

Objetivo del 7º tema

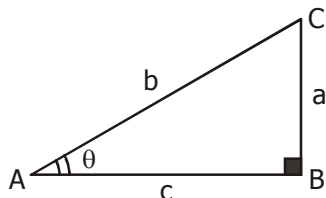
- Reconocer las propiedades de las razones trigonométricas recíprocas y de las razones trigonométricas de ángulos complementarios; así como la verificación de sus condiciones.
- Adaptar las propiedades a la resolución de ejercicios que impliquen situaciones geométricas.

Propiedades

I. R. T. recíprocas

Cuando se definen las razones trigonométricas de un ángulo agudo, se puede notar claramente que tres de ellas son las recíprocas de las otras, por lo que sus productos serán iguales a 1.

Estas parejas son:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{a}{b} \wedge \operatorname{csc} \theta = \frac{b}{a} \rightarrow \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{csc} \theta = 1 \\ \cos \theta &= \frac{c}{b} \wedge \sec \theta = \frac{b}{c} \rightarrow \cos \theta \cdot \sec \theta = 1 \\ \tan \theta &= \frac{a}{c} \wedge \cot \theta = \frac{c}{a} \rightarrow \tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{debes notar} \\ \text{que se trata} \\ \text{del mismo} \\ \text{ángulo} \end{array}$$

Por ejemplo, si se tuviera:

$$\operatorname{sen} 4x \cdot \operatorname{csc}(x + 30^\circ) = 1$$

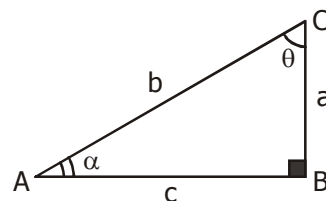
estos ángulos
deben ser iguales

$$4x = x + 30^\circ \rightarrow 3x = 30^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

II. R. T. de ángulos complementarios

En el gráfico adjunto, podemos notar que:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{a}{b} = \cos \theta \\ \tan \alpha &= \frac{a}{c} = \cot \theta \\ \sec \alpha &= \frac{b}{c} = \csc \theta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{note que :} \\ \alpha + \theta = 90^\circ \end{array}$$

Es decir, si:

$$\alpha + \theta = 90^\circ \rightarrow \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \cos \theta \\ \tan \alpha &= \cot \theta \\ \sec \alpha &= \csc \theta \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 20^\circ &= \cos 70^\circ \\ \tan 10^\circ &= \cot 80^\circ \\ \sec 40^\circ &= \csc 50^\circ \end{aligned}$$

suman 90°

También, si:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 4x &= \cos x \rightarrow 4x + x = 90^\circ \\ 5x &= 90^\circ \\ x &= 18^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 3x &= \cot 6x \rightarrow 3x + 6x = 90^\circ \\ 9x &= 90^\circ \\ x &= 10^\circ \end{aligned}$$



Test de Aprendizaje

1. Calcular "x", si: $\sin(x+10^\circ) = \cos(x+20^\circ)$

2. Calcular "x", si: $\tan(4x+20^\circ) \cdot \cot(x+80^\circ) = 1$

3. Si: $\sin x \cdot \csc(3x - 40^\circ) = 1$, calcular: $\tan 3x$

4. Reducir:

$$R = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\tan 50^\circ}{\cot 40^\circ}$$

5. Calcular: $E = \sin(x + 20^\circ) \sec(70^\circ - x)$

6. ... $\theta = \sin 37^\circ$, calcular: $\tan \theta$

7. Si: $\tan x = \cot y$, calcular:

$$E = 4 \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x+y}{3}\right)$$

8. Calcular: $(\sin 20^\circ + \cos 70^\circ) \csc 20^\circ$

9. Si: $\sin 4x \cdot \csc(x + 30^\circ) = 1$, calcular: $\tan 6x$

10. Si: $\sin 3x = \cos 2x$, calcular "x"



Practiquemos

1. Calcular: $C = 3 \sin 20^\circ \cdot \csc 20^\circ + 2 \tan 10^\circ \cdot \cot 10^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Calcular:

$$C = \frac{2 \cos 10^\circ \cdot \sec 10^\circ + 1}{5 \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ + 1}$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

