6 Cálculo de la longitud de un arco

Objetivos:

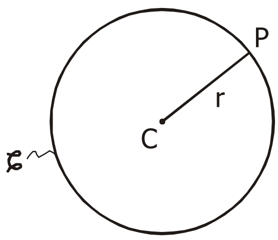
- Reconocer que los arcos tienen dos tipos de medición: angular y lineal.
- Dibujar correctamente un sector circular y reconocer sus elementos.
- Calcular correctamente la longitud de un arco y aplicar la fórmula de manera eficiente a la resolución de ejercicios de interpretación y aquellos que contienen gráficos.

Conceptos previos

(Elementos de geometría)

- **Circunferencia**

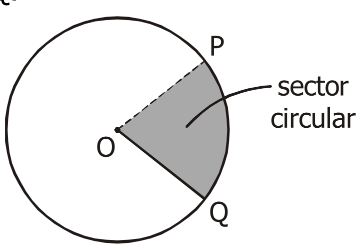
Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. A la distancia común del centro a los puntos del plano que verifican lo anterior se le denomina radio de la circunferencia.



C: centro   r: radio

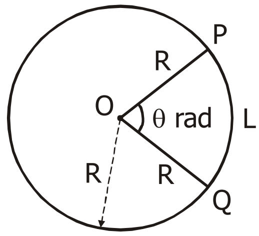
$$_{(C;\,P)} = r \quad \forall\, P \in \mathcal{C}$$

A la porción de circunferencia limitada por dos puntos de ella tales como "P" y "Q" se le denomina arco ($\overset{\frown}{PQ}$: arco PQ). Mientras que a la región limitada por $\overset{\frown}{PQ}$ y el ángulo central $P\hat{O}Q$, se le denomina sector circular POQ.



- **Cálculo de la longitud de un arco**

Si consideramos una circunferencia de radio "R" y un arco de ella $\overset{\frown}{PQ}$, procederemos a calcular la longitud de $\overset{\frown}{PQ}$ de la siguiente manera:



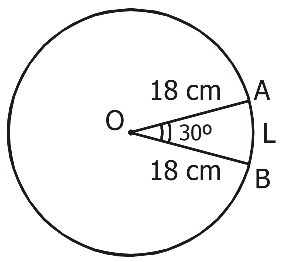
- Trazamos $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$, cuya longitud es igual a "R".
- Sea $m\,P\hat{O}Q = \theta$ rad ... (en radianes)
- Luego la longitud de $\overset{\frown}{PQ}$ es "L" y se calcula así:

$$L = \theta R$$

Note que el ángulo central debe estar expresado en radianes; y que en la gran mayoría de ejercicios se toma como referencia al sector circular que limita el ángulo central y el arco correspondiente; por ello en los ejercicios sólo se dibujará el sector y no toda la circunferencia.

Por ejemplo, calculemos la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 30° en una circunferencia de 18 cm de radio.

<u>Resolución</u>:



- $m\,A\hat{O}B = 30° = \theta$

- $\theta = 30°.\dfrac{\pi \text{rad}}{180°} \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ rad

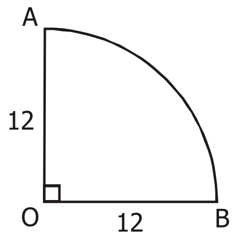
- $L = \theta R = \dfrac{\pi}{6}.18$

$L = 3\pi$ cm

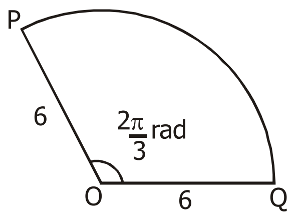
Test de Aprendizaje

1. Dibuje un sector circular indicando su ángulo central de medida 60° y su radio de medida 12 cm.

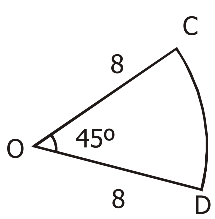
2. En el sector circular mostrado, calcular la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$.



3. En el sector circular mostrado, calcular la longitud del arco $\overset{\frown}{PQ}$.

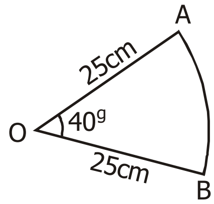


4. En el sector circular mostrado, calcular la longitud del arco $\overset{\frown}{CD}$.

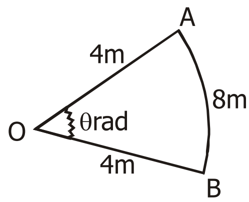


5. En un sector circular el arco mide 2π cm y el radio 18 cm ¿Cuál es la medida sexagesimal del ángulo central?

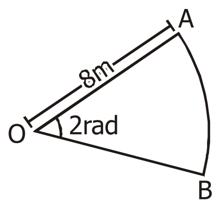
6. Calcular la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$.



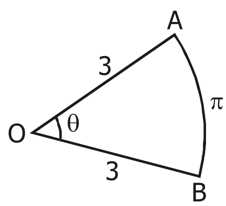
7. Hallar "θrad", si:



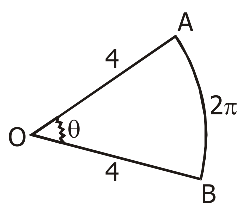
8. Calcular $L_{\overset{\frown}{AB}}$, si:



9. Calcular "θ"en el sistema sexagesimal.



10. Calcular "θ" en el sistema centesimal.



Practiquemos

1. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 45° en una circunferencia de 24 cm de radio.

a) π cm b) 2π c) 3π
d) 4π e) 6π

2. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 60° en una circunferencia de 18 cm de radio.

a) 2π cm b) 3π c) 4π
d) 5π e) 6π

3. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 70^g en una circunferencia de 200 cm de radio.

a) 50π cm b) 35π c) 70π
d) 140π e) 280π

4. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 40^g en una circunferencia de 25 cm de radio.

a) π cm b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

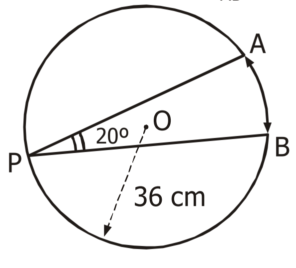
5. En un sector circular, el ángulo central mide 20° y el radio mide 45 cm. ¿Cuál es el perímetro del sector?

a) $5(18+\pi)$ b) $6(18+\pi)$ c) $5(16+\pi)$
d) $6(15+\pi)$ e) $4(25+\pi)$

6. En un sector circular, el ángulo central mide 10^g y el radio mide 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del sector?

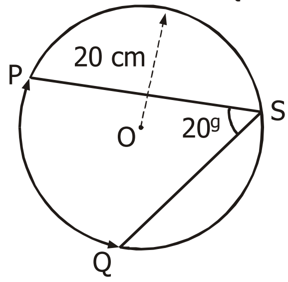
a) $2(\pi+20)$ b) $2(\pi+40)$ c) $4(\pi+20)$
d) $4(\pi+40)$ e) $2(\pi+30)$

7. De acuerdo al gráfico, calcular "$L_{\widehat{AB}}$".



a) π cm b) 8π c) 16π
d) 4π e) 2π

8. De acuerdo al gráfico, calcular "$L_{\widehat{PQ}}$".



a) π cm b) 2π c) 3π
d) 4π e) 6π

9. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de 9 cm de radio. Si se sabe que m$\hat{A}$ = 102° y m$\hat{B}$ = 20^g, ¿cuánto mide el arco que subtiende al ángulo $\hat{C}$?

a) π cm b) 2π c) 3π
d) 4π e) 6π

10. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de 18 cm de radio. Si se sabe que m$\hat{A}$ = 80^g y m$\hat{B}$ = 28°, ¿cuánto mide el arco que subtiende al ángulo $\hat{C}$?

a) π cm b) 2π c) 3π
d) 16π e) 32π

11. En un sector circular el arco mide 100 cm. Si el ángulo central se reduce a su cuarta parte y el radio se duplica, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

a) 100 cm b) 50 c) 150
d) 125 e) 25

12. En un sector circular el arco mide 24 cm. Si el ángulo central se triplica y el radio se reduce a su mitad, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

a) 36 cm b) 24 c) 48
d) 72 e) 30

13. En un sector circular el arco mide "L". Si el ángulo central se reduce en su tercera parte y el radio se incrementa en el triple, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

a) $\frac{1}{6}L$ b) $\frac{2}{3}L$ c) $\frac{4}{3}L$
d) $\frac{8}{3}L$ e) $\frac{8}{9}L$

