Reducir:

$$C = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x \cdot \tan x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x \cdot \cot x$$

- a) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$ b) 1 c) $\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x$
d) $2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$ e) 2

16. Reducir:

$$C = \operatorname{sen}^3 x(1 + \cot^2 x) - (1 - \operatorname{cos}^2 x)\csc x$$

- a) 1 b) 2 c) $2\operatorname{sen} x$
d) $2\operatorname{cos} x$ e) 0

17. Simplificar:

$$C = \frac{(1 + \tan^2 x)\operatorname{cos}^3 x + (1 + \cot^2 x)\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cot x + \operatorname{cos} x \cdot \tan x}$$

- a) 1 b) 2 c) $\tan x$
d) $\cot x$ e) $2(\tan x + \cot x)$

18. Simplificar:

$$C = \frac{(\sec^2 x - 1)(1 - \sec^2 x)(\csc^2 x - 1)(1 - \csc^2 x)}{\sec x \cdot \cos x \cdot \sec x \cdot \csc x}$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
d) $\sec x \cdot \cos x$ e) $2 \sec x \cdot \cos x$

19. Simplificar:

$$C = \sec^4 x - \tan^4 x - 2 \tan^2 x$$

- a) 1 b) -1 c) $\sec^2 x$
d) $2 \sec^2 x$ e) $-2 \sec^2 x$

20. Simplificar:

$$C = \csc^4 x - \cot^4 x - 2 \csc^2 x$$

- a) 1 b) -1 c) $\csc^2 x$
d) $-\csc^2 x$ e) 2

21. Simplificar:

$$C = (\tan x \cdot \cos x + \cot x \cdot \sec x)(\tan x + \cot x)$$

- a) 1 b) $\sec x$ c) $\csc x$
d) $\sec x + \csc x$ e) $\sec x \cdot \csc x$

22. Simplificar:

$$C = (\sec x + \cos x + 1)(\sec x + \cos x - 1)(\tan x + \cot x)$$

- a) $\sec x \cdot \cos x$ b) $2 \sec x \cdot \cos x$ c) 1
d) 2 e) $2 \sec x \cdot \csc x$

23. Reducir:

$$C = (\sec x + \tan x + 1)(\csc x - \cot x - 1)$$

- a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) -4

24. Reducir:

$$L = \frac{\tan^2 x + \cot^2 x + 1}{\tan x + \cot x + 1} - \tan x$$

- a) $\tan x$ b) $\tan x - 1$ c) $\cot x - 1$
d) $\cot x + 1$ e) $1 - \cot x$

25. Reducir:

$$C = (\sec^2 x - \cos^2 x)(\sec^4 x + \cos^4 x)(\sec^8 x + \cos^8 x) + \cos^{16} x$$

- a) $\sec^{16} x$ b) $1 + \sec^{16} x$
c) $1 - \sec^{16} x$ d) $\sec^{16} x + \cos^{16} x$
e) 0