3. Sabiendo que:

$$\tan \phi = \frac{\sin 20^\circ \cdot \csc 20^\circ + 1}{2 \cos 42^\circ \cdot \sec 42^\circ + 1}$$

donde " ϕ " es agudo, calcular:

$$C = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$$

- a) $\frac{3}{13}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{5}{13}$
d) $\frac{6}{13}$ e) $\frac{7}{13}$

4. Siendo " α " un ángulo agudo, tal que:

$$\cot \alpha = \frac{3 \tan 23^\circ \cdot \cot 23^\circ}{3 \cos 48^\circ \cdot \sec 48^\circ + 1}$$

calcular: $C = \sec \alpha - \tan \alpha$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

5. Sabiendo que:

$$\sin 2x \cdot \csc \left(\frac{x}{2} + 18^\circ \right) = 1$$

¿cuál es el valor de " x "?

- a) 5° b) 12° c) 18°
d) 20° e) 25°

6. Sabiendo que: $\cos 4x \cdot \sec(2x + 16^\circ) = 1$
¿cuál es el valor de " x "?

- a) 4° b) 8° c) 6°
d) 12° e) 16°

7. Sabiendo que:

$$\tan 3x \cdot \cot \left(\frac{x}{2} + 15^\circ \right) = 1$$

calcular: $C = \sin 5x \cdot \sin(7x + 3^\circ)$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

8. Siendo: $\sin 7x \cdot \csc(x + 36^\circ) = 1$
calcular: $C = \sin 10x \cdot \cos(8x - 3^\circ)$

- a) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

9. Sabiendo que: $\sin(\tan x) \cdot \csc(3 - \cot x) = 1$
calcular: $C = \tan^2 x + \cot^2 x$
siendo " x " un ángulo agudo.

- a) 9 b) 7 c) 5
d) 8 e) 6

10. Sabiendo que: $\cos(\tan x) \cdot \sec(\cot x + 4) = 1$
calcular: $C = \tan^2 x + \cot^2 x$
siendo " x " un ángulo agudo.

- a) 18 b) 16 c) 14
d) 24 e) 20

11. Calcular: $C = 2 \tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ + 3 \tan 20^\circ \cdot \tan 70^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. Calcular:

$$C = \sin 20^\circ \cdot \sec 70^\circ + 2 \cos 10^\circ \cdot \csc 80^\circ + 3 \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ$$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

13. Sabiendo que: $\sin 3\theta = \cos 2\theta$
¿cuál es el valor de " θ "?

- a) 9° b) 12° c) 15°
d) 18° e) 36°

14. Sabiendo que: $\sec 4x = \csc(x + 10^\circ)$
¿cuál es el valor de " x "?

- a) 2° b) 8° c) 16°
d) 24° e) 30°

15. Si: $\sin 20^\circ \cdot \cos 4x = \cos 70^\circ \cdot \sin 5x$
calcular: $C = \tan 4x \cdot \tan 5x \cdot \tan 6x$

- a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) 3
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) 9

16. Si: $\tan 26^\circ \cdot \sin 3x = \cot 64^\circ \cdot \cos(x + 10^\circ)$
calcular: $C = \tan(2x + 5^\circ) \tan^2 3x$

- a) 1 b) 3 c) 6
d) $3\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$

17. Si:

$$\sin \left(\frac{\pi}{6} \tan x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} \cot x \right)$$

calcular: $C = \tan^2 x + \cot^2 x$

- a) 7 b) 9 c) 11
d) 5 e) 3

18. Si:

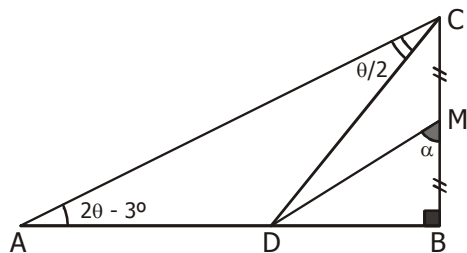
$$\tan \left(\frac{\pi}{10} \tan x \right) = \cot \left(\frac{\pi}{10} \cot x \right)$$

calcular:

$$C = \frac{\tan^2 x + \cot^2 x - 3}{\tan x + \cot x}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Si en el gráfico: $\sin 3\theta = \cos(2\theta + 10^\circ)$; calcular " $\tan \alpha$ ".