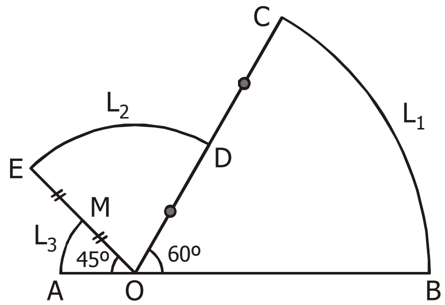
14. En un sector circular el arco mide "L". Si el ángulo central se incrementa en su mitad y el radio se reduce en su mitad, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

a) $\frac{3}{2}L$ b) $\frac{3}{4}L$ c) $\frac{2}{3}L$

d) $\frac{3}{5}L$ e) $\frac{5}{6}L$

15. De acuerdo al gráfico, calcular:

$$K = \frac{L_1 + L_2}{L_3}$$

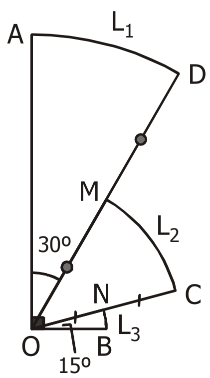


a) 7 b) $\frac{26}{3}$ c) $\frac{17}{3}$

d) 4 e) $\frac{25}{3}$

16. De acuerdo al gráfico, calcular:

$$K = \frac{L_1 + L_3}{L_2}$$



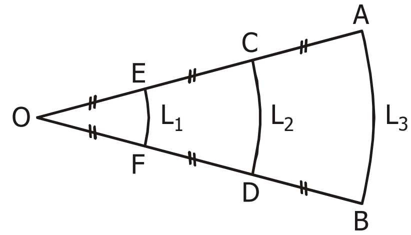
a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{7}{4}$

17. De acuerdo al gráfico, calcular:

$$K = \frac{L_1 + L_2}{L_3}$$

si: L_1, L_2 y L_3 son arcos con centro en "O".



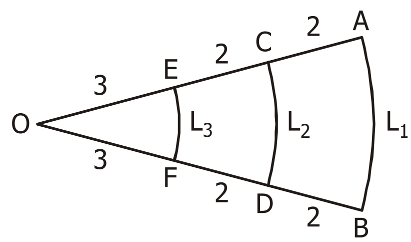
a) 1 b) 2 c) 3

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

18. De acuerdo al gráfico, calcular:

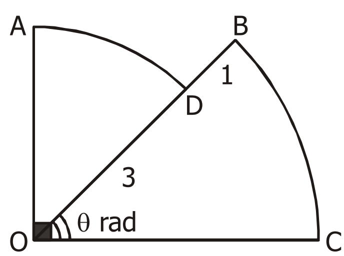
$$K = \frac{L_1 - L_3}{L_2}$$

si L_1, L_2 y L_3 son arcos con centro en "O".



a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6
d) 0,8 e) 1

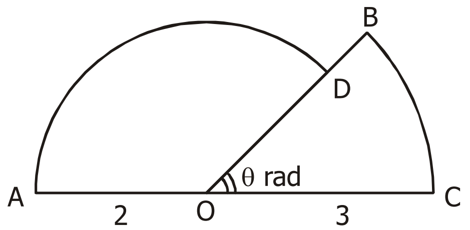
19. Del gráfico, calcular "θ", si: $L_{\overset{\frown}{AD}} = L_{\overset{\frown}{BC}}$.



a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{14}$ c) $\frac{\pi}{14}$

d) $\frac{\pi}{7}$ e) $\frac{\pi}{21}$

20. Del gráfico, calcular "θ", si: $L_{\widehat{AD}} = 2L_{\widehat{BC}}$



a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{7}$ e) $\frac{\pi}{8}$

Test de Aprendizaje

1. En Aritmética es común llamar media geométrica de los números $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ a la cantidad:

$$mg = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.a_4.....a_n}$$

Si en un sector circular la media geométrica del radio, arco y ángulo central (su número de rad.) es igual a 4, ¿cuál es la longitud del arco del sector?

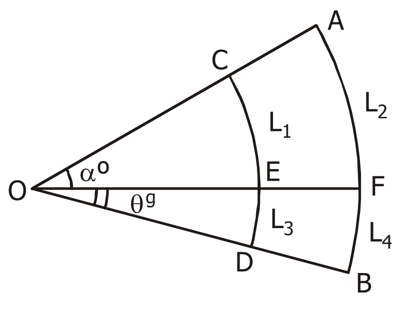
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 16

2. Cuando se define el sector circular como una porción de círculo, su ángulo central no debe exceder a 360°; es decir, el ángulo central de un sector circular debe estar comprendido entre <0°; 360°> ó en radianes entre <0; 2π rad>. Si en un sector circular el radio mide 8cm y el número de radianes del ángulo central es el máximo entero posible, ¿cuánto mide el arco?

a) 24 b) 48 c) 36
d) 2880 e) 3600

3. De acuerdo al gráfico, calcular:

$$K = \frac{(L_1 + L_4)^2 - (L_1 - L_4)^2}{(L_2 + L_3)^2 - (L_2 - L_3)^2}$$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

