A C A D E M I A
V I R T U A L - A Q J

TRIGONOMETRÍA

ALFREDO QUISPE JAUREGUI

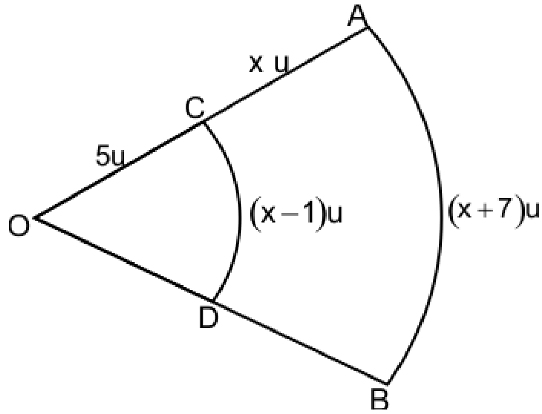
Trigonometría

SEMANA Nº 2

EJERCICIOS DE LA SEMANA Nº 2

1. En la figura AOB y COD son sectores circulares. Halle el valor de $2x - \sqrt{161}$.

A) 5
B) 4
C) 3
D) 1
E) 2



Solución:

Sea θrad la medida del ángulo central del sector circular AOB
En el sector circular COD: $x+1=5\theta$ …. (i)
En el sector circular AOB: $x+7=(5+x)\theta$ …. (ii)

(i) $\div$ (ii) entonces $\dfrac{x+1}{x+7}=\dfrac{5\theta}{(5+x)\theta}$

$\Rightarrow x^2 - x - 40 = 0$

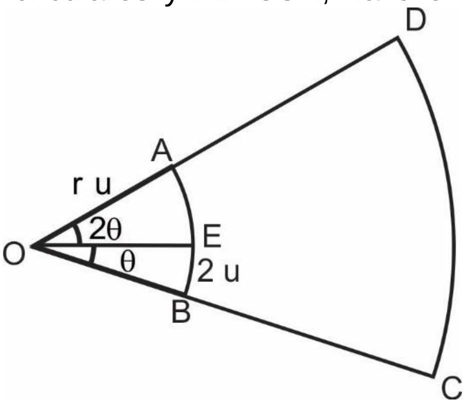
$\Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{161}{4}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{161}}{2}$

$\Rightarrow 2x - \sqrt{161} = 1$

Rpta.: D

2. En la figura AOB, DOC son sectores circulares y AD=3OA; halle el perímetro del trapecio circular ABCD.



A) $4(r+4)u$

B) $5(r+4)u$

C) $8(r+3)u$

D) $6(r+5)u$

E) $6(r+3)u$

Solución:

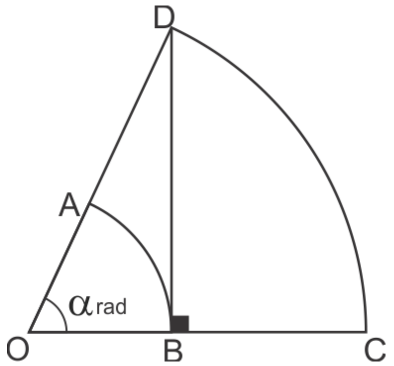
Tenemos $AD = 3r, OD = 4r$ $\Rightarrow AB = 3\theta r = 6$

$\Rightarrow DC = 12\theta r = 24$,

Así, el perímetro del trapecio circular ABCD es $(6r+30)u = 6(r+5)u$

Rpta: D

3. En la figura mostrada, AOB es un sector circular, $BD = 2u$ y el área del trapecio circular $ABCD$ es $\frac{M}{4}u^2$. Determine α en términos de M.

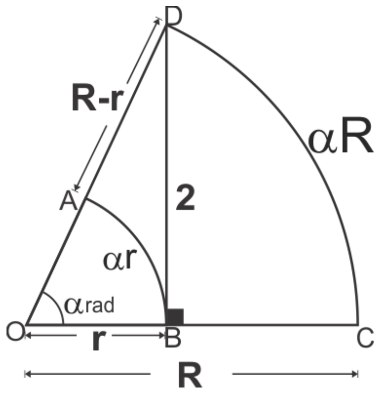


A) $\frac{M}{2}$ B) $\frac{M}{16}$

C) $\frac{M}{3}$ D) $\frac{M}{8}$

E) M

Solución:



Pitágoras en el triángulo BOD:

$r^2 + 4 = R^2 \Rightarrow 4 = R^2 - r^2$

Área del trapecio circular ABCD:

$$\frac{(R\alpha + r\alpha)(R-r)}{2} = \frac{M}{4} \Rightarrow \alpha(R^2 - r^2) = \frac{M}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{M}{8}.$$

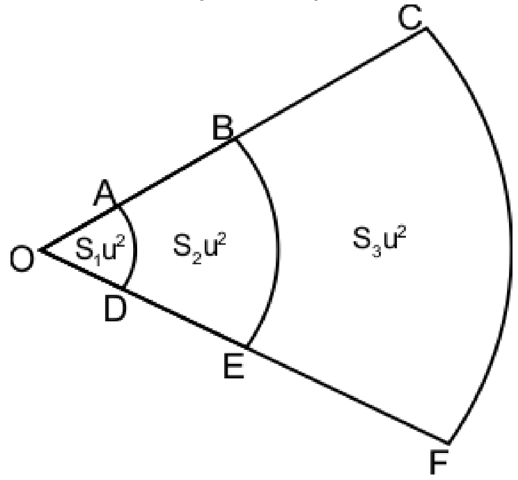
Rpta: D

4. En la figura AOD, BOE y COF son sectores circulares Si las medidas de $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BE}$ y $\overset{\frown}{CF}$ son directamente proporcionales a 2, 3 y 5, respectivamente, halle el valor de $\dfrac{S_3 - 1{,}5S_1}{S_2}$.

A) 2 B) 3

C) 3,5 D) 4

E) 4,5



Solución:

$$L_{AD} = 2k, L_{BE} = 3k, L_{CF} = 5k \Rightarrow S_1 = \frac{4k^2}{2\theta}; S_1 + S_2 = \frac{9k^2}{2\theta} \Rightarrow S_2 = \frac{5k^2}{2\theta}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{25k^2}{2\theta} \Rightarrow S_3 = \frac{16k^2}{2\theta}$$

$$\frac{S_3 - 1{,}5S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{16k^2}{2\theta} - \dfrac{6k^2}{2\theta}}{\dfrac{5k^2}{2\theta}} = 2$$

Rpta.: A

5. Ibet compra una pizza de 2r cm de diámetro y corta una tajada, como se muestra en la figura. Si el área de la tajada cortada es al área de la pizza restante como 1 es a 11, halle el exceso del área mayor con respecto al área menor.

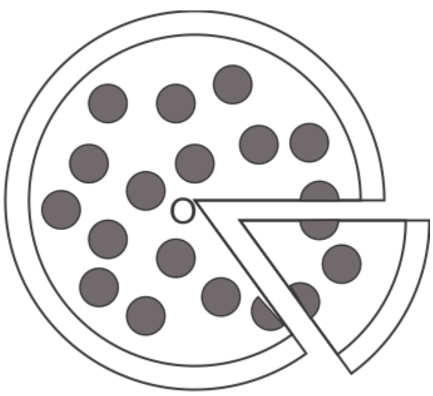
A) $\dfrac{9\pi}{2} r^2 \ cm^2$

B) $\dfrac{7\pi}{6} r^2 \ cm^2$

C) $\dfrac{5\pi}{4} r^2 \ cm^2$

D) $\dfrac{\pi}{5} r^2 \ cm^2$

E) $\dfrac{5\pi}{6} r^2 \ cm^2$



Solución:

A_1**:** Área de la pizza restante

A_2**:** Área de la tajada de pizza cortada

θ: Angulo central de la tajada cortada.

$$A_2 = \frac{1}{2}\theta r^2 \;\;,\;\; A_1 = \frac{1}{2}(2\pi - \theta)r^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}(2\pi-\theta)r^2}{\frac{1}{2}\theta r^2} = \frac{11}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

$$A_1 - A_2 = \frac{11}{12}\pi r^2 - \frac{1}{12}\pi r^2 = \frac{5\pi}{6}r^2$$

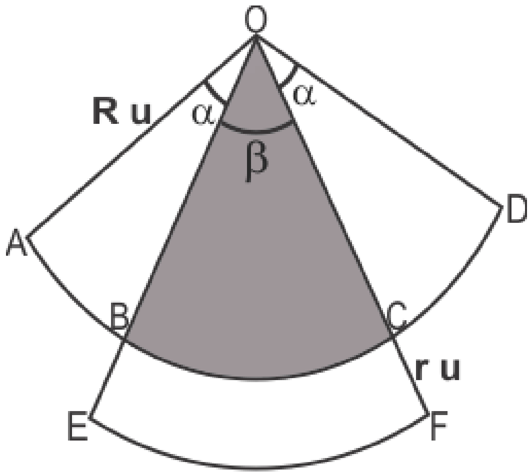
Rpta.: E

6. En el gráfico mostrado, AOD y EOF son sectores circulares, $\frac{r}{R} = \frac{2}{11}$ y el área de la región sombreada es igual al área de la región no sombreada. Halle el valor de $\frac{\beta}{\alpha}$.

A) $\frac{123}{84}$ B) $\frac{175}{81}$

C) $\frac{213}{81}$ D) $\frac{242}{73}$

E) $\frac{242}{91}$

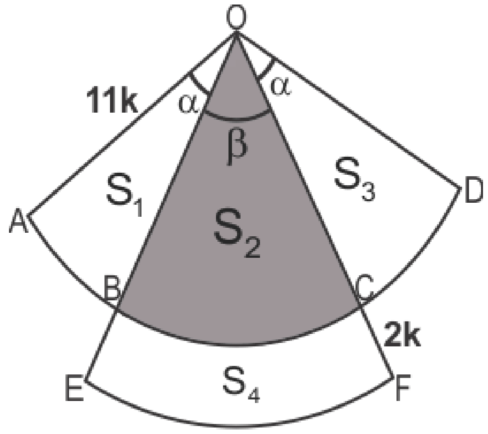


Solución:

Del gráfico, $S_1 + S_3 + S_4 = S_2$

$$\frac{\alpha(11k)^2}{2} + \frac{\alpha(11k)^2}{2} + \frac{(11k\beta + 13k\beta)2k}{2} = \frac{\beta(11k)^2}{2}$$

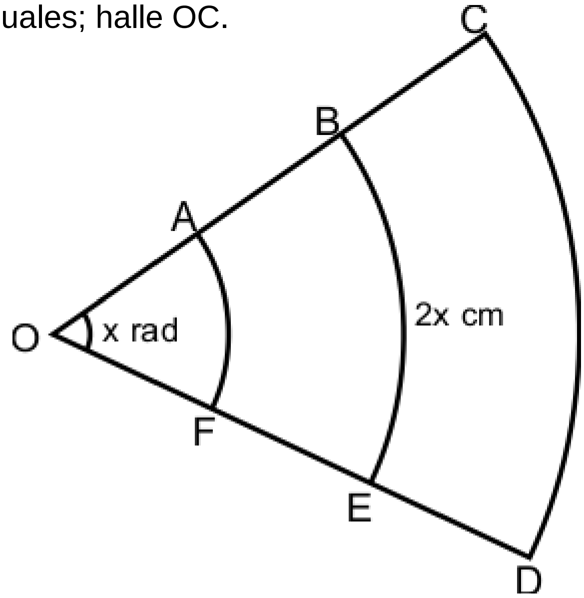
$$242\alpha k^2 + 48\beta k^2 = 121\beta k^2 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{242}{73}$$



Rpta.: D

.

7. En la figura mostrada, las áreas del sector circular AOF, del trapecio circular ABEF y del trapecio circular BCDE son iguales; halle OC.



A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm

B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm

C) $2\sqrt{6}$ cm

D) $\sqrt{6}$ cm

E) $\sqrt{3}$ cm

Solución:

Sea $OA = OF = r_1$, $OB = OE = r_2$ y $OC = OD = r_3$

$$\text{Área}_{AOF} = \text{Área}_{ABEF} = \text{Área}_{BCDE}$$

$$\frac{1}{2}\alpha r_1^2 = \frac{1}{2}\alpha r_2^2 - \frac{1}{2}\alpha r_1^2 = \frac{1}{2}\alpha r_3^2 - \frac{1}{2}\alpha r_2^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \text{ y } r_3^2 = 2r_2^2 - r_1^2$$

$$2x = x \cdot r_2 \Rightarrow r_2 = 2\text{cm}$$

También $\Rightarrow r_1 = \sqrt{2}\text{cm}$

$\Rightarrow r_3 = \sqrt{6}\text{cm}$

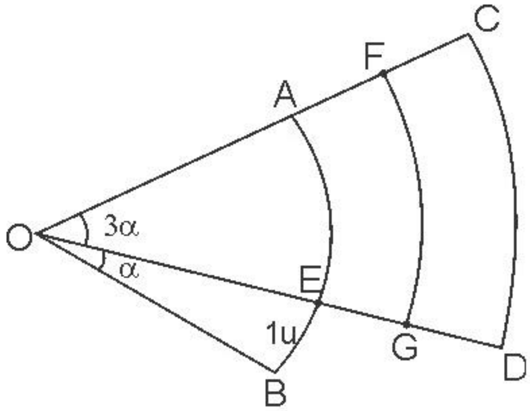
Rpta.: D

8. En la figura AOB AOE FOG y COD son sectores circulares y $AF = FC$ .Si las medidas de $\overset{\frown}{FG}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son directamente proporcionales a 2 y 3, respectivamente, calcule la longitud del arco FG.

A) 3 u B) 5 u

C) 4,5 u D) 6 u

E) 10 u



Solución:

$AF = FC = h$ y $AE = 3u$

$\Rightarrow FG = 2k$ y $CD = 3k$

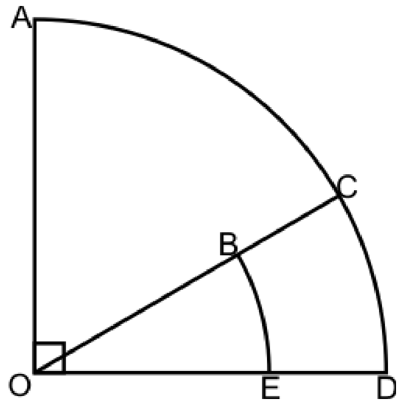
F: punto medio de AC.

BASE MEDIA

$2k = \dfrac{3+3k}{2} \Rightarrow k = 3 \Rightarrow FG = 6u$

Rpta.: D

9. En la figura, AOD y BOE son sectores circulares. Si $OD = 3ED$ y el área de los sectores circulares AOC y BOE son $6\pi\ u^2$ y $\dfrac{4\pi}{3}\ u^2$, respectivamente, halle la longitud del arco CD.

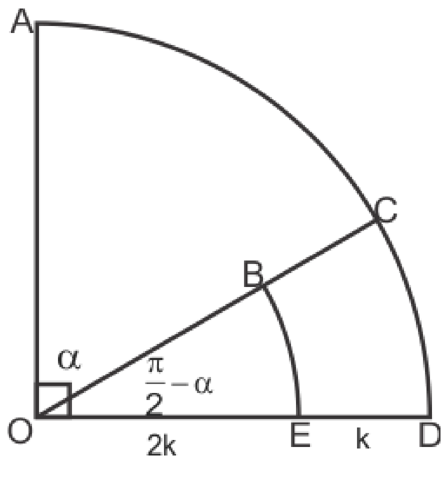


A) $\dfrac{5\pi}{8}u$ B) $\dfrac{\pi}{4}u$

C) $2\pi\ u$ D) $\pi\ u$

E) $\dfrac{2\pi}{3}u$

Solución:



$S_{AOC} = 6\pi u^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\alpha\left(3k\right)^2 = 6\pi \Rightarrow \alpha k^2 = \dfrac{4\pi}{3}$

$S_{BOE} = \dfrac{4}{3}\pi u^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(2k\right)^2 = \dfrac{4}{3}\pi$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{2}k^2 - \alpha k^2 = \dfrac{2\pi}{3}$

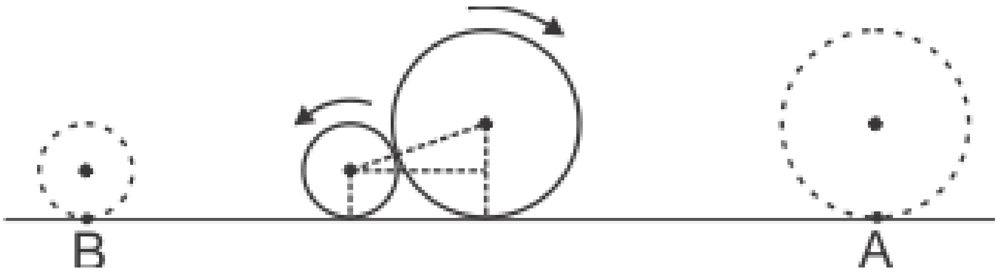
$\Rightarrow \dfrac{\pi}{2}k^2 - \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow k=2$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)k^2 = \dfrac{2}{3}\pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} - \alpha = \dfrac{\pi}{6}$; luego, la longitud del arco CD es π u

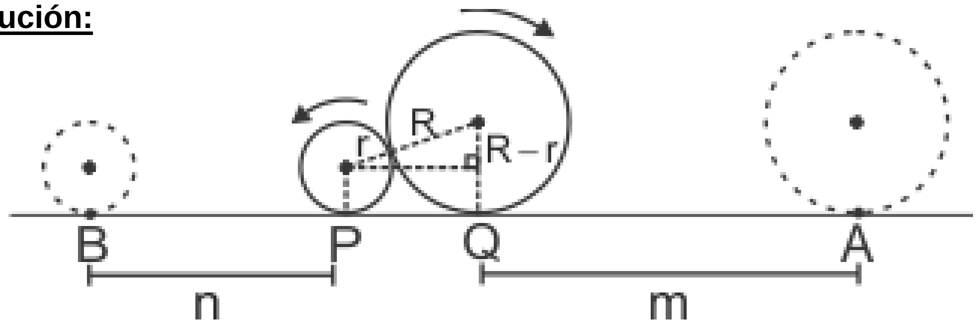
Rpta.: D

10. En la figura mostrada, la rueda más grande da 8 vueltas y la más pequeña da solo 6 vueltas, en las direcciones indicadas, hasta ubicarse en las posiciones A y B respectivamente. Se sabe que los radios de las ruedas están en relación de 1 a 2 y la distancia entre los puntos A y B es $\left(88\pi + 4\sqrt{2}\right)$u. ¿En cuántas unidades excede el radio mayor al radio menor?



A) 5 u B) $\frac{4}{3}$ u C) 3 u D) 1 u E) 2 u

Solución:



$\left(R+r\right)^2 = \left(R-r\right)^2 + PQ^2 \Rightarrow PQ^2 = 4rR \Rightarrow PQ = 4r\left(2r\right)$

$\Rightarrow PQ = 2\sqrt{2}r$

$\frac{n}{2\pi r} = 6 \Rightarrow n = 12\pi r$

$\frac{m}{2\pi R} = 8 \Rightarrow m = 16\pi R$

Así $BA = n + m + PQ \Rightarrow 88\pi + 4\sqrt{2} = 12\pi r + 16\pi R + 2\sqrt{2}r$

$\Rightarrow 2r\left(22\pi + \sqrt{2}\right) = 4\left(22\pi + \sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow r = 2; R = 4$

Luego, el exceso es de 2 u

Rpta.: E

EVALUACIÓN Nº 2

1. En la figura, el trapecio circular ABCD tiene $48\ cm^2$ de área. Halle el área del sector circular AOB.

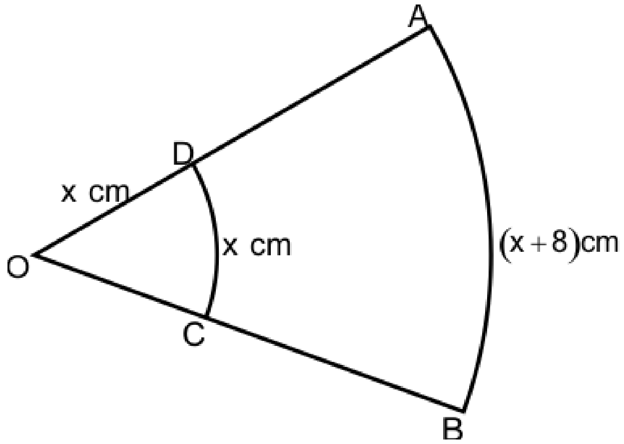
A) $50\ cm^2$

B) $52\ cm^2$

C) $51\ cm^2$

D) $54\ cm^2$

E) $53\ cm^2$



Solución:

$$AD = 8cm\ ,\ 48 = \left(\frac{x+(x+8)}{2}\right)\cdot 8 \Rightarrow x = 2$$

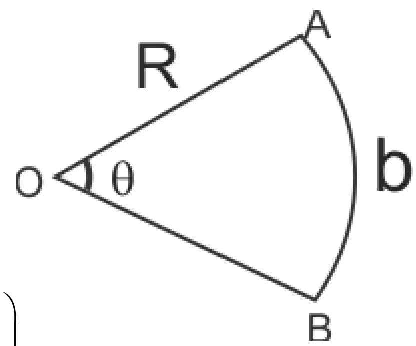
$$\therefore \text{Area}_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2 = 50cm^2$$

Rpta.: A

2. Se cerca un terreno cuya forma es de un sector circular con una valla de longitud L m. Si el área del terreno es la máxima posible, determine el ángulo central del terreno.

A) 2 rad B) $\frac{1}{2}$ rad C) 4 rad D) $\frac{1}{4}$ rad E) 1 rad

Solución:



Del gráfico tenemos:

$$\begin{cases} 2R + b = L \\ S_{AOB} = \dfrac{Rb}{2} \end{cases}$$

De ahí tenemos:

$$S_{AOB} = \frac{R}{2}(L - 2R) \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{4}\left(\frac{L^2}{4} - \left(2R - \frac{L}{2}\right)^2\right)$$

Luego, el área máxima del sector se tiene si $\left(2R - \frac{L}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{L}{4}$

$$\therefore \theta = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{4}} = 2rad$$

Rpta.: A

3. En un sector circular de 4m de radio, el ángulo central es tal que, sumando su complemento y su suplemento expresado en grados centesimales, resulta 6 veces la medida del ángulo. Halle el perímetro de dicho sector circular.

A) $\frac{1}{4}(32+3\pi)$m B) $\frac{1}{4}(23+2\pi)$m C) $\frac{1}{4}(64+\pi)$m
D) $\frac{1}{4}(46+\pi)$m E) $\frac{1}{4}(16+5\pi)$m

Solución:

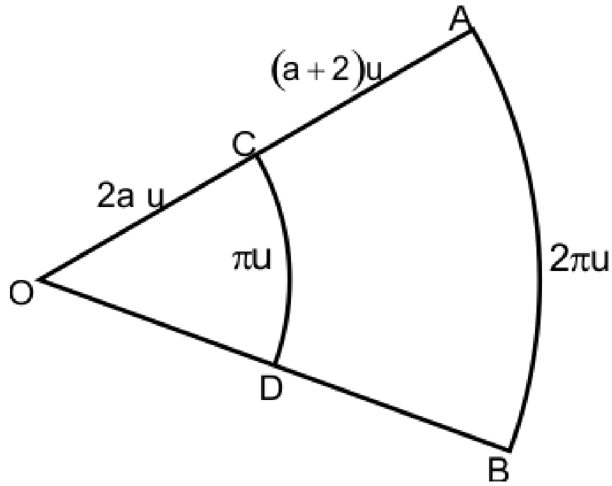
$$\left(100^g-\theta\right)+\left(200^g-\theta\right)=6\theta \Rightarrow \theta=\left(\frac{75}{2}\right)^g\left(\frac{\pi\text{rad}}{200^g}\right)=\frac{3\pi}{16}\text{rad}$$

El perímetro del sector circular será $4+4+\frac{3\pi}{16}(4)=\frac{1}{4}(32+3\pi)$m

Rpta.: A

4. En la figura, AOB y COD son sectores circulares. Calcule el área del trapecio circular ABDC.

A) 6π u^2 B) 7π u^2
C) 8π u^2 D) 9π u^2
E) 10π u^2



Solución:

De la figura, $OA=3a+2$ y $m\measuredangle AOB=\frac{\pi}{2a}$rad

$\Rightarrow (3a+2)\frac{\pi}{2a}=2\pi$

$\Rightarrow a=2$

$\therefore S_{ABDC}=\frac{(\pi+2\pi)}{2}(4)u^2=6\pi u^2$

Rpta.: A

5. A partir de los datos de la figura, halle la longitud recorrida por la esferita hasta impactar con $\overline{CA}$. Considere al triángulo ACB un bloque sólido y la cuerda siempre tensa, $AB = BC = 6m$ y la longitud de la cuerda es 18 m.

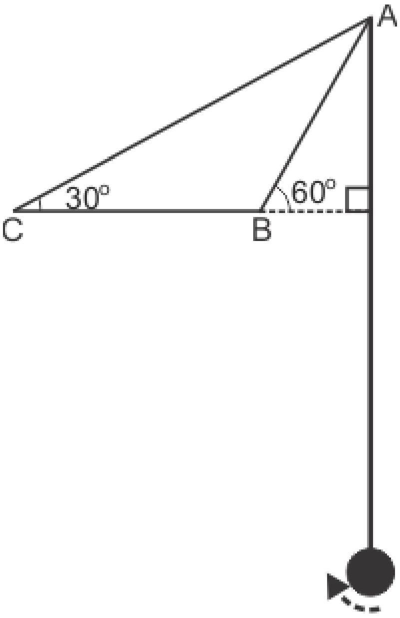
A) 10π m

B) 12π m

C) 8π m

D) 16π m

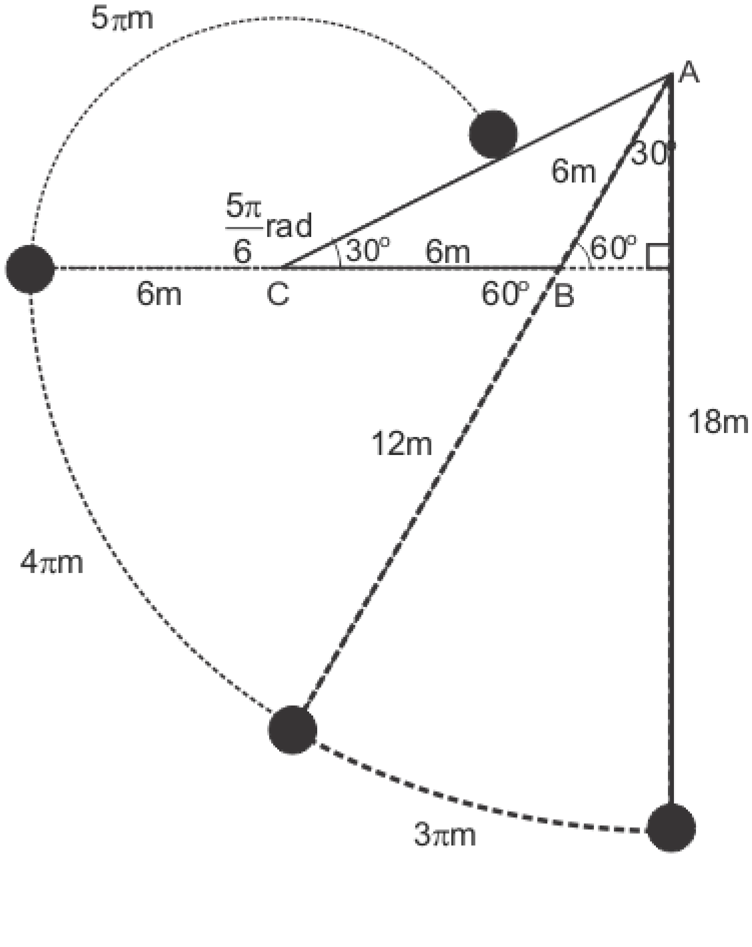
E) 18π m



Solución:

Fig: $L_c = 5\pi + 4\pi + 3\pi$

$L_c = 12\pi$



Rpta.: B