Examen de admisión 2016-II

Solucionario UNI

PREGUNTA N.° 1

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $a>0$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a>\dfrac{1}{n_0}$.

II. Para cada a, $b\in\mathbb{Q}$ con $a<b$, existe $c\notin\mathbb{Q}$ tal que $a<c<b$.

III. Todo número irracional puede ser aproximado por números racionales.

A) VVV B) VFF C) FVV
D) FFV E) FFF

Resolución

Tema: Números racionales

Se conoce el conjunto de los números naturales

$\mathbb{N}=\{1;\ 2;\ 3;\ ...\}$

Análisis y procedimiento

I. **Verdadera**

Si $a>0$, entonces $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a>\dfrac{1}{n_0}$.

Caso 1: $0<a\leq 1$

Ejemplo

Si $a=\dfrac{1}{2}$, entonces $n_0\in\{3;\ 4;\ 5;\ ...\}$

$$a=\frac{1}{2}>\underbrace{\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>...}_{\text{existen infinitos } n_0}$$

Caso 2: $a>1$

Es evidente, ya que si $n_0\in\mathbb{N}$, entonces $\dfrac{1}{n_0}\leq 1$.

II. **Verdadera**

Por densidad de los racionales, entre dos números racionales existen infinitos números, de los cuales al menos uno será irracional.

III. **Verdadera**

De la proposición anterior, cada irracional se puede acotar entre dos racionales; por lo cual se puede aproximar a ellos por defecto o exceso.

Ejemplo

$\sqrt{5}=2,23606798...$ se puede expresar como fracción continua simple infinita.

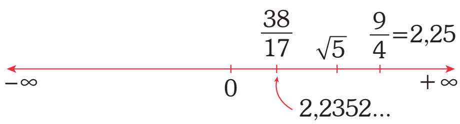
$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}=[2;\overline{4}]$$

Se concluye que

- Si $\sqrt{5}\approx[2;\ 4]=2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$

- Si $\sqrt{5}\approx[2;\ 4;\ 4]=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}=\dfrac{38}{17}$

En la recta real



Respuesta: VVV

PREGUNTA N.º 2

Sean $a; b; c \in \mathbb{N}$ tales que $(\overline{ab})^3=\overline{1c8ab}$. Entonces el valor de $2b-a-c$ es

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Tema: Potenciación

Análisis y procedimiento

Dado $\overline{ab}^3=\overline{1c8ab}$

$\sqrt[3]{\overline{1c8ab}}\;\big|\;\overline{ab} \quad \rightarrow \quad \overline{1c}\geq a^3$

a^3

Se observa que $a=2$.

Reemplazamos.

$\overline{2b}^3=\overline{1c82b}$

$21^3=9261$ ✗
$24^3=13\,824$ ✓
$25^3=15\,625$ ✗
$26^3=17\,576$ ✗
$29^3=24\,389$ ✗

Verificamos por última cifra.

Se observa que $b=4$ y $c=3$.

$\therefore\; 2b-a-c=8-2-3=3$

Respuesta: 3

PREGUNTA N.º 3

Se escogió un salón de clases de sexto grado con un total de 25 estudiantes y se les pidió a cada estudiante que evaluara un programa televisivo con una calificación de 1 a 5. (5=excelente, 4=bueno, 3=regular, 2=malo, 1=fatal). Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

1	3	3	4	1
2	2	2	5	1
4	5	1	5	3
5	1	4	1	2
2	1	2	3	5

Calcule la suma de la media, la moda y la mediana de las calificaciones.

A) 1,00 B) 4,72 C) 5,72
D) 6,72 E) 8,72

Resolución

Tema: Estadística

Tenga en cuenta que

Medidas de tendencia central	Notación
Media	$\bar{x}$
Mediana	Me
Moda	Mo

Análisis y procedimiento

Del cuadro podemos indicar lo siguiente:

Calificación	N.º de estudiantes
1	7
2	6
3	4
4	3
5	5
Total	25

Necesitamos calcular la media, la moda y la mediana de ese conjunto de datos.

- $\bar{x}=\dfrac{1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 4+4\cdot 3+5\cdot 5}{25}=2{,}72$
- La mediana divide al conjunto de datos, previamente ordenados, en dos partes iguales.

  $Me=2$
- La moda de un conjunto de datos es el valor que se repite con mayor frecuencia.

  $Mo=1$

$\therefore\; \bar{x}+Mo+Me=2{,}72+1+2=5{,}72$

Respuesta: 5,72

PREGUNTA N.° 4

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).
Sean a y b los valores reales positivos,

$$ma=\frac{a+b}{2},\ mg=\sqrt{ab}\ \text{y}\ mh=\frac{2ab}{a+b}.$$

I. Si $ma=mg$, entonces $ma=mg=mh$.

II. Si $mg=mh$, entonces $ma=mg=mh$.

III. Si $ma\neq mg$, entonces $a\neq b$.

A) VVF B) VVV C) VFV
D) VFF E) FVV

Resolución

Tema: Promedios

Análisis y procedimiento

Se sabe que

$$ma=\frac{a+b}{2};\ mg=\sqrt{ab};\ mh=\frac{2ab}{a+b}$$

I. **Verdadera**

Si $\overline{ma}=\overline{mg}$
tenemos que

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$$

$$a+b=2\sqrt{ab}$$

$$a+b-2\sqrt{ab}=0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$$

$\rightarrow\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

$\rightarrow\ \sqrt{a}=\sqrt{b}$ (elevando al cuadrado)

$\rightarrow\ a=b$

Reemplazamos en

- $ma=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b+b}{2}=b$
- $mg=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{b\cdot b}=b$
- $mh=\dfrac{2ab}{a\cdot b}=\dfrac{2b\cdot b}{b+b}=b$

Notamos que
si $ma=mg$, entonces $ma=mg=mh$.

II. **Verdadera**

Si $mg=mh$
tenemos que

$$\sqrt{ab}=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\sqrt{ab}\,(a+b)=2ab$$

$$a+b=2\sqrt{ab}$$

$$a+b-2\sqrt{ab}=0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$$

$\rightarrow\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

$\rightarrow\ \sqrt{a}=\sqrt{b}$ (elevando al cuadrado)

$\rightarrow\ a=b$

Reemplazamos en

- $ma=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b+b}{2}=b$
- $mg=\sqrt{ab}=\sqrt{b\cdot b}=b$
- $mh=\dfrac{2b}{a+b}=\dfrac{2b\cdot b}{b+b}=b$

Notamos que
si $mg=mh$, entonces $ma=mg=mh$.

III. **Verdadera**

Si $ma\neq mg$
tenemos que

$$\frac{a+b}{2}\neq\sqrt{ab}$$

$$a+b\neq 2\sqrt{ab}$$

$$a+b-2\sqrt{ab}\neq 0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\neq 0$$

$\rightarrow\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\neq 0$

$\rightarrow\ \sqrt{a}\neq\sqrt{b}$

$\rightarrow\ a\neq b$

Notamos que
si $ma\neq mh$, entonces $a\neq b$.

Respuesta: VVV

PREGUNTA N.° 5

Si se cumple

$$\overline{ab5}_{(b-1)5} = \overline{c(b-1)(2b+4)(2b+1)}$$

determine el valor de $a+b+c$.

A) 8 B) 11 C) 15
D) 19 E) 22

Resolución

Tema: Teoría de numeración

Análisis y procedimiento

Del enunciado

$$\overline{ab5}_{\overline{\underbrace{(b-1)}_{b>1}5}} = \overline{c(b-1)\underbrace{(2b+4)}_{b<3}(2b+1)}$$

Analizando se concluye que

$1 < b < 3$

$\rightarrow$ $b=2$

Reemplazando el valor de b en el dato, tenemos que

$$\overline{a25}_{15}=\overline{c185}$$

$$a\times 15^2+2\times 15^1+5=c\times 10^3+185$$

$$\cancel{225}a = \cancel{1000}c + \cancel{150}$$

$$9\underset{\substack{\downarrow \\ 4 \times \\ 14 \checkmark}}{a} = \overbrace{40c}^{...0} + 6 = ...6$$

$\rightarrow$ $c=3$

$\therefore$ $a+b+c=14+2+3=19$

Respuesta: 19

PREGUNTA N.° 6

Si a la suma de 35 números impares consecutivos se le resta 42, entonces la cifra de la unidad del resultado final es

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Resolución

Tema: Operaciones fundamentales

Recuerde

$$\underbrace{1+3+5+7+...+(2n-1)}_{n \text{ impares}}=n^2$$

Análisis y procedimiento

Sean los 35 impares consecutivos

$a+1$; $a+3$; $a+5$; ...; $a+69$ siendo a par

Nos piden en qué cifra termina N si

$$N=\underbrace{(a+1)+(a+3)+(a+5)+...+(a+69)}_{35 \text{ impares consecutivos}}-42$$

$\rightarrow$ $N=35a+(1+3+5+...+69)-42$

$N=35a+\underbrace{35^2-42}$

$N=35\underset{\substack{\uparrow \\ \text{par}}}{a} + ...3$

$N=...0+...3$

$\therefore$ $N=...3$

Respuesta: 3

PREGUNTA N.° 7

Sea N un número múltiplo de 6 formado por tres cifras pares. Si $N+1$ es múltiplo de 7 y $N+2$ es múltiplo de 8, entonces la suma de las cifras de N es

A) 6 B) 9 C) 12
D) 18 E) 21

Resolución

Tema: Teoría de divisibilidad

Análisis y procedimiento

Sea $N=\overline{abc}$, donde a; b y c son cifras pares.

Además:

- $\overline{abc}=\overset{\circ}{6}$
- $\overline{abc}+1=\overset{\circ}{7}$ $\rightarrow$ $\overline{abc}=\overset{\circ}{7}-1$
- $\overline{abc}+2=\overset{\circ}{8}$ $\rightarrow$ $\overline{abc}=\overset{\circ}{8}-2$

Podemos indicar que

$$\overline{abc}=\begin{cases} \rightarrow \overset{\circ}{6} \\ \rightarrow \overset{\circ}{7}-1 \\ \rightarrow \overset{\circ}{8}-2 \end{cases}$$

Luego

$$\overline{abc}=\begin{cases}\overset{\circ}{6}+6\\ \overset{\circ}{7}+6\\ \overset{\circ}{8}+6\end{cases}$$

$\rightarrow\ \overline{abc}=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(6;7;8)}}+6$

$\rightarrow\ \overline{abc}=\overset{\circ}{\overline{168}}+6$

$\rightarrow\ \overline{abc}=168\times K+6;\ K\in\mathbb{Z}$

Para garantizar que a; b y c sean pares, $K=5$.

$$\overline{abc}=168\times 5+6=846$$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$$a+b+c=8+4+6=18$$

Respuesta: 18

PREGUNTA N.° 8

Sean A y B enteros positivos tales que $A>B$. Al dividir A entre B se obtiene r_d residuo por defecto y r_e residuo por exceso. Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $r_d+r_e=A$
II. $r_e>r_d$
III. $\mathrm{MCD}(A;B)=\mathrm{MCD}(r_d, r_e)$

A) FFF B) FVV C) FFV
D) FVF E) VVV

Resolución

Tema: Operaciones fundamentales

Análisis y procedimiento

I. **Falsa**
Por dato, A y B son enteros positivos; $A>B$.

División por defecto	División por exceso
$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \cline{2-2} r_d & q \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \cline{2-2} r_e & q+1 \end{array}$
$\rightarrow\ A=Bq+r_d$	$\rightarrow\ A=B(q+1)-r_e$

Luego

$A=Bq+r_d=B(q+1)-r_e$

$\rightarrow\ \cancel{Bq}+r_d=\cancel{Bq}+B-r_e$

$\therefore\ r_d+r_e=B$

II. **Falsa**
Como

$$r_d+r_e=B\begin{cases} r_d>r_e\\ \text{o}\\ r_d<r_e\\ \text{o}\\ r_d=r_e\end{cases}$$

entonces $r_e>r_d$ no necesariamente se cumple.

Ejemplo

División por defecto	División por exceso
$\begin{array}{r\|l} 19 & 7 \\ \cline{2-2} r_d=5 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 19 & 7 \\ \cline{2-2} r_e=2 & 3 \end{array}$

$\therefore\ r_d>r_e$

III. **Verdadera**

División por defecto	División por exceso
$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \cline{2-2} r_d & q \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \cline{2-2} r_e & q+1 \end{array}$
$\rightarrow\ A=Bq+r_d$ (I)	$\rightarrow\ A=B(q+1)-r_e$ (II)

Sea $\mathrm{MCD}(A;B)=n$

$\rightarrow\ A=\overset{\circ}{n}\ \wedge\ B=\overset{\circ}{n}$

Reemplazamos en (I) y (II).

$A=Bq+r_d \qquad A=B(q+1)-r_e$

$\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}(q)+r_d \qquad \overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}(q+1)-r_e$

$\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}+rd \qquad \overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}-r_e$

$\rightarrow\ r_d=\overset{\circ}{n} \qquad r_e=\overset{\circ}{n}$

Luego $\mathrm{MCD}(r_d;r_e)=n$

$\therefore\ \mathrm{MCD}(A;B)=\mathrm{MCD}(r_d;r_e)$

Respuesta: FFV

PREGUNTA N.º 9

Sea f la función definida por

$$f_{(x)}=\frac{2x-1}{x-1},\ \forall\ x>1$$

La inversa f^* de esta función es

A) $f^*_{(x)}=\dfrac{x-1}{2x-1};\ x>1/2$

B) $f^*_{(x)}=\dfrac{x+1}{2x+1};\ x<\dfrac{1}{2}$

C) $f^*_{(x)}=\dfrac{x+1}{x+2};\ x>-2$

D) $f^*_{(x)}=\dfrac{x-1}{x+2};\ x<-2$

E) $f^*_{(x)}=\dfrac{x-1}{x-2};\ x>2$

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Nos piden la inversa f^* de

$$f_{(x)}=\frac{2x-1}{x-1},\ x>1$$

Damos forma

$$f_{(x)}=2+\frac{1}{x-1}$$

Hallamos Ran(f).

De

$x>1$

$x-1>0$

$\dfrac{1}{x-1}>0$

$\underbrace{2+\dfrac{1}{x-1}}_{f_{(x)}}>2$

Entonces, Ran(f)=$\langle 2;\ +\infty\rangle$

Hallamos f^*.

Sea $y=2+\dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{1}{x-1}=y-2$$

$$x-1=\frac{1}{y-2}$$

$$x=1+\frac{1}{y-2}$$

$$x=\frac{y-1}{y-2}$$

Entonces, $f^*_{(x)}=\dfrac{x-1}{x-2}$.

Por lo tanto, la función inversa f^* es

$$f^*_{(x)}=\frac{x-1}{x-2};\ \ x>2$$

Respuesta: $f^*_{(x)}=\dfrac{x-1}{x-2};\ x>2$

PREGUNTA N.º 10

Halle la matriz A si sabemos que

$$Ax^{-1}=\left[\left(A^{-1}\right)^2-A^{-1}\right]^{-1},\text{ donde } x=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

Resolución

Tema: Matrices

Análisis y procedimiento

Tenemos

$$Ax^{-1}=\left[\left(A^{-1}\right)^2-A^{-1}\right]^{-1};\ x=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

Aplicando inversa tenemos

$$\left(Ax^{-1}\right)^{-1}=\left(\left[\left(A^{-1}\right)^2-A^{-1}\right]^{-1}\right)^{-1}$$

$$\rightarrow\ xA^{-1}=\left(A^{-1}\right)^2-A^{-1} \quad \times A$$

$$xA^{-1}\cdot A=\left(\left(A^{-1}\right)^2-A^{-1}\right)A$$

Luego

$$x=A^{-1}-I$$

$$\rightarrow\ A^{-1}=x+I$$

Aplicamos inversa.

$$A=(x+I)^{-1}$$

$$\rightarrow\ A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Respuesta: $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

PREGUNTA N.° 11

Sea $D=\{(x;\ y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 2,\ x+y\leq 4\}$

Si $a<0$ y $b>0$, determine la solución del problema

$$\begin{cases}\text{Máx } ax+by\\ \text{s.a. } (x;\ y)\in D\end{cases}$$

A) (0; 0)
B) (0; 2)
C) (0; 4)
D) (2; 0)
E) (4; 0)

Resolución

Tema: Programación lineal

Análisis y procedimiento

Reordenamos

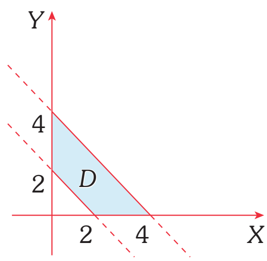
$$D=\begin{cases}x+y\geq 2\\ x+y\leq 4\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{cases}$$

Nos piden máx $ax+by$; $a<0\ \wedge\ b>0$

De

$$x+y\geq 2\ \rightarrow\ y\geq 2-x$$
$$x+y\leq 4\ \rightarrow\ y\leq 4-x$$

Graficamos la región factible.



Sea $f(x;\ y)=ax+by$

Como piden máx$f(x;\ y)$, evaluamos en los extremos de D.

$$f(2;\ 0)=2a$$
$$f(4;\ 0)=4a$$
$$f(0;\ 4)=4b$$
$$f(0;\ 2)=2b$$

Como $a<0 \quad \wedge \quad b>0$

$\rightarrow$ máx$f(x;\, y)=4b$

Por lo tanto, la solución del problema es (0; 4).

Respuesta: (0; 4)

PREGUNTA N.º 12

Sea A una matriz de orden 3×5 y B una submatriz cuadrada A de orden 3 tal que $A=(B\,\vert\,N)$ donde N es de orden 3×2 y B^{-1} existe. Correspondientemente, en el sistema $Ax=b$, x se descompone como $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$. Entonces una solución del sistema es

A) $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ Nx_B \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ Bx_N \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} Bb \\ Nb \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} (B-I)b \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Tema: Sistema de ecuaciones

Análisis y procedimiento

Tenemos que $Ax=b$.

$$(B\,\vert\,N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b$$

Multiplicamos por B^{-1} por la izquierda.

$$B^{-1}\cdot(B\,\vert\,N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=B^{-1}\cdot b$$

En una matriz aumentada $(B\,\vert\,N)$ se cumple que

$$M\cdot(B\,\vert\,N)=(M\cdot B\,\vert\,M\cdot N)$$

Luego

$$\left(B^{-1}\cdot B\,\vert\,B^{-1}N\right)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=B^{-1}\cdot b$$

$$\left(I\,\vert\,B^{-1}N\right)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=B^{-1}\cdot b$$

$$I\cdot x_B+B^{-1}N\cdot x_N=B^{-1}\cdot b$$

Una solución es

$$I\cdot x_B+B^{-1}N\cdot x_N=B^{-1}\cdot b+0$$

$$x_B=B^{-1}\cdot b \quad \wedge \quad x_N=0$$

Luego

$$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

PREGUNTA N.º 13

Tres números x, y, z forman una progresión geométrica creciente que cumplen:

$x+y+z=21$

$x\cdot y\cdot z=216$

Determine la razón de la progresión dada.

A) 3/2
B) 2
C) 5/2
D) 3
E) 7/3

Resolución

Tema: Sistema de ecuaciones no lineales

Análisis y procedimiento

Se tiene lo siguiente:

$x+y+z=21$ (I)

$xyz=216$ (II)

Por dato:

x, y, z forman una PG.

Sea q la razón geométrica.

x; $y=qx$, $z=xq^2=xqq$

Reemplazando en (II) obtenemos.

$(qx)^3=216$

$qx=6$

$\rightarrow\ x=\dfrac{6}{q},\ y=6,\ z=6q$

Reemplazando en (I) obtenemos.

$\dfrac{6}{q}+6+6q=21$

$\dfrac{6}{q}+6q=15$

$2q^2-5q+2=0$

$(2q-1)(q-2)=0$

$\rightarrow\ q=2\ \vee\ q=\dfrac{1}{2}$

Por lo tanto, como la progresión es creciente, $q=2$.

Respuesta: 2

PREGUNTA N.° 14

Determine el número de soluciones reales de la ecuación

$|\text{sen}(x)|=|\text{Ln}|x-\pi||$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

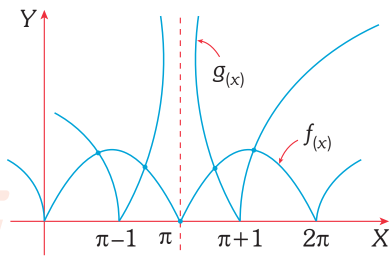
Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Nos piden el número de soluciones reales de la ecuación.

$$\underbrace{|\text{sen}x|}_{f_{(x)}}=\underbrace{|\text{Ln}|x-\pi||}_{g_{(x)}}$$

Graficamos las funciones.



Observamos 4 cortes en el gráfico. Por lo tanto, la ecuación tiene 4 soluciones.

Respuesta: 4

PREGUNTA N.° 15

Dada una proposición x, se define f como sigue:

$$f_{(x)}=\begin{cases}1, \text{ si } x \text{ es una proposición verdadera.}\\ 0, \text{ si } x \text{ es una proposición falsa.}\end{cases}$$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I. $f(p\wedge q)=f(p)\cdot f(q)$

II. $f(\sim p)=1-f(p)$

III. $f(p\rightarrow q)=1+f(q)-f(p)$

A) solo I

B) solo II

C) I y II

D) I y III

E) II y III

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

I. **Verdadera**

Por tabla de verdad se conoce

p	q	$p \wedge q$	
V	V	V	$\to f(p)=1;\ f(q)=1;\ f(p \wedge q)=1 \to f(p \wedge q)=f(p)\cdot f(q)$
V	F	F	$\to f(p)=1;\ f(q)=0;\ f(p \wedge q)=0 \to f(p \wedge q)=f(p)\cdot f(q)$
F	V	F	$\to f(p)=0;\ f(q)=1;\ f(p \wedge q)=0 \to f(p \wedge q)=f(p)\cdot f(q)$
F	F	F	$\to f(p)=0;\ f(q)=0;\ f(p \wedge q)=0 \to f(p \wedge q)=f(p)\cdot f(q)$

$\therefore\ f(p \wedge q)=f(p)\cdot f(q)$

II. **Verdadera**

Por tabla de verdad se conoce

p	$\sim p$	
V	F	$\to f(p)=1;\ f(\sim p)=0 \to f(\sim p)=1-f(p)$
F	V	$\to f(p)=0;\ f(\sim p)=1 \to f(\sim p)=1-f(p)$

$\therefore\ f(\sim p)=1-f(p)$

III. **Falsa**

Tenemos que $p \to q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

$$f(p \to q)=f[\sim(p \wedge \sim q)]$$
$$=1-f(p \wedge \sim q)$$
$$=1-f(p)\cdot f(\sim q)$$
$$=1-f(p)[1-f(q)]$$
$$\therefore\ f(p \to q)=1-f(p)+f(p)\cdot f(q)$$

Respuesta: I y II

PREGUNTA N.º 16

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $0<a<b<c$, entonces $\dfrac{c-a}{ac}>\dfrac{c-b}{bc}$.

II. $|a-b|^2 \leq |a|^2+|b|^2+2|a||b|$

III. $|a+b+c| \geq |a|+|b|+|c|$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

Resolución

Tema: Desigualdades

Análisis y procedimiento

I. **Verdadera**

Tenemos que

$$0<a<b<c \ \to\ cb>ca \ \to\ cb-ab>ca-ab$$
$$\to\ \frac{b(c-a)}{abc}>\frac{a(c-b)}{abc} \ \to\ \frac{c-a}{ac}>\frac{c-b}{bc}$$

II. **Verdadera**

Sabemos que

$$|a|+|-b| \geq |a+(-b)| \ \leftrightarrow\ |a|+|b| \geq |a-b|$$
$$\leftrightarrow\ |a-b| \leq |a|+|b| \ \leftrightarrow\ (|a-b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$$
$$\leftrightarrow\ |a-b|^2 \leq |a|^2+|b|^2+2|a||b|$$

III. **Falsa**

Sabemos que

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$
$$\to\ |a|+|b|+|c| \geq |a+b|+|c| \geq |a+b+c|$$
$$\to\ |a|+|b|+|c| \geq |a+b+c|$$

Respuesta: VVF

PREGUNTA N.° 17

Si $a+b+c=1$ y $a^3+b^3+c^3=4$, entonces el valor de

$$M=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+\frac{1}{c+ab}\text{ es}$$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Resolución

Tema: Productos notables

Análisis y procedimiento

Se conoce que

$$\underbrace{(a+b+c)^3}_{1}=\underbrace{a^3+b^3+c^3}_{4}+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$\rightarrow$ $(a+b)(b+c)(c+a)=-1$

Analizamos

$$a+bc=a\cdot 1+b\cdot c=a\overbrace{(a+b+c)}^{1}+b\cdot c=$$
$$a^2+ab+ac+bc$$

$\rightarrow$ $a+bc=(a+b)(a+c)$

Análogamente

- $b+ac=(b+a)(b+c)$
- $c+ab=(c+a)(c+b)$

Luego

$$M=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+\frac{1}{c+ab}$$

$$\rightarrow M=\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+a)(b+c)}+$$
$$+\frac{1}{(c+a)(c+b)}$$

$$M=\frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$M=\frac{2(1)}{-1}$$

$\therefore$ $M=-2$

Respuesta: -2

PREGUNTA N.° 18

Al dividir un polinomio $P=P_{(x)}$ de grado 3 entre $(x+2)$ se obtiene un polinomio cociente $Q=Q_{(x)}$ y un resto de grado 1. Si se sabe que $P_{(0)}=-1$, $P_{(-2)}=-5$ y $Q_{(0)}=1$, halle la expresión del resto.

A) $x+3$ B) $x+1$ C) $x-1$
D) $x-3$ E) $2x-1$

Resolución

Tema: División de polinomios

Análisis y procedimiento

Dato:

$$\begin{array}{l|l} P_{(x)} & x+2 \\ \cline{2-2} \underbrace{mx+n}_{\text{Residuo de grado 1}} & Q_{(x)} \end{array}$$

además, $P_{(0)}=-1$; $P_{(-2)}=-5$ y $Q_{(0)}=1$.

Por la identidad fundamental tenemos

$P_{(x)}=(x+2)Q_{(x)}+mx+n$

$x=-2$: $P_{(-2)}=-2m+n=-5$

$x=0$: $P_{(0)}=2\cdot Q_{(0)}+m\cdot 0+n=-1$

$2+n=-1 \rightarrow n=-3$

como $-2m+n=-5 \rightarrow m=1$

Por lo tanto, el resto de la división es $x-3$.

Respuesta: $x-3$

PREGUNTA N.° 19

Sea x tal que $|x|<1$. Calcule, en función de x, el valor de la suma

$S=2+4x+6x^2+8x^3+10x^4+\ldots$

A) $\frac{1}{1-x}$ B) $\frac{2}{x-1}$ C) $\frac{2}{x^2-2x+1}$

D) $\frac{2}{x^2-x+1}$ E) $\frac{2}{x^2+x+1}$

Resolución

Tema: Series

Análisis y procedimiento

Dato: $|x| < 1$

Nos piden el valor de la suma

$$\begin{array}{r} S=2+4x+6x^2+8x^3+10x^4+\dots \\ xS=2x+4x^2+6x^3+8x^4+10x^5+\dots \\ \hline S-xS=2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\dots \end{array} \; -$$

$$(1-x)S=\frac{2}{1-x}$$

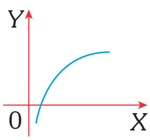
$$S=\frac{2}{(1-x)^2}$$

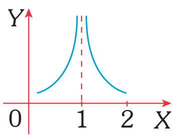
$$\therefore \; S=\frac{2}{x^2-2x+1}$$

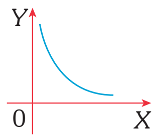
Respuesta: $\dfrac{2}{x^2-2x+1}$

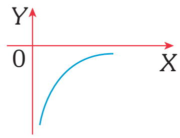
PREGUNTA N.º 20

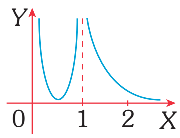
El punto $(-1; -2)$ pertenece a la gráfica de la función polinómica $f_{(x)}=2kx^3+4kx^2-3x-9$. Si $g_{(x)}=\dfrac{f_{(x)}}{x(x-1)(x+1,5)^2}$, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde a g para $x>0$?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Resolución

Tema: Funciones

Análisis y procedimiento

Nos piden la gráfica de

$$g_{(x)}=\frac{f_{(x)}}{x(x-1)(x+1,5)^2}; \; x>0.$$

Dato: $f_{(x)}=2kx^3+4kx^2-3x-9$, además, el punto $(-1; -2)$ pertenece a la gráfica de la función $f_{(x)}$.

Por dato sabemos que

$f_{(-1)}=-2.$

$f_{(-1)}=-2k+4k+3-9=-2 \;\; \rightarrow \;\; k=2$

Luego

$f_{(x)}=4x^3+8x^2-3x-9$

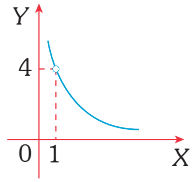
Factorizamos

$f_{(x)}=4(x-1)(x+1,5)^2$

Por otro lado, $g_{(x)}=\dfrac{4(x-1)(x+1,5)^2}{x(x-1)(x+1,5)^2}; \; x>0$

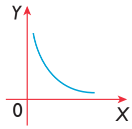
$\rightarrow \; g_{(x)}=\dfrac{4}{x}; \;\; x>0; \;\; x\neq 1$

Cuya gráfica es

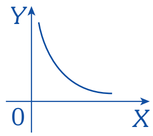


Nota

La gráfica que más se aproxima es



Respuesta:



PREGUNTA N.° 21

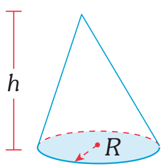
El volumen de un cono de base circular de radio R y altura L es igual al volumen de un cubo de arista $2R$. Calcule $\frac{R}{r}$, donde r es el radio de la circunferencia menor del tronco de cono de altura R, obtenido del cono de base circular.

A) $\frac{64}{64-\pi}$ B) $\frac{32}{32-\pi}$ C) $\frac{24}{24-\pi}$

D) $\frac{12}{12-\pi}$ E) $\frac{6}{6-\pi}$

Resolución

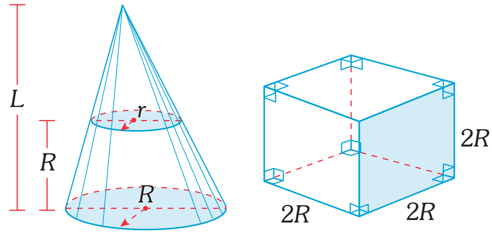
Tema: Tronco de cono



Volumen de un cono

$$\boxed{\mathbb{V}=\frac{\pi R^2 h}{3}}$$

Análisis y procedimiento



Nos piden R/r.

Dato: $\mathbb{V}_{\text{cono}}=\mathbb{V}_{\text{cubo}}$

$$\rightarrow \frac{\pi R^2 L}{3}=(2R)^3 \rightarrow R=\frac{\pi L}{24}$$

En el cono (que no menciona si es recto) se aplica semejanza de triángulos.

$$\frac{R}{r}=\frac{L}{L-R}$$

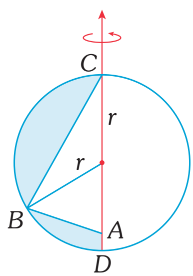
$$\rightarrow \frac{R}{r}=\frac{L}{L-\frac{\pi L}{24}}$$

$$\therefore \frac{R}{r}=\frac{24}{24-\pi}$$

Respuesta: $\frac{24}{24-\pi}$

PREGUNTA N.° 22

Halle el volumen del sólido que se genera al girar la figura sombreada alrededor del eje diametral $\overline{CD}$ si m$\overset{\frown}{BC}=120°$, $r=2\sqrt[3]{6}$ y $AD=\frac{r}{4}$.



A) 43π B) 37π C) 32π

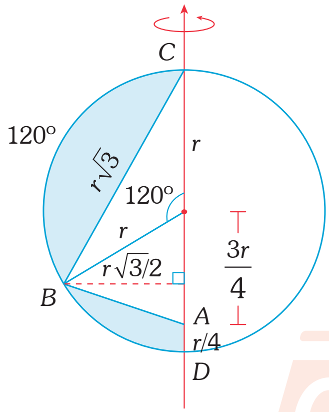
D) 30π E) 25π

Resolución

Tema: Teorema de Pappus-Guldin

Análisis y procedimiento

Del gráfico



Dato:
$r=2\sqrt[3]{6}$

Nos piden $\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}}$.

$$\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}}=\mathbb{V}_{\text{esfera}}-\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}\,\triangle BCA}$$

$$\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}}=\frac{4}{3}\pi r^3-2\pi\bar{x}A$$

$$\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}}=\frac{4}{3}\pi r^3-2\pi\frac{1}{3}\frac{(r\sqrt{3})}{2}\times\left(\frac{7r}{4}\right)\frac{r\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$$

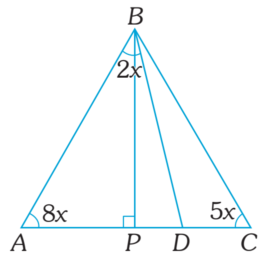
$$\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}}=\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{16}\right)\pi r^3$$

$$\mathbb{V}_{\text{Sól}\cdot\text{G}}=\left(\frac{64-21}{48}\right)\pi\left(2\sqrt[3]{6}\right)^3=43\pi$$

Respuesta: 43π

PREGUNTA N.º 23

En la figura, $AB=10$ cm, $BD=AC$, $DC=3$ cm. Halle $AP\times PD$.



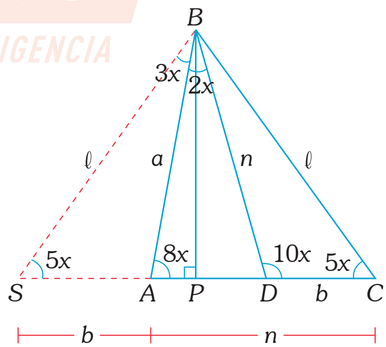
A) 12,25 B) 20,25 C) 21,00
D) 25,00 E) 49,00

Resolución

Tema: Congruencia de triángulos

0Análisis y procedimiento

Del gráfico



Nos piden $(AP)(PD)$.

Datos: $a=10$; $b=3$

Se prolonga $\overline{DA}$ hasta S, de modo que $BS=BC=\ell$.

Se nota que

$SD=BD=n$ y como $AC=n$

$\rightarrow SA=DC=b.$

De lo cual tenemos que

$AB=BD$

$a=n \quad \rightarrow \quad AP=PD=\dfrac{10-3}{2}=3{,}5$

$\therefore \quad (AP)(PD)=12{,}25$

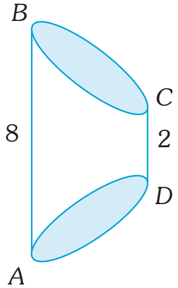
Respuesta: 12,25

Observación

El problema es ABSURDO, ya que se encuentra que $x=10°$, por lo cual $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{10}{3}$.

PREGUNTA N.° 24

En la figura, el tronco de cilindro cuyas bases tienen áreas iguales y los planos que las contienen son perpendiculares; $AB=8$ u, $CD=2$ u. Halle el volumen de tronco de cilindro (en u^3).



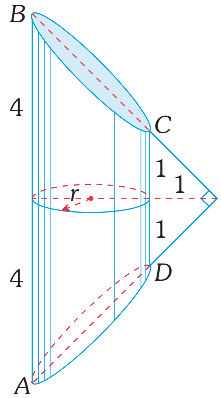
A) $11{,}25\pi$ B) $22{,}5\pi$ C) 45π
D) 90π E) 180π

Resolución

Tema: Cilindro

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}_{\text{tronco}}$.



La igualdad de áreas de las bases permite aprovechar la simetría.

$r=3/2$ u

$$\mathbb{V}_{\text{tronco}}=\left(\frac{8+2}{2}\right)\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$\therefore \quad \mathbb{V}_{\text{tronco}}=22{,}5\pi$ u^3

Observación

Para que haya solución, se asume que la sección recta es circular.

Respuesta: $22{,}5\pi$

PREGUNTA N.° 25

En un trapecio $ABCD$ ($\overline{AD}//\overline{BC}$), las bisectrices exteriores de A y B se intersecan en P y las bisectrices exteriores de C y D se intersecan en Q. Si $AD+BC=AB+CD=10$ cm, entonces PQ en cm es

A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16

Resolución

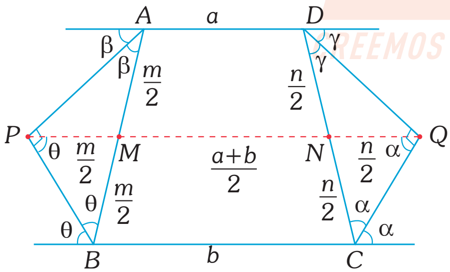
Tema: Cuadrilátero

Análisis y procedimiento

Por dato

$a+b=m+n=10$

Nos piden PQ.



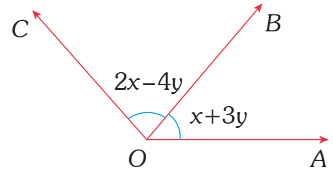
Al trazar las medianas $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ se puede verificar que P, M, N y Q son colineales.

$$\therefore\ PQ=\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=10$$

Respuesta: 10

PREGUNTA N.° 26

En la figura, $m\measuredangle AOC=120°$. Halle el menor valor entero de x.



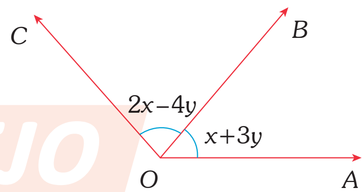
A) 34°
B) 35°
C) 36°
D) 37°
E) 38°

Resolución

Tema: Ángulos

Análisis y procedimiento

Nos piden $x_{\text{menor}\,\mathbb{Z}}$.



Por dato

$m\measuredangle COA=120°=3x-y$

$\rightarrow\ y=3x-120°$ (I)

Consideramos la expresión que contiene algún signo negativo para garantizar que dicho ángulo exista.

$2x-4y<120°$

$x-2y<60°$ (II)

Reemplazamos (I) en (II).

$x-2(3x-120°)<60°$

$180°<5x$

$36°<x$

$\therefore\ x_{\text{menor}\,\mathbb{Z}}=37°$

Respuesta: 37°

PREGUNTA N.° 27

La base de un prisma recto es un hexágono regular de 2 m de lado. Si la arista lateral mide $6\sqrt{3}$ m, halle el volumen (en m^3) del prisma.

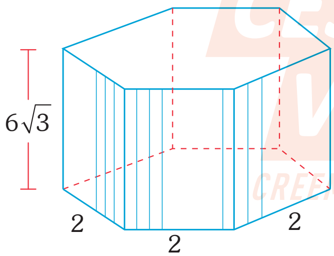
A) 72
B) 96
C) 108
D) 136
E) 154

Resolución

Tema: Prisma

Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}$.



Sabemos que

$$\mathbb{V}=(\mathbb{A}_{\text{base}})(\text{altura}) \qquad (*)$$

$$\rightarrow \mathbb{A}_{\text{base}}=6\left(\frac{2^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{\cancel{4}}\right)=6\sqrt{3}$$

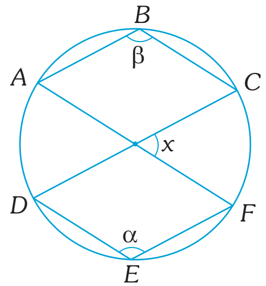
En (*)

$$\mathbb{V}=6\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}=108$$

Respuesta: 108

PREGUNTA N.° 28

Dado el gráfico siguiente, se muestra una circunferencia. Determine la relación correcta.



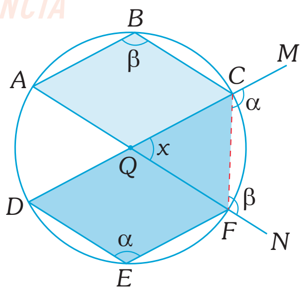
A) $x=\alpha+\beta+90°$
B) $90°+x=\alpha+\beta$
C) $\alpha+\beta+180°=x$
D) $\alpha+x=\beta+180°$
E) $180°+x=\alpha+\beta$

Resolución

Tema: Cuadrilátero inscrito en la circunferencia

Análisis y procedimiento

Nos piden una relación entre x; α y β.



⏢$ABCF$ está inscrito $\rightarrow m\measuredangle CFN=m\measuredangle ABC=\beta$

⏢$DCFE$ está inscrito $\rightarrow m\measuredangle MCF=m\measuredangle DEF=\alpha$

$\therefore \ \triangle QCF$: $\alpha+\beta=180°+x$

Respuesta: $180°+x=\alpha+\beta$

PREGUNTA N.º 29

En una pirámide regular *O-ABCD*, la longitud de la distancia trazada de *B* a $\overline{OD}$ es $4\sqrt{2}$ u y las regiones *AOC* y *ABCD* tienen igual área. Determine el volumen de la pirámide en (u³).

A) $\frac{20}{3}\sqrt{10}$

B) $\frac{32}{3}\sqrt{10}$

C) $\frac{40}{3}\sqrt{10}$

D) $15\sqrt{10}$

E) $23\sqrt{10}$

Resolución

Tema: Pirámide

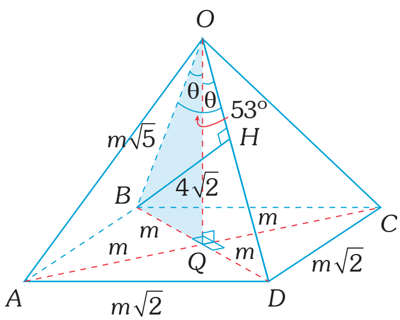
Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{V}$.

Por dato

$$\mathbb{A}_{\square ABCD}=\mathbb{A}_{\triangle BOD}$$

$$\mathbb{V}=\frac{1}{3}(\mathbb{A}_{\text{base}})(\text{altura})$$



Del dato

$$(m\sqrt{2})^2=\frac{(\cancel{2}m)(OQ)}{\cancel{2}} \rightarrow QO=2m$$

Como ◺*BOQ* es notable de $\frac{53°}{2}$

$$\rightarrow \theta=\frac{53°}{2}$$

Como ◺*BHO* es notable de 53°

$$\rightarrow BO=5\sqrt{2}$$

Luego

$$m\sqrt{5}=5\sqrt{2} \rightarrow m=\sqrt{10}$$

$$\mathbb{V}=\frac{1}{3}(m\sqrt{2})^2(2m)=\frac{4}{3}m^3$$

$$\therefore \mathbb{V}=\frac{40}{3}\sqrt{10}$$

Respuesta: $\frac{40}{3}\sqrt{10}$

PREGUNTA N.º 30

En un triángulo isósceles *ABC* ($\overline{AC}\cong\overline{BC}$) se traza por el vértice *A* un plano de modo que dista de *C* una longitud *n* unidades y de *B* una longitud 2*n* unidades. Si el segmento $\overline{AB}$ determina un ángulo de 45° con el plano y la proyección de $\overline{CB}$ sobre el plano mide 2*n* unidades. Calcule el área de la proyección del triángulo *ABC* sobre el plano.

A) $n^2\sqrt{2}$

B) $n^2\sqrt{3}$

C) $2n^2\sqrt{3}$

D) $3n^2\sqrt{2}$

E) $4n^2\sqrt{3}$

Resolución

Tema: Geometría del espacio

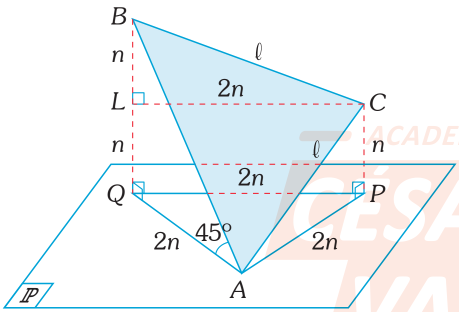
Análisis y procedimiento

Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle APQ}$

(área de la proyección de la región ABC sobre el plano $\mathbb{P}$).

Datos

$CP=n$, $BQ=2n$, $m\measuredangle BAQ=45^\circ$ y $PQ=2n$



$⊿BQA$: $BQ=QA \rightarrow QA=2n$

Trazamos

$\overline{CL} \perp \overline{BQ} \rightarrow CP=LQ=n$

Entonces

$⊿BLC \cong ⊿CPA \rightarrow AP=2n$

Luego, se observa que $\triangle APQ$ es equilátero.

$$\mathbb{A}_{\triangle APQ}=\frac{(2n)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\triangle APQ}=n^2\sqrt{3}$$

Respuesta: $n^2\sqrt{3}$

PREGUNTA N.° 31

Se consideran un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABE con E encima del plano del cuadrado. Halle el ángulo formado por el triángulo ABE y el cuadrado $ABCD$, si las áreas de los triángulos AEB y DCE están en la relación $\sqrt{3}$.

A) 15°
B) 22° 30'
C) 30°
D) 37°
E) 60°

Resolución

Tema: Geometría del espacio

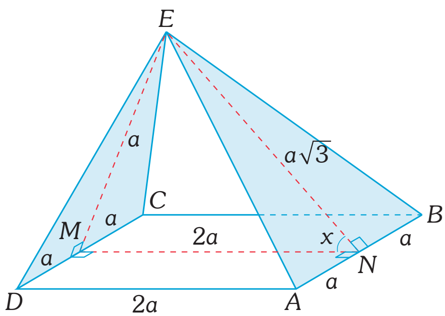
Análisis y procedimiento

Nos piden

$m\measuredangle ENM=x$

Datos:

$$\frac{\mathbb{A}_{\triangle EBA}}{\mathbb{A}_{\triangle CED}}=\sqrt{3} \text{ y } \triangle EBA \text{ es equilátero.}$$



Sea

$AB=2a \rightarrow EN=a\sqrt{3}$

Como

$$\frac{\mathbb{A}_{\triangle EBA}}{\mathbb{A}_{\triangle CED}}=\sqrt{3}\quad\rightarrow\quad EM=a$$

Se observa que el $\triangle MEN$ es notable de 30° y 60°.

$\therefore\ x=30°$

Respuesta: 30°

PREGUNTA N.° 32

ABC es un triángulo circunscrito a una circunferencia, la cual es tangente a los lados del triángulo en los puntos P, Q y R ($P\in\overline{AB}$, $Q\in\overline{BC}$ y $R\in\overline{AC}$). $M\in\overline{AR}$ con $\overline{PM}\perp\overline{AC}$, $N\in\overline{RC}$ con $\overline{QN}\perp\overline{AC}$, $T\in\overline{PQ}$ con $\overline{RT}\perp\overline{PQ}$ y $PM>QN$. Si $RT=4$ u y $PM+QN=10$ u, entonces la longitud de PM (en u) es

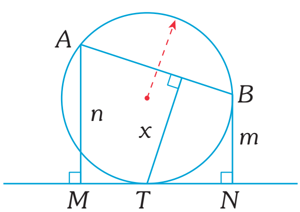
A) 6
B) 13/2
C) 7
D) 15/2
E) 8

Resolución

Tema: Semejanza

Recuerde

Teorema de Pappus



Si T es punto de tangencia, entonces

$$\boxed{x=\sqrt{nm}}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden

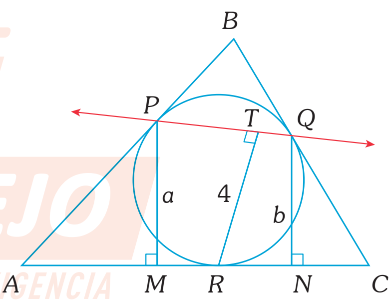
$PM=a.$

Por datos

$PM+QN=10$

$RT=4$

$PM>QN$



Del dato tenemos que

$a+b=10$ (I)

Por el teorema de Pappus

$\sqrt{ab}=4\ \rightarrow\ ab=16$ (II)

De (I) y (II)

$a=8\ \wedge\ b=2$

$\therefore\ PM=8$

Respuesta: 8

PREGUNTA N.º 33

Determine el conjunto A, definido por

$$A=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Big/\cos(x)-\cos(3x)<\operatorname{sen}(2x)\right\}$$

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{\pi}{2};0\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\rangle$

Resolución

Tema: Inecuaciones trigonométricas

Análisis y procedimiento

Dato:

$$A=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Big/\cos(x)-\cos(3x)<\operatorname{sen}(2x)\right\}$$

Resolvemos la inecuación.

$$\cos x-\cos 3x<\operatorname{sen}2x;\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

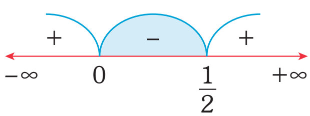
$$\rightarrow\ -2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}(-x)<\operatorname{sen}2x$$

$$\operatorname{sen}2x(2\operatorname{sen}x-1)<0$$

$$2\operatorname{sen}x\underbrace{\cos x}_{+}(2\operatorname{sen}x-1)<0$$

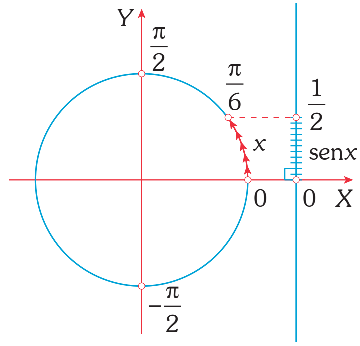
$$\rightarrow\ \operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x-1)<0;\ \ \cos x\neq 0$$

Por el método de los puntos críticos, tenemos



$$\rightarrow\ 0<\operatorname{sen}x<\frac{1}{2}$$

Analizamos en la C.T.



Del gráfico

$$x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$$

$$\therefore\ \ A=\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$$

Respuesta: $\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$

PREGUNTA N.º 34

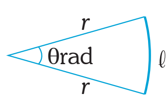
De un disco de cartulina de radio $R=4$ cm, se corta un sector circular de ángulo central θ. Con la parte restante del disco, uniendo los bordes cortados se forma un cono. Si el ángulo en el vértice del cono construido mide 60º, determine cuánto mide el ángulo θ.

A) 90º B) 115º C) 120º
D) 135º E) 180º

Resolución

Tema: Longitud de arco de circunferencia

En un sector circular, se cumple

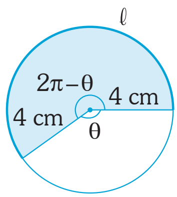


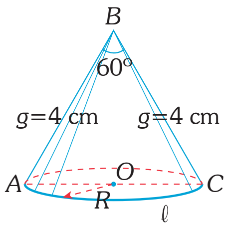
$$\boxed{\ell=\theta\cdot r}$$

Análisis y procedimiento

Nos piden la medida del ángulo θ.

Del enunciado





$\ell=(2\pi-\theta)4$

$\ell=2\pi R$

$\triangle ABC$ equilátero

$\rightarrow\ 2R=g=4$ cm

$\rightarrow\ R=2$

De los gráficos tenemos

$\ell=4(2\pi-\theta)=2\pi R$

Al reemplazar $R=2$, tenemos

$\therefore\ \theta=\pi\text{rad} <> 180^\circ$

Respuesta: 180°

PREGUNTA N.° 35

Determine las coordenadas del foco de coordenadas positivas de la elipse $4x^2+y^2-8x+4y=8$.

A) $\left(1;\ -2-2\sqrt{3}\right)$

B) $\left(1;\ -2+2\sqrt{3}\right)$

C) $\left(1;\ 2+2\sqrt{3}\right)$

D) $\left(1;\ 4-2\sqrt{3}\right)$

E) $\left(1;\ 4+2\sqrt{3}\right)$

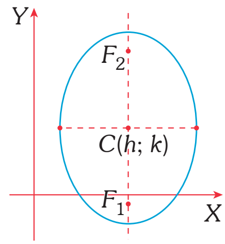
Resolución

Tema: Elipse

Ecuación de la elipse con centro en $C(h;\ k)$ y eje focal paralelo al eje Y

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$

Focos: $F_1(h;\ k-c)$; $F_2(h;\ k+c)$



Análisis y procedimiento

Del dato

$4x^2+y^2-8x+4y=8$

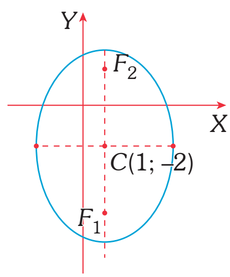
Al agrupar términos tenemos

$4(x-1)^2+(y+2)^2=16$

$\rightarrow\ \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

De la ecuación anterior se tiene una elipse de centro $(1;\ -2)$ y el eje focal paralelo al eje Y, donde

- $a^2=16\ \rightarrow\ a=4$
- $b^2=4\ \rightarrow\ b=2$
- $c^2=a^2-b^2\ \rightarrow\ c^2=16-4\ \rightarrow\ c=2\sqrt{3}$



$F_1\left(1;\ -2-2\sqrt{3}\right)$

$F_2\left(1;\ -2+2\sqrt{3}\right)$

Por lo tanto, el foco de coordenadas positivas es $F_2\left(1;\ -2+2\sqrt{3}\right)$

Respuesta: $\left(1;\ -2+2\sqrt{3}\right)$

PREGUNTA N.º 36

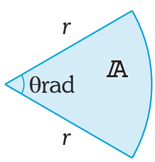
El área de un sector circular cuyo ángulo central mide 60º es de 24π cm^2. Si triplicamos el radio de dicho sector y disminuimos β radianes a su ángulo central, el área del nuevo sector disminuye un cuarto del anterior. ¿Cuál es el valor, en radianes, de β?

A) $\frac{9}{34}\pi$ B) $\frac{10}{35}\pi$ C) $\frac{11}{36}\pi$

D) $\frac{12}{36}\pi$ E) $\frac{13}{37}\pi$

Resolución

Tema: Área de un sector circular

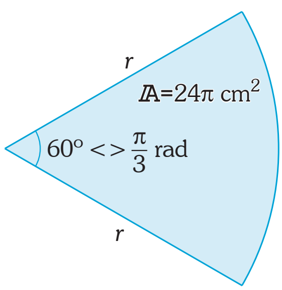


$$\mathbb{A}=\frac{1}{2}\theta r^2$$

Análisis y procedimiento

Del enunciado

Caso 1



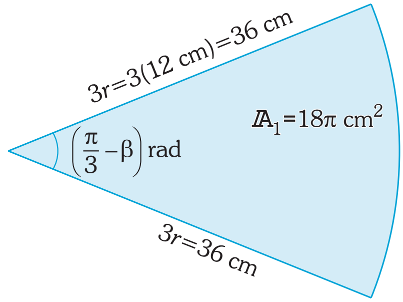
Dato:

$\mathbb{A}=24\pi$ cm^2

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot r^2=24\pi\text{ cm}^2$$

$r=12$ cm

Caso 2



$\mathbb{A}_1=18\pi$ cm^2

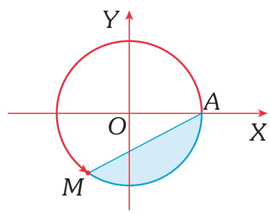
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)(36\text{ cm})^2=18\pi\text{ cm}^2 \rightarrow \frac{\pi}{3}-\beta=\frac{\pi}{36}$$

$$\therefore\ \beta=\frac{11\pi}{36}$$

Respuesta: $\frac{11}{36}\pi$

PREGUNTA N.º 37

En la circunferencia trigonométrica del gráfico mostrado, el punto M corresponde a un ángulo en posición normal θ. Calcule el área de la región sombreada (en u^2).



A) $\frac{1}{2}(2\pi-\theta+\text{sen}(\theta))$

B) $\frac{1}{2}(2\pi-\theta+\cos(\theta))$

C) $\frac{1}{2}(2\pi+\theta+\text{sen}(\theta))$

D) $2\pi-\theta+\text{sen}(\theta)$

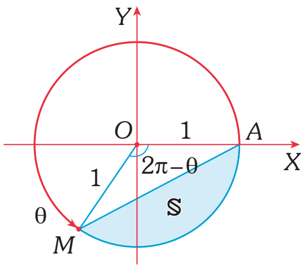
E) $2\pi-\theta+\cos(\theta)$

Resolución

Tema: Circunferencia trigonométrica

Análisis y procedimiento

Nos piden el área $\mathbb{S}$ sombreada.



$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\text{sector } OMA} - \mathbb{S}_{\triangle OMA}$$

$$\mathbb{S} = \frac{(2\pi-\theta)\cdot 1^2}{2} - \frac{1\cdot 1\cdot \text{sen}\,(2\pi-\theta)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbb{S} = \frac{1}{2}(2\pi-\theta+\text{sen}\,\theta)$$

Respuesta: $\frac{1}{2}(2\pi-\theta+\text{sen}\,(\theta))$

PREGUNTA N.º 38

Dados

$P=\tan(400^\circ)+\cos(810^\circ)$
$Q=\cot(760^\circ)\cdot\text{sen}(450^\circ)$
$R=\tan(1125^\circ)\cdot\sec(720^\circ)$
indique la alternativa correcta.

A) $P>Q>R$ B) $P>R>Q$ C) $Q>P>R$
D) $Q>R>P$ E) $P=Q=R$

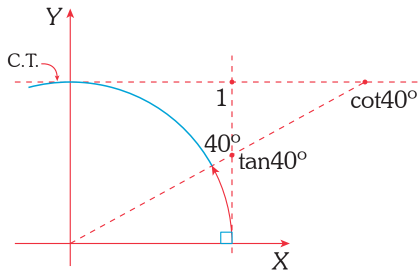
Resolución

Tema: Reducción al primer cuadrante

Análisis y procedimiento

Datos:

- $P=\tan(400^\circ)+\cos(810^\circ)$
  $P=\tan(360^\circ+40^\circ)+\cos(720^\circ+90^\circ)$
  $P=\tan 40^\circ+\cos 90^\circ \ \rightarrow\ P=\tan 40^\circ$
- $Q=\cot(760^\circ)\cdot\text{sen}(450^\circ)$
  $Q=\cot(720^\circ+40^\circ)\cdot 1 \ \rightarrow\ Q=\cot 40^\circ$
- $R=\tan(1125^\circ)\cdot\sec(720^\circ)$
  $R=\tan(1080^\circ+45^\circ)\cdot 1 \ \rightarrow\ R=\tan 45^\circ=1$



Se cumple que

$\cot 40^\circ > 1 > \tan 40^\circ$

$\therefore\ Q>R>P$

Respuesta: $Q>R>P$

PREGUNTA N.º 39

Sea $f\colon \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=2\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}-x\right)+4\cdot\cos(x).$$

Determine el rango de f.

A) $\left[-4; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

B) $\left[-4; \frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

C) $\left[-4; \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

D) $\left[-2; \sqrt{3}\right\rangle$

E) $\left[-2; 2\sqrt{3}\right\rangle$

Resolución

Tema: Funciones trigonométricas directas

Análisis y procedimiento

Nos piden el Ran$f$.

Dato:

$$f(x)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\cos x;\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$$

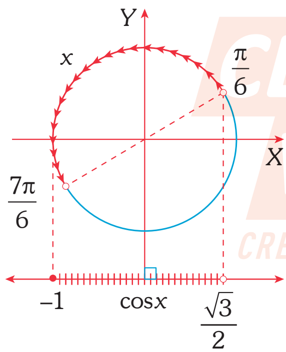
$$f(x)=2\,\text{sen}^2 x+4\cos x$$

$$f(x)=2\left(1-\cos^2 x\right)+4\cos x=2-2\cos^2 x+4\cos x$$

Completamos cuadrados.

$$f(x)=4-2(\cos x-1)^2$$

Analizamos en la circunferencia trigonométrica.



Del gráfico

$$-1\leq\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-2\leq\cos x-1<\frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

$$4\geq(\cos x-1)^2>\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$

$$-8\leq-2(\cos x-1)^2<\frac{4\sqrt{3}-7}{2}$$

$$-4\leq-2(\cos x-1)^2+4<\frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

$$-4\leq f(x)<\frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \text{Ran}f=\left[-4;\ \frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right\rangle$$

Respuesta: $\left[-4;\ \frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

PREGUNTA N.° 40

Si $\tan(x)+\cot(x)=\frac{5}{2}$ y $M=\frac{\text{sen}(45+x)}{\text{sen}(135+x)}$, calcule M^2.

A) 2 B) 9 C) 16
D) 25 E) 36

Resolución

Tema: Identidades trigonométricas

Por identidades trigonométricas del ángulo doble se cumple que $\tan\theta+\cot\theta=2\csc 2\theta$.

Análisis y procedimiento

Por dato

$$\tan x+\cot x=\frac{5}{2}\ \rightarrow\ 2\csc 2x=\frac{5}{2}\ \rightarrow\ \text{sen}\,2x=\frac{4}{5}$$

Nos piden M^2.

$$M=\frac{\text{sen}(45°+x)}{\text{sen}(135°+x)}=\frac{\text{sen}\,45°\cos x+\cos 45°\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,135°\cos x+\cos 135°\,\text{sen}\,x}$$

$$\rightarrow\ M=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\text{sen}\,x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\text{sen}\,x)}=\frac{\cos x+\text{sen}\,x}{\cos x-\text{sen}\,x}$$

Elevamos al cuadrado.

$$M^2=\frac{1+\text{sen}\,2x}{1-\text{sen}\,2x}=\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}$$

$$\therefore\ M^2=9$$

Respuesta: 9