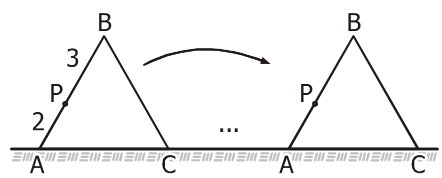
4. Calcule la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de:

$$\left\{\frac{x^\circ(3x)'}{(7x)'}\right\}^\circ$$

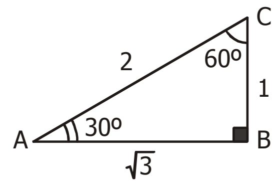
en una circunferencia donde un cuadrado inscrito tiene sus lados de longitud $2\sqrt{2}$ cm.

a) $\frac{\pi}{10}$ cm b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{2\pi}{5}$
d) $\frac{3\pi}{10}$ e) $\frac{\pi}{9}$

5. En el gráfico el triángulo comienza a girar en el sentido indicado alrededor de cada vértice hasta tener nuevamente a $\overline{AC}$ como base y manteniéndose en todo instante en el mismo plano vertical. Si el triángulo ABC es equilátero, determine la longitud de la trayectoria descrita por el punto "P".



Recuerda para ello el triángulo notable de 30° y 60°.



a) $\frac{2\pi}{3}(5+\sqrt{19})$ b) $\frac{\pi}{3}(5+\sqrt{19})$
c) $\frac{2\pi}{3}(3+\sqrt{19})$ d) $\frac{2\pi}{3}(4+\sqrt{19})$
e) $\frac{2\pi}{3}(1+\sqrt{19})$

Tarea domiciliaria

1. Calcular la longitud de un arco, correspondiente a un ángulo central de 60º en una circunferencia de 24 m de radio.

   a) 6π m b) 7π c) 8π
   d) 5π e) 10π

2. Calcular la longitud de un arco, correspondiente a un ángulo central de 72º en una circunferencia de 25m de radio.

   a) 10πm b) 11π c) 12π
   d) 13π e) 16π

3. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo inscrito de 24º en una circunferencia de 36dm de radio.

   a) $8{,}6\pi$dm b) $9{,}6\pi$ c) $10{,}6\pi$
   d) $4{,}8\pi$ e) $8{,}8\pi$

4. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo inscrito de 15º en una circunferencia de 24dm de radio.

   a) 4πdm b) 5π c) 6π
   d) 3π e) 8π

5. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 40^g en una circunferencia de radio 10 cm.

   a) π cm b) 2π c) 3π
   d) 5π e) 7π

6. En un sector circular, el arco mide 5π m y el ángulo central 30°. ¿Cuánto mide el radio?

   a) 30 m b) 33 c) 38
   d) 42 e) 48

7. En un sector circular el radio mide $\frac{2}{\pi}$ cm y el ángulo central mide 45°. Calcular el arco correspondiente.

   a) 0,1 cm b) 0,2 c) 0,3
   d) 0,4 e) 0,5

8. En un sector circular el arco mide 16π m y el ángulo central mide 144°. Calcular el radio.

   a) 14 m b) 16 c) 18
   d) 20 e) 23

9. En un sector circular la medida del radio y el arco están representados por dos números enteros consecutivos. Si el perímetro del sector es 19 cm, ¿cuál es la medida del radio?

   a) 3 cm b) 4 c) 5
   d) 6 e) 8

10. En un sector circular el arco y el radio están representados por dos números enteros consecutivos. Si el semiperímetro del sector mide 7 m, calcular el ángulo central de dicho sector.

    a) 0,2 rad b) 0,4 c) 0,6
    d) 0,7 e) 0,8

11. En un sector circular la medida del arco y el radio están representados por dos números enteros pares y consecutivos. Si el perímetro del sector es 20cm, ¿cuál es la medida del ángulo central?

    a) $\frac{4}{3}$ rad b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3}$
    d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

12. En un sector circular, el ángulo central mide 40° y su arco es L_1. Si se reduce el ángulo en 8° y el radio se duplica, se genera otro sector circular cuyo arco mide L_2. Calcular "L_1/L_2".

    a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{5}{6}$
    d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{5}{16}$

13. En un sector circular, el arco mide "L". Si el ángulo central se duplica y el radio se triplica se genera otro sector circular cuyo arco mide "L_2". Calcular "L_2".

    a) 2L b) 3L c) 4L
    d) 6L e) 12L

14. En un sector circular, el arco mide "L". Si el radio se incrementa en su triple y el ángulo central se reduce a la mitad, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

    a) L b) 2L c) 3L
    d) 4L e) 6L

15. En un sector circular el ángulo central mide 25° y el radio es "r". Si el ángulo central se reduce en 15° y el radio se incrementa en "x" generando un nuevo sector circular cuyo arco mide igual que el arco original, ¿cuál es el valor de "x"?

a) $\frac{r}{2}$ b) $\frac{r}{3}$ c) $\frac{3r}{2}$
d) $\frac{2r}{3}$ e) $\frac{3r}{4}$

16. Un tramo de una carretera está formada por dos arcos de circunferencia, el primero tiene un radio de 18 km y un ángulo central de 40º, el segundo tiene un radio de 36 km y un ángulo central de 50º.

$$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

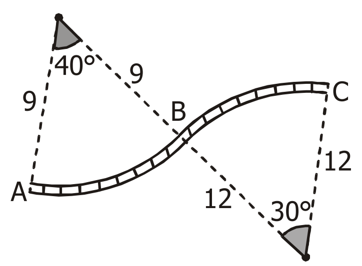
Hallar la longitud total de este tramo.

a) 35 km   b) 42   c) 44
d) 40   e) 50

17. Un tramo de una carretera está formada por dos arcos de circunferencia, el primero tiene un radio de 9km y un ángulo de 20º, el segundo tiene un radio de 72km y un ángulo central de 60º. Hallar la longitud total de este tramo.

a) 24π km   b) 25π c) 26π
d) 30π e) 20π

18. En la figura se muestra un camino que consta de arcos, con sus datos claramente indicados. Determine la longitud de dicho camino.

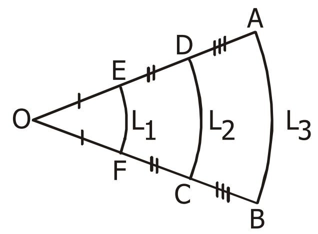


a) 2π b) 3π c) 4π
d) 5π e) 6π

19. Un tramo de una vía férrea consta de 3 arcos que subtienden ángulos centrales de 45°, 30° y 75° con radios iguales a 16 km, 24 km y 36 km. Hallar dicho tramo.

a) 30π km   b) 11π c) 13π
d) 23π e) 26π

20. Si en el gráfico: $\frac{OE}{2} = \frac{OD}{5} = \frac{OA}{9}$



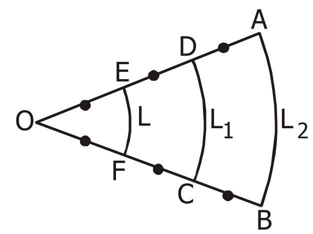
Calcular:

$$E = \frac{L_3 + L_2 + L_1}{L_1}$$

a) 3   b) 5   c) 8
d) 10   e) 11

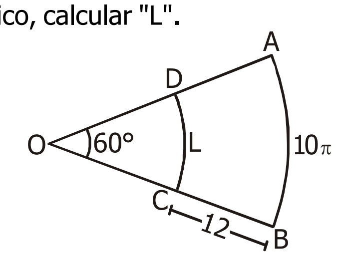
21. En el gráfico, calcular "L" si:

$$L_1 + L_2 + L = 12\pi$$



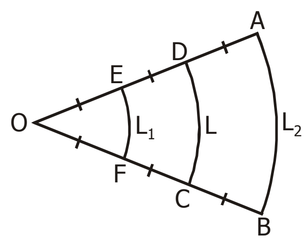
a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

22. En el gráfico, calcular "L".



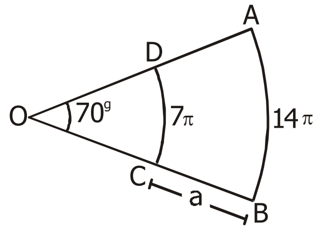
a) 2π b) 4π c) 6π
d) 8π e) 10π

23. En el gráfico, calcular "L", si: $L_1 + L_2 = 16\pi$



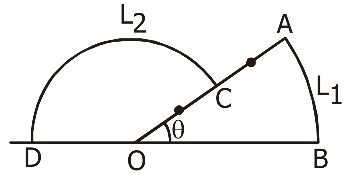
a) 4π b) 8π c) 12π
d) 16π e) 6π

24. En el gráfico, calcular "a".



a) 12 b) 15 c) 17
d) 20 e) 23

25. Calcular "θ" del gráfico mostrado, si: $\frac{L_1}{L_2}=\frac{3}{4}$.



a) $\frac{3\pi}{11}$ rad b) $\frac{3\pi}{10}$ c) $\frac{11\pi}{3}$

d) $\frac{10\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{21}$