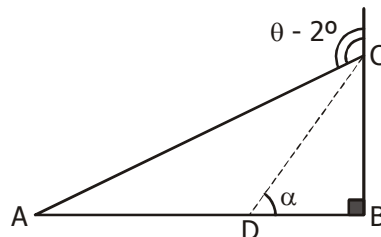


- a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{8}{5}$ e) $\frac{8}{3}$

20. Si en el gráfico:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \cot \frac{\theta}{3}$$

calcular " $\tan \alpha$ "; si además: $AD = 2DB$



- a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{8}{7}$
 d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{9}{8}$



Autoevaluación



1. Sabiendo que: $\tan 3x \cdot \tan 2x = 1$; señale el valor de:

$$C = \frac{\tan^2(3x + 6^\circ) + 4 \tan(2x + 1^\circ)}{\sin(2x - 6^\circ) + 2 \cot(3x - 1^\circ)}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

2. Sabiendo que: $\sin 4x \cdot \sec 2y = 1$; calcular el valor de:

$$C = \tan(2x + y) \cdot \tan(3x + y) \cdot \tan(x + y)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) $\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3}$

3. $\alpha + \beta = 90^\circ$; además:

$$m = \frac{4}{3 \sin \alpha + \cos \beta}; n = \frac{5 \sec \beta + 2 \csc \alpha}{7}$$

se puede afirmar que:

- a) $m = 2n$ b) $mn = 7$ c) $mn = 14$
 d) $m = n$ e) $m = 4n$

4. Reducir:

$$C = \sin^2 1^\circ - \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ - \cos^2 2^\circ + \dots \\ \dots + \sin^2 89^\circ - \cos^2 89^\circ$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 0 e) 89

5. Si el producto de cinco razones trigonométricas de un ángulo agudo es igual a $1/3$, calcular la tangente de dicho ángulo.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $2\sqrt{2}$
 c) $\frac{1}{3}$ d) 3
 e) Todas las anteriores son respuesta



Tarea domiciliaria



1. Siendo:

$$\operatorname{sen} 3\theta \cdot \operatorname{csc} 42^\circ = 1$$

¿cuál es el valor de " θ "?

- a) 8° b) 21° c) 14°
 d) 7° e) 42°

2. Siendo:

$$\cos(3x + 10^\circ) \sec(x + 18^\circ) = 1$$

¿cuál es el valor de " x "?

- a) 8° b) 9° c) 4°
 d) 12° e) 14°

3. Siendo:

$$\tan 4x \cdot \cot(x + 18^\circ) = 1$$

calcular:

$$C = \operatorname{sen} 5x + \cos 10x$$

- a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
 d) $\sqrt{2}$ e) 1

4. Siendo:

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 40^\circ \cdot \operatorname{csc} 40^\circ - \frac{1}{3} \cos 10^\circ \cdot \sec 10^\circ$$

" θ " es agudo, calcular:

$$C = 2 \operatorname{csc}^2 \theta - 17$$

- a) 17 b) 16 c) 15
 d) 14 e) 13

5. Si: $\tan \theta = 3 \tan 3^\circ \cdot \cot 3^\circ + 3$ calcular: $\sec^2 \theta$

- a) 7 b) 6 c) 37
 d) 36 e) 39

6. Calcular:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 80^\circ} + \frac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

7. Reducir:

$$P = \left(\frac{3 \operatorname{sen} 40^\circ}{\cos 50^\circ} + \frac{2 \tan 29^\circ}{\cot 61^\circ} + \frac{4 \sec 22^\circ}{\csc 68^\circ} \right)^{\cos 60^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

8. Reducir:

$$P = (5 \cos 20^\circ - 3 \operatorname{sen} 70^\circ) \csc 70^\circ$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

9. Si:

$$\operatorname{sen} 4x = \cos(x + 10^\circ)$$

¿cuál es el valor de " x "?

- a) 12° b) 14° c) 16°
 d) 18° e) 20°

10. Si:

$$\tan 2x = \cot 7x$$

¿cuál es el valor de " x "?

- a) 5° b) 10° c) 18°
 d) 8° e) 14°

11. Si:

$$\sec 5x = \csc(3x + 10^\circ)$$

calcular:

$$C = (\operatorname{sen} 3x + \cos 6x) \cdot \tan^2(4x + 5^\circ)$$

- a) 2 b) 3 c) 9
 d) 1 e) 8

12. Siendo:

$$\tan \phi = 4 \operatorname{sen} 40^\circ \cdot \sec 50^\circ - \tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ$$

" ϕ " es agudo, calcular:

$$C = \operatorname{sen} \phi \cdot \cos \phi$$

- a) 0,1 b) 0,2 c) 0,25
 d) 0,3 e) 0,125

13. Si:

$$\tan 3x = \cot(x + 10^\circ)$$

calcular:

$$P = \sec 3x + \tan(2x + 5^\circ)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

14. Si " α " y " β " son ángulos agudos que verifican las igualdades:

$$\operatorname{sen} 5\alpha = \cos 8\beta \dots\dots\dots(I)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot 2\beta = 1 \dots\dots\dots(II)$$

Calcular el valor de:

$$E = \operatorname{sen}^2(4\alpha + 5^\circ) + \tan^2(5\alpha + 2\beta) + \operatorname{sen}(3\alpha + \beta + 2^\circ)$$

- a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{45}{10}$ c) $\frac{41}{10}$
 d) $\frac{41}{40}$ e) 1

15. Si: $\tan(2x + y) \cdot \cot 40^\circ = 1$
 $\sin(x - y) = \cos 70^\circ$

calcular: $2x - 5y$

- a) 40° b) 20° c) 24°
 d) 32° e) 36°

16. Si: $\sin 40^\circ \cdot \sec 2x = 1$

calcular:

$$P = \sin(x + 5^\circ) + \sin^2(2x - 5^\circ)$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{4}{1}$ e) 1

17. Dada la igualdad:

$$\sin(2a + b) = \cos(a + 2b)$$

calcular el valor de:

$$M = \frac{\sin 3a}{\cos 3b} + \tan^2(a + b)$$

- a) $\tan 53^\circ$ b) $\frac{4}{5}$ c) 1
 d) $\frac{3}{5}$ e) $\tan 37^\circ$

18. Si: $\tan 42^\circ \cdot \tan 3x = \tan 45^\circ$

calcular:

$$P = \sec^2(3x - 3^\circ) + \tan^2(4x - 4^\circ)$$

- a) 2 b) 3 c) 5
 d) 7 e) 9

19. Si:

$$\sec \alpha = \frac{3\sin 40^\circ + \cos 50^\circ}{3\cos 50^\circ}$$

calcular: $\sin \alpha \cdot \tan \alpha$

- a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{13}$
 d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{12}{5}$

20. Si: $\tan 2x \cdot \tan x = 1$

calcular:

$$E = \tan^2 2x + \tan^2 x$$

- a) $\frac{10}{2}$ b) $\frac{9}{3}$ c) $\frac{10}{3}$
 d) $\frac{1}{5}$ e) 7

21. Sabiendo que:

$$\sin(2a + b) \cdot \sec(12^\circ - 2c) = \cos(a - 2b) \csc(78^\circ + 2c)$$

calcular:

$$M = \tan(2a + b + c) \cdot \tan(a - 2b - c)$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
 d) 5 e) 7

22. Si:

$$\tan \frac{x}{2} \cdot \tan x \cdot \tan(x + y) = \tan 2y \quad \dots (I)$$

$$\sec 2x = \csc y \quad \dots (II)$$

hallar "θ" en:

$$\sec \theta = \frac{\sin^2(x - 10^\circ) \cos(2y - 10^\circ)}{\sin(x - y)}$$

- a) 30° b) 45° c) 36°
 d) 37° e) 60°

23. Si:

$$n = \frac{\sin 42^\circ}{\cos 48^\circ} + \frac{\tan 32^\circ}{\cot 58^\circ}$$

calcular:

$$P = \sin \frac{\pi}{3n} + \tan \frac{\pi}{2n}$$

- a) 1 b) 1,5 c) 2
 d) 2,5 e) 3

24. Si "θ" es la medida de un ángulo agudo que verifica la igualdad:

$$\sec\left(\frac{\pi}{3} \tan \theta\right) = \csc\left(\frac{\pi}{4} \tan \theta\right)$$

calcular el valor de:

$$E = \frac{2\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

- a) 5 b) 6 c) 4
 d) 3 e) 7

25. Si se cumple:

$$\tan x \cdot \tan y = 1$$

calcular:

$$K = \sec\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{x + y}{3}\right)$$

- a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 d) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{6}$