Superficie de un sector circular

¿Te imaginas una casa con paredes curvas, donde no existan esquinas? La sensación que produce este diseño a tus sentidos, ¿será agradable? hoy en día los diseños ya no son rectos, ¿a qué crees que se deba?

Viviendas circulares

Geométricamente y constructivamente, la figura circular es la más sencilla de describir y trazar, según Euclides. En principio, para delinear una circunferencia e incluso una estructura concéntrica no se necesitan conocimientos complicados.

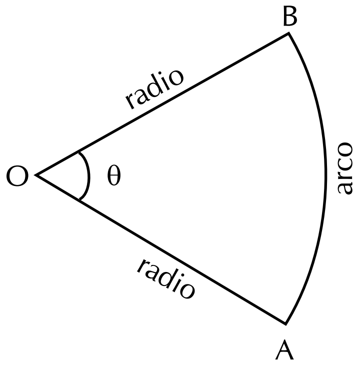
Estas casas buscan cumplir con las demandas de funcionalidad, confort y valor que pide el mercado. A pesar de que habitualmente no se le toma en cuenta, las casas circulares proveen de esas características y más. Las personas deciden construir una casa redonda por múltiples razones.

En algunos casos, es porque simplemente les gusta la apariencia en contraste a las típicas casas en forma de caja, hay quienes tratan de expresar su individualidad y no ven que lo pueden lograr a través de un diseño convencional de vivienda. Hay propietarios motivados por la vista panorámica que se logra con una casa circular. También hay quienes buscan la eficiencia en el consumo de energía o una casa de ambiente amigable.

Conceptos básicos

Cálculo de la superficie de un sector circular

Se denomina sector circular a la figura geométrica, porción de círculo, comprendida entre un arco de circunferencia y sus respectivos radios delimitadores.



$$S=\frac{1}{2}.\theta.R^2$$

Donde:

S = Superficie del sector circular AOB

θ = Número de radianes del ángulo central correspondiente a dicho arco.

R = radio de la circunferencia.

Observación

Primera parte: Para determinar la superficie de un sector circular de la expresión anterior, podemos deducir:

$$S=\frac{1}{2}.L.R \qquad S=\frac{1}{2}.\frac{L^2}{\theta}$$

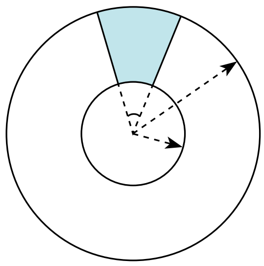
Segunda parte: El ángulo central del sector circular se halla en el siguiente intervalo:

$$0<\theta\leq 2\pi$$

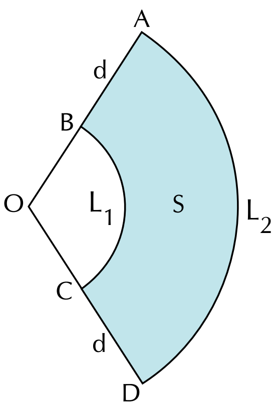
Trapecio circular

Es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas y dos radios.
Para el trapecio circular los elementos que intervienen son:

- El arco mayor
- El arco menor
- La separación entre ambos arcos



Cálculo de la superficie de un trapecio circular



Para determinar la superficie del trapecio circular basta restar el sector circular mayor y el sector circular menor, deduciéndose la siguiente relación:

$$S=\left(\frac{L_1+L_2}{2}\right)\times d$$

Donde:

S = superficie del trapecio circular
L_1 = longitud del arco menor
L_2 = longitud del arco mayor
d = separación entre ambos arcos

Síntesis teórica

Superficie de un sector circular

conociendo — Ángulo central y radio — fórmula — $S = \frac{1}{2} . \theta . R^2$

conociendo — Longitud del arco y radio — fórmula — $S = \frac{1}{2} LR$

conociendo — Longitud del arco y ángulo central — fórmula — $S = \frac{L^2}{2\theta}$

Problemas resueltos

1. Se tiene un sector circular cuyo ángulo central mide 45° y su radio 8 cm. ¿Cuál es su superficie?

Resolución

Datos:

Ángulo central = 45°

Radio = 8 cm

Superficie del sector = ¿?

"No olvidemos que el ángulo central debe estar en radianes"

Entonces:

$$S = \frac{1}{2} \theta R^2 \rightarrow S = \frac{1}{2} . 45° . \frac{\pi}{180°} . (8)^2 \rightarrow S = 8\pi \text{ cm}^2$$

2. En un sector circular, la longitud de arco mide $\frac{\pi}{4}$cm y el ángulo central mide 30°. ¿Cuál es la superficie del sector?

Resolución

Datos:

Longitud del arco = $\frac{\pi}{4}$cm

Ángulo central = 30°

Superficie del sector = ¿?

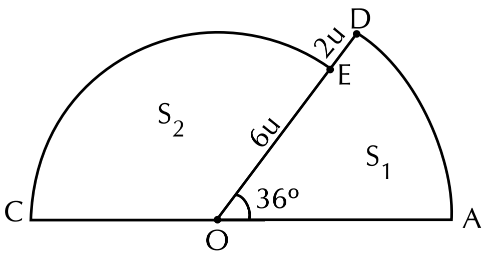
Además:

$$L = \theta . R \rightarrow \frac{\pi}{4} = 30° . \frac{\pi}{180°} . R \rightarrow R = \frac{3}{2}$$

Entonces:

$$S = \frac{1}{2} \theta R^2 \rightarrow S = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \ \frac{\pi}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow . \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow S = \frac{3\pi}{16} \text{cm}^2$$

3. Del gráfico, determinar: $H=\dfrac{S_1}{S_2}$



Resolución

Sector: AOD

Ángulo $= 36º.\dfrac{\pi}{180º}$

Radio $= 8$

Superficie del sector $=$ ¿?

$$\rightarrow\ S_1=\frac{1}{2}.36º.\frac{\pi}{180º}.(8)^2$$

Sector: COE

Ángulo $= (180º-36º)\dfrac{\pi}{180º}$

Radio $= 6$

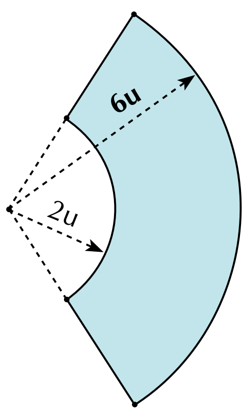
Superficie del sector $=$ ¿?

$$\rightarrow\ S_2=\frac{1}{2}.144º.\frac{\pi}{180º}.(6)^2$$

Reemplazando en la pregunta:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}.36º.\frac{\pi}{180º}.(8)^2}{\frac{1}{2}.144º.\frac{\pi}{180º}.(6)^2}\rightarrow\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{9}$$

4. En la figura mostrada, determinar la superficie de la región sombreada, cuyo ángulo central es de 120º



Resolución

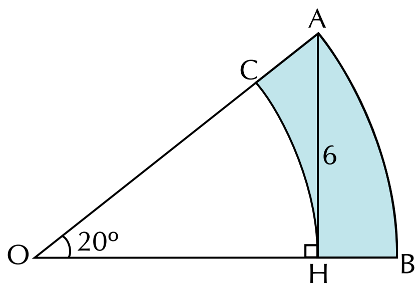
$$S_x = S_{mayor} - S_{menor}$$

$$S_x = \frac{1}{2}.120º.\frac{\pi}{180º}.(6)^2-\frac{1}{2}.120º.\frac{\pi}{180º}.(2)^2$$

$$S_x=\frac{32\pi}{3}u^2$$

5. Del gráfico, determinar la superficie de la región sombreada.

Resolución



Para determinar la región sombreada podemos interpretarlo como:

$$S_{sombreado}=S_{AOB}-S_{COH}\rightarrow S_{sombreado}=$$

$$\frac{1}{2}.20º.\frac{\pi}{180º}.(OA)^2-\frac{1}{2}.20º.\frac{\pi}{180º}.(OH)^2$$

Factorizando la parte común:

$$S_{sombreado}=\frac{1}{2}.20º.\frac{\pi}{180º}.[(OA)^2-(OH)^2]\ ;$$

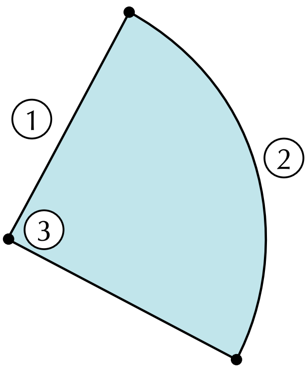
pero: $(OA)^2-(OH)^2=(6)^2$ ..... por Pitágoras

Entonces: $S_{sombreado}=\dfrac{1}{2}.20º.\dfrac{\pi}{180º}.[6^2]\ \rightarrow$

$$S_{sombreado}=2\neq u^2$$

Aplica lo comprendido

1. Indica las correspondientes parejas mediante flechas según el gráfico.

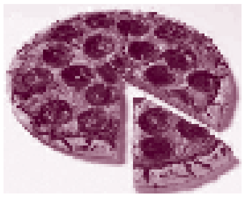


- ① Longitud de arco
- ② Ángulo central
- ③ Radio

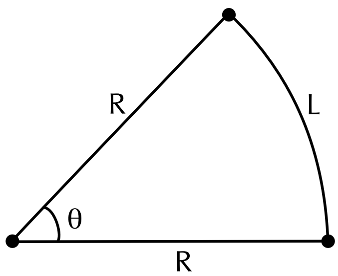
2. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda, de acuerdo al uso de la fórmula de la superficie de un sector circular.

- El ángulo central está en grados sexagesimales .... (   )
- El ángulo central puede ser mayor que una vuelta .... (   )
- El ángulo central debe expresarse en radianes .... (   )

3. En la figura mostrada, ¿cuántos sectores circulares observas?

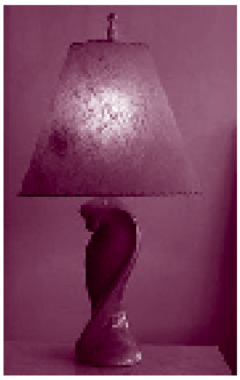


4. ¿Cuál de las siguientes expresiones indica el perímetro del sector circular?. (Marcar con un aspa)



- ○ $R + R + \theta$
- ○ $R^2 + L$
- ○ $R + R + L$

5. La pantalla de esta lámpara es cortada por uno de sus bordes y colocada sobre una mesa. ¿Qué forma geométrica posee la pantalla?



Aprende más...

1. En un sector circular, el ángulo central mide 45° y el radio 8 u. ¿Cuál es su área?

a) πu^2 b) 4π c) 8π
d) 6π e) 2π

2. En un sector circular, el ángulo central mide 30^g y el radio 10 u. ¿Cuál es su área?

a) $30\pi u^2$ b) 15π c) $\frac{15\pi}{2}u^2$
d) 24π e) $\frac{5\pi}{2}u^2$

3. En un sector circular, el arco mide 2πcm y su radio 13u. ¿Cuál es su área?

a) $11\pi u^2$ b) 12π c) 13π
d) 10π e) 14π

4. En un sector circular, el arco mide $\frac{\pi}{4}$ cm y su ángulo central mide 30°. ¿Cuál es su área?

a) $\frac{3\pi}{16}cm^2$ b) $\frac{3\pi}{8}$ c) $\frac{3\pi}{4}$
d) 2π e) $\frac{2\pi}{3}$

5. En un sector circular, el arco mide $\frac{\pi}{3}$ cm y su ángulo central mide 60°. ¿Cuál es su área?

a) $\frac{\pi}{2}cm^2$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

6. En un sector circular, el área es $40u^2$. Si duplicamos el radio y reducimos el ángulo central en su mitad, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

a) $80u^2$ b) 20 c) 10
d) 15 e) 40

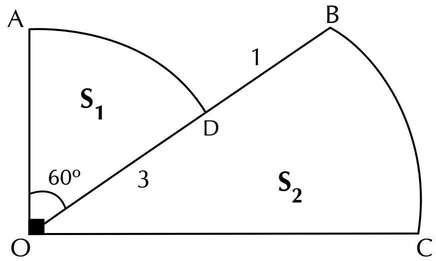
7. En un sector circular, el área es $10u^2$. Si el ángulo central se triplica y el radio se duplica, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

a) $40u^2$ b) 60 c) 90
d) 120 e) 180

8. En un sector circular, el área es 36 cm^2. Si el ángulo central se reduce a la mitad y el radio se triplica, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

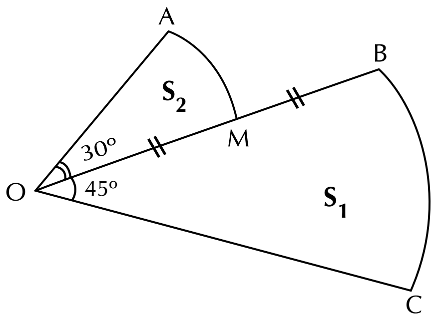
a) 36 cm^2 b) 96 c) 72
d) 144 e) 162

9. Del gráfico, calcular: $M=\frac{S_1}{S_2}$



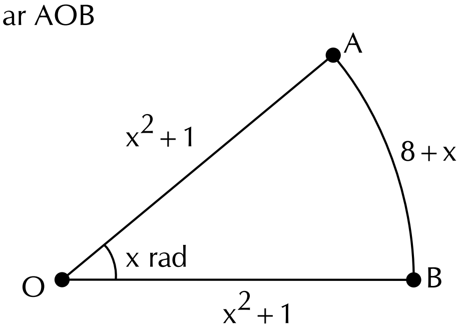
a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{9}{8}$

10. Del gráfico, calcular: $M=\frac{S_1}{S_2}$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

11. En el gráfico mostrado, señala el área del sector circular AOB



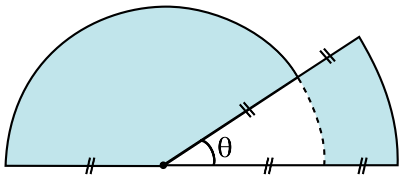
a) 25 b) 40 c) 45
d) 50 e) 75

12. Se tiene un sector circular de radio "R" y ángulo central de 36°. Si se reduce el ángulo central en 11° y el radio se incrementa en "x", de modo que el área del nuevo sector generado es igual a la del sector original. Hallar "x"

a) $\frac{R}{2}$ b) $\frac{R}{4}$ c) $\frac{R}{5}$

d) $\frac{R}{6}$ e) $\frac{R}{9}$

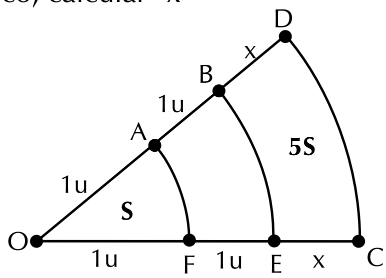
13. Si las áreas de las regiones sombreadas son iguales, calcular "θ"



a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{20}$ c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{5}$

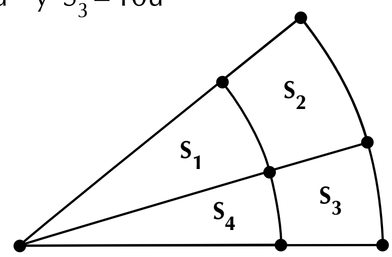
14. Del gráfico, calcular "x"



a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2

d) $\frac{5}{2}$ e) 4

15. Del gráfico mostrado, calcular "S_4", si: $S_1 = 4u^2$; $S_2 = 8u^2$ y $S_3 = 10u^2$



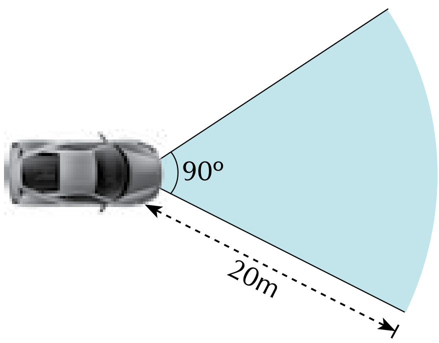
a) 5 u^2 b) 6 c) 8

d) 7 e) 9

Aplicación de la matemática a situaciones cotidianas

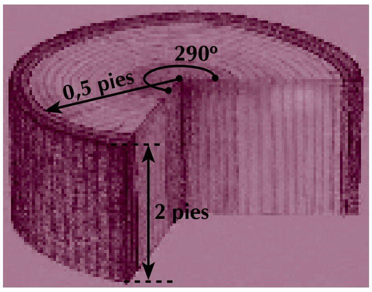
16. **Conduciendo de noche**

Los faros de un automóvil iluminan un sector, como se muestra en la figura. Determínese la superficie de la región iluminada.



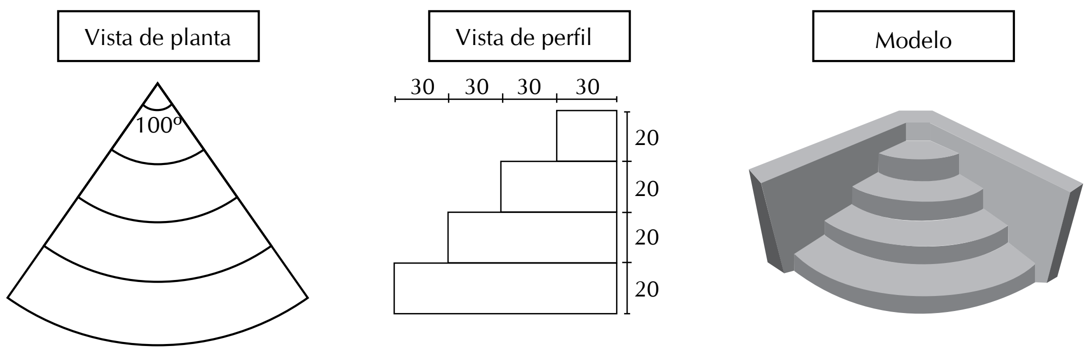
17. **Sacando cálculos**

El costo del pie cúbico de madera es de 5 nuevos soles. ¿Cuál es el costo del pedazo de tronco de la figura?



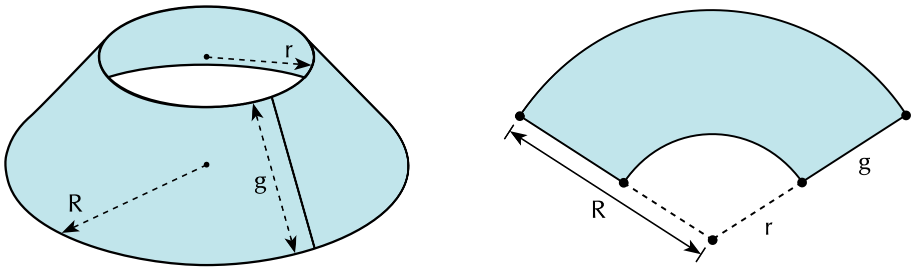
18. **A pintar la escalera**

Se desea pintar la escalera de la piscina. ¿Qué cantidad de pintura debo usar, si un bote alcanza para $20m^2$? (En el gráfico las unidades están en centímetros)



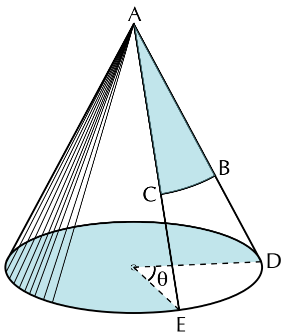
¡Tú puedes!

1. Si en un tronco de cono circular recto; los radios de sus bases y su generatriz suman 8 cm, ¿cuál es el máximo valor del área lateral del tronco de cono?



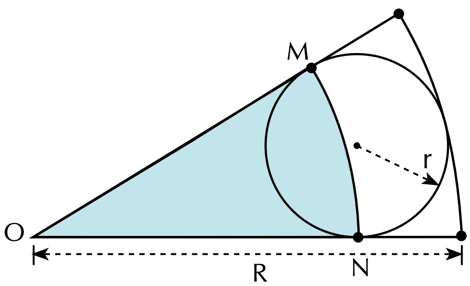
a) 20π a) 16π a) 23π b) 24π c) 25π

2. En el siguiente gráfico, se tiene un cono en el cual se cumple que el área de la región sombreada en la base, es el doble del área de la superficie sombreada sobre el cono. Calcular "θ", si además el perímetro de la base es a la altura como ≠ es a $\sqrt{10}$ y $AB = 2BD$



a) $\frac{\pi}{8}$ rad b) $\frac{\pi}{9}$ c) $\frac{2\pi}{9}$ d) $\frac{3\pi}{8}$ e) $\frac{\pi}{4}$

3. Del gráfico, obtener el área de la región sombreada, si la longitud del arco MN es igual al perímetro de la circunferencia.

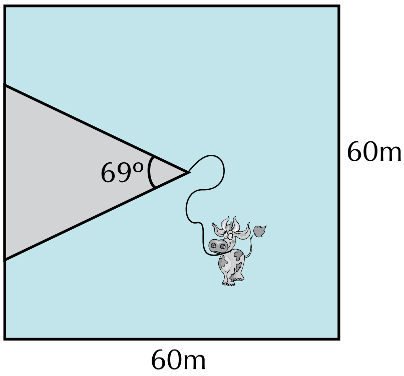


a) $\pi r(R-2r)$ b) $\pi r(R+2r)$ c) $\pi r(R-r)$ d) $\pi r(r-2R)$ e) $\pi r\sqrt{R(R-2r)}$

4. Se tiene un sector circular cuyo ángulo central mide 120° y su radio igual a "R". Si duplicamos el radio de este sector y disminuimos su ángulo central en "θ" se obtiene un nuevo sector cuya área es el triple del área del sector original, de acuerdo a esto obtenga el valor de "θ"

a) 30° b) 40° c) 50° d) 60° e) 70°

5. Un granjero coloca su vaca en un campo como el de la figura. Si la longitud de la cuerda es de 20m, calcular la mayor cantidad de superficie de pasto que puede comer la vaca.



a) $30{,}3\pi$
b) $31{,}3\pi$
c) $32{,}3\pi$
d) $33{,}3\pi$
e) $34{,}3\pi$

Practica en casa

1. En un sector circular, el ángulo central mide 40º y el radio 9 u. ¿Cuál es el área?

2. En un sector circular, el arco mide $4\neq$ cm y su radio 7 u. ¿Cuál es su área?

3. En un sector circular, el ángulo central mide 40^g y el arco 4π cm. ¿Cuál es el área?

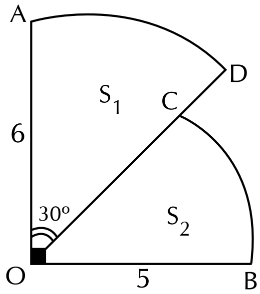
4. En un sector circular, el ángulo central mide 36º y el radio mide $4\sqrt{5}$ cm. Calcular el área del sector.

5. En un sector circular, el área es 12 cm^2. Si el ángulo central se duplica y el radio se triplica, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

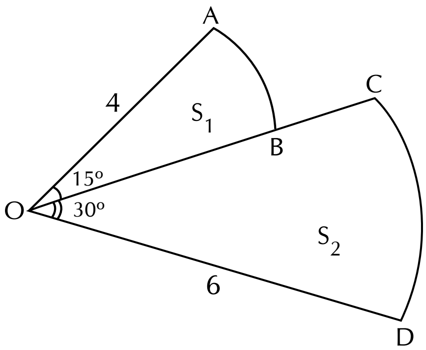
6. En un sector circular, el área es 48 cm^2. Si el ángulo central se reduce a su tercera parte y el radio se duplica, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

7. En un sector circular, el área es $30u^2$. Si triplicamos el radio y reducimos el ángulo central a su quinta parte, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

8. Del gráfico, calcular: $M=\dfrac{S_1}{S_2}$

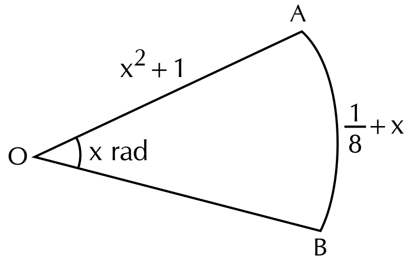


9. Del gráfico, calcular: $M=\dfrac{S_1}{S_2}$

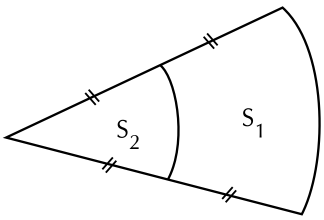


10. Se tiene un sector circular de radio "R" y ángulo central de 49º. Si se reduce el ángulo central en 13º y el radio se incrementa en "x", se genera un nuevo sector circular cuya área es igual a la del sector original. Calcular "x".

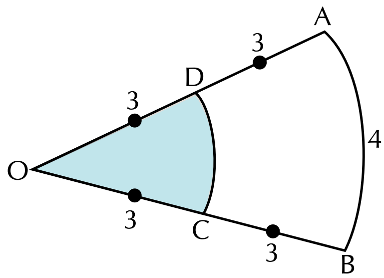
11. En el gráfico mostrado, señala el área del sector circular AOB.



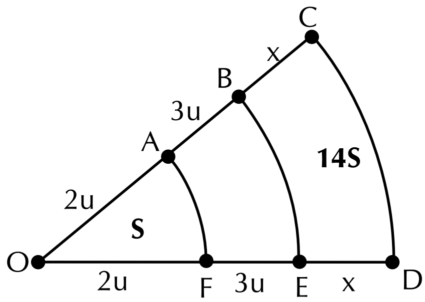
12. Del gráfico, calcular: $\frac{S_2}{S_1}$



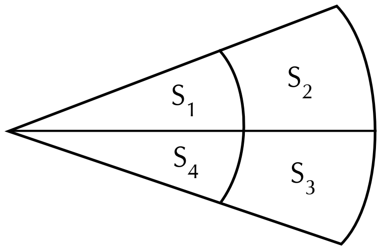
13. Calcular el área de la región sombreada.



14. Del gráfico, calcular "x"



15. Del gráfico mostrado, calcular "S_4", si: $S_1=18u^2$; $S_2=6u^2$ y $S_3=5u^2$



Miscelánea

¿Cómo sacar el máximo provecho en el aula?

Observa, escucha y toma nota. Observa atentamente lo que escribe el profesor en la pizarra y escúchalo con atención porque si pierdