

Objetivos

- Desarrollar fórmulas para las razones trigonométricas de la suma y/o diferencia de ángulos; para calcular el valor de las razones trigonométricas de ángulos desconocidos.
- Aplicar convenientemente las fórmulas en la demostración de igualdades y simplificación de expresiones, así como la resolución de problemas condicionales.
- Adaptar el uso de fórmulas a la resolución de situaciones geométricas que implican hallar razones trigonométricas de ángulos desconocidos.

Fórmulas básicas

I. Para la suma de variables

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

Por ejemplo: (complete)

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta +$
- $\sin(70^\circ + x) = \sin 70^\circ \cdot \cos x +$
- $\cos(20^\circ + x) = \cos 20^\circ \cdot \cos x -$
- $\cos(\alpha + 10^\circ) =$
- $\tan(\alpha + 10^\circ) = \frac{\tan \alpha +}{1 -}$
- $\tan(45^\circ + \beta) =$

II. Para la diferencia de variables

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

Por ejemplo: (complete)

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta -$
- $\sin(20^\circ - \theta) =$

- $\cos(70^\circ - x) = \cos 70^\circ \cdot \cos x +$
- $\cos(30^\circ - x) = \cos 30^\circ \cdot \cos x +$
- $\tan(x - 20^\circ) =$
- $\tan(60^\circ - \beta) =$

Vamos a resolver ejercicios similares a los del capítulo de identidades trigonométricas de una variable; esto es: demostración, simplificación y condicionales; con el ingrediente adicional de situaciones geométricas, es decir, problemas gráficos.

Por ejemplo:

1. Demostrar que:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = 1$$

Resolución:

En el primer miembro, desarrollando:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = 1$$

$$\frac{\cancel{\sin \alpha \cdot \cos \beta} + \sin \beta \cdot \cos \alpha - \cancel{\sin \alpha \cdot \cos \beta}}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = 1$$

Queda:

$$\frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = 1$$

Reduciendo: $1 = 1$ (demostrado)

2. Demostrar que: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta$

Resolución:

Desarrollando en el primer miembro:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta$$

Desdoblado en fracciones homogéneas:

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha - \tan \beta$$

Reduciendo:

$$\frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}} = \tan \alpha - \tan \beta$$

(demostrado)

$$\tan \alpha - \tan \beta = \tan \alpha - \tan \beta$$

3. Reducir:

$$C = \cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x)$$

Resolución:

Desarrollando en el segundo miembro:

$$C = \cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x)$$

$$C = \cos 60^\circ \cdot \cos x - \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} x + \cos 60^\circ \cdot \cos x + \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} x$$

Reduciendo:

$$C = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos x$$

pero: $\cos x = \frac{1}{2}$

$$C = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \cos x \rightarrow \therefore C = \cos x$$

4. Reducir:

$$C = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta; \text{ si: } \alpha + \beta = 45^\circ$$

Resolución:

Como: $\alpha + \beta = 45^\circ \rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan 45^\circ$

Desarrollando:

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 1$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta$$

Trasladando términos:

$$\underbrace{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta}_C = 1$$

$$\therefore C = 1$$

5. Siendo: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

siendo " α " y " θ " agudos, calcular: $\tan(\alpha - \theta)$

Resolución:

Como:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \begin{array}{c} \sqrt{10} \\ 3 \\ 1 \end{array} \rightarrow \tan \alpha = 3$$

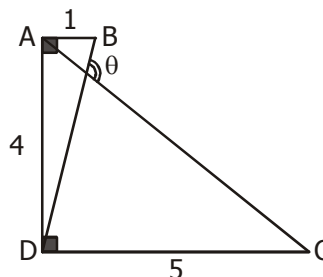
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \begin{array}{c} \sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \end{array} \rightarrow \tan \theta = 2$$

Entonces:

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \theta}$$

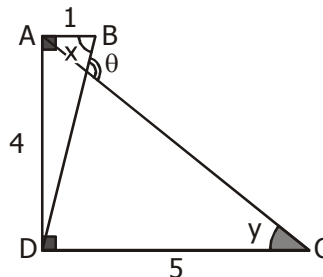
$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{3 - 2}{1 + 3 \cdot 2} \rightarrow \tan(\alpha - \theta) = \frac{1}{7}$$

6. Del gráfico mostrado, calcular " $\tan \theta$ ".



Resolución:

Del gráfico:



- Sea: $\hat{A}BD = x$; $\hat{A}CD = y$
Luego: $\theta = x + y \dots$ (prop. geométrica)
 $\tan \theta = \tan(x + y)$

$$\tan \theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \dots (1)$$

- $\triangle DAB$: $\tan x = 4$

- $\triangle ADC$: $\tan y = \frac{4}{5}$

En (1):

$$\tan \theta = \frac{4 + \frac{4}{5}}{1 - 4 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{24}{5}}{-\frac{11}{5}}$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{24}{11}$$

7. Señale el valor de: $\tan 29^\circ$

Resolución:

Piden:

$$\tan 29^\circ = \tan(45^\circ - 16^\circ)$$

$$\tan 29^\circ = \frac{\tan 45^\circ - \tan 16^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 16^\circ}$$

Reemplazando valores:

$$\tan 29^\circ = \frac{1 - \frac{7}{24}}{1 + 1 \cdot \frac{7}{24}} = \frac{\frac{17}{24}}{\frac{31}{24}}$$

Reduciendo:

$$\tan 29^\circ = \frac{17}{31}$$



Test de Aprendizaje

1. Completa de forma correcta:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \dots$$

2. Complete de forma correcta:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \dots$$

3. Reducir:

$$C = \frac{\sin(x + \dots)}{\cos x \cos \dots}$$

4. Reducir:

$$C = \frac{\cos(x + \dots)}{\sin x \cos \dots}$$

5. Reducir:

$$C = \frac{\sin(x - y) + \sin y \cos x}{\cos(x - y) - \sin x \sin y}$$

6. Reducir: $C = \sin(x + y) - \sin y \cos x$

7. Complete: $\cos(x + y) = \cos x \cos y \dots\dots\dots$

8. Reducir:

$$C = \frac{\sin(x - y) \sin y \cos x}{\cos x \cos y}$$

9. A qué es igual: $C = \sin 20^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 20^\circ$

10. A qué es igual: $C = \cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$



Practiquemos



1. Demostrar que:

$$\frac{\sin(x+y) - \sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} = \cot y$$

2. Demostrar que:

$$\frac{\sin(x-y) + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y} = \tan x$$

3. Demostrar que:

$$\cos(30^\circ + x) + \cos(30^\circ - x) = \sqrt{3} \cos x$$

4. Demostrar que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sqrt{3} \sin x$$

5. Demostrar que:

$$\frac{\tan x + \tan y}{\tan(x+y)} = 1 - \tan x \cdot \tan y$$

6. Demostrar que:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan(x-y)} - 1 = \tan x \cdot \tan y$$

7. Demostrar que:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

8. Demostrar que:

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

9. Demostrar que:

$$\tan 29^\circ = \frac{17}{31}$$

10. Demostrar que:

$$\tan 21^\circ = \frac{44}{117}$$

11. Reducir:

$$C = \frac{\sin(\alpha + \theta) - \sin \alpha \cdot \cos \theta}{\cos(\alpha + \theta) + \sin \alpha \cdot \sin \theta}$$

- a) $\tan \alpha$ b) $\tan \theta$ c) $\cot \alpha$
d) $\cot \theta$ e) 1

12. Reducir:

$$L = \frac{\sin(\alpha - \theta) + \sin \theta \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha \cdot \cos \theta}$$

- a) $\tan \alpha$ b) $\tan \theta$ c) $\cot \alpha$
d) $\cot \theta$ e) 1

13. Reducir:

$$C = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} + \tan y$$

- a) 1 b) $\tan x$ c) $\cot x$
d) $\tan y$ e) $2 \tan x$

14. Reducir:

$$L = \frac{\cos(x+y)}{\sin x \cdot \cos y} + \tan y$$

- a) $\cot x$ b) $\tan x$ c) $-\cot x$
d) $-\tan x$ e) 0

15. Siendo:

$$\tan x + \tan y + \tan z = 4$$

calcular:

$$C = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{\sin(y+z)}{\cos y \cdot \cos z} + \frac{\sin(z+x)}{\cos z \cdot \cos x}$$

- a) 3 b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

16. Reducir:

$$L = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y \cdot \cos z} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z \cdot \cos x}$$

- a) 1 b) 0 c) 2
d) -2 e) -1

17. Sabiendo que " α " y " β " son ángulos agudos, tales que:

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

calcular: $\tan(\alpha - \beta)$

- a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{4}{7}$
d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{1}{7}$

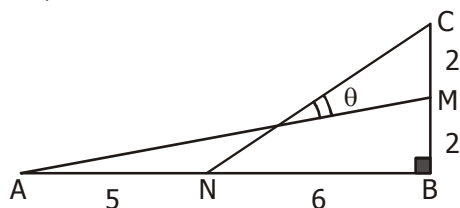
18. Sabiendo que " α " y " θ " son ángulos agudos, tales que:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

calcular: $\tan(\alpha + \theta)$

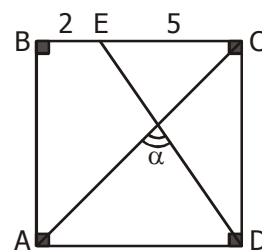
- a) $\frac{16}{11}$ b) $-\frac{16}{11}$ c) $\frac{6}{11}$
d) $-\frac{6}{11}$ e) $\frac{11}{7}$

19. Del gráfico, calcular " $\tan \theta$ ".



- a) $\frac{16}{37}$ b) $\frac{15}{37}$ c) $\frac{12}{37}$
d) $\frac{17}{37}$ e) $\frac{13}{37}$

20. Del gráfico, calcular " $\tan \alpha$ " si ABCD es un cuadrado.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6



Test de Aprendizaje

1. Sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^5 \{\sin \alpha_i\} = 0; \quad \sum_{i=1}^5 \{\cos \alpha_i\} = 0$$

calcular:

$$C = \sum_{i=1}^5 \{\sin(\alpha_i + \theta)\} + \sum_{i=1}^5 \{\cos(\alpha_i + \theta)\}$$

- a) 1 b) -1 c) 0
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

2. Calcular:

$$C = \frac{\sin 20^\circ + \sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} + \left(\frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\sin 70^\circ} \right)^2$$

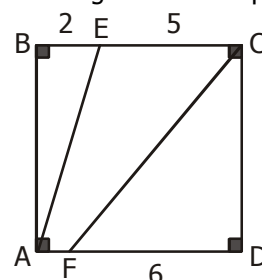
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

3. Siendo: $x + y = 60^\circ$, calcular:

$$L = \tan x + \tan y + \sqrt{3} \tan x \cdot \tan y$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) $3\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$

4. Si en el gráfico ABCD es un cuadrado, calcular la tangente del menor ángulo formado por $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$.



- a) $\frac{17}{61}$ b) $\frac{25}{61}$ c) $\frac{27}{61}$
d) $\frac{28}{61}$ e) $\frac{31}{61}$

5. Siendo " A ", " B " y " C " los ángulos interiores de un triángulo acutángulo, calcular:

$$E = \tan A + \tan^2 B + \tan^3 C$$

$$\text{si: } \tan A + 1 = \tan B = \tan C - 1$$

- a) 16 b) 19 c) 27
d) 30 e) 32



Tarea domiciliaria



1. Demostrar que:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \alpha$$

2. Demostrar que:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \cot \beta$$

3. Demostrar que:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} = \cot \alpha$$

4. Demostrar que:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta} = \tan \beta$$

5. Demostrar que:

$$\sin(45^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

6. Demostrar que:

$$\sin(60^\circ - x) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos x - \sin x)$$

7. Demostrar que:

$$\cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x) = \cos x$$

8. Demostrar que:

$$\cos(30^\circ + \theta) + \cos(30^\circ - \theta) = \sqrt{3} \cos \theta$$

9. Si: $a + b = 45^\circ$; demuestre que:

$$\tan a + \tan b + \tan a \cdot \tan b = 1$$

10. Si: $a - b = 45^\circ$; demuestre que:

$$\tan a - \tan b - \tan a \cdot \tan b = 1$$

11. Demostrar que:

$$\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

12. Demostrar que si: $x + y + z = 180^\circ$

$$\text{entonces: } \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$$

13. Calcular el valor de " $\sin 15^\circ$ "

- a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
 d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

14. Calcular: $\cos 74^\circ$

- a) 0,14 b) 0,21 c) 0,28
 d) 0,48 e) 0,76

15. Simplificar:

$$C = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} - \tan y$$

- a) $\tan x$ b) $\cot x$ c) $\cot y$
 d) $-\tan x$ e) $\tan y$

16. Reducir:

$$C = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} + \tan y$$

- a) $\tan x$ b) $\cot x$ c) $\sec x$
 d) $\csc x$ e) 1

17. Reducir:

$$C = \frac{\cos(x-y)}{\sin x \cdot \cos y} - \cot x$$

- a) 1 b) $\tan y$ c) $\cot y$
 d) $\cot x$ e) $\tan x$

18. Reducir:

$$C = \frac{\cos(x+y)}{\sin x \cdot \cos y} + \tan y$$

- a) $\tan x$ b) $\cot x$ c) $\cot y$
 d) $2 \tan x$ e) $2 \cot x$

19. Si: $x + y = 45^\circ$; $\tan x = \frac{1}{6}$

calcular: $\tan y$

- a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{7}$
 d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{7}$

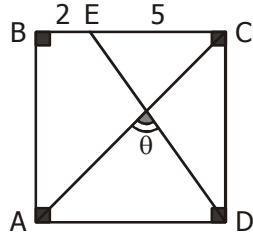
20. Siendo:

$$x - y = 60^\circ; \tan y = 2\sqrt{3}$$

calcular: $\tan x$

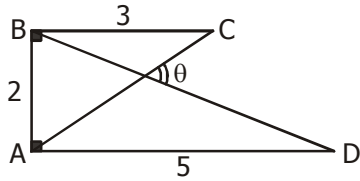
- a) $0,4\sqrt{3}$ b) $-0,4\sqrt{3}$ c) $0,6\sqrt{3}$
 d) $-0,6\sqrt{3}$ e) $-0,12\sqrt{3}$

21. Del gráfico, calcular " $\tan\theta$ " si ABCD es un cuadrado.



- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

22. Del gráfico, calcular: $\tan\theta$



- a) $\frac{8}{11}$ b) $\frac{11}{8}$ c) $\frac{16}{11}$
d) $\frac{32}{11}$ e) $\frac{9}{11}$

23. Calcular:

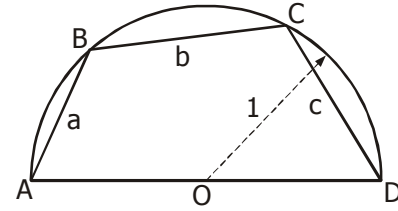
$$C = \frac{\tan 56^\circ - \tan 34^\circ}{\tan 22^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) 4
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

24. Siendo: $\sin(2x + y) = 5\sin y$
se comprueba que: $\tan(x + y) = n \tan x$
¿Cuál es el valor de " n "?

- a) 1 b) 2 c) 3
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

25. Del gráfico, calcular: $K = a^2 + b^2 + c^2 + abc$



- a) 2 b) 3 c) 4
d) 8 e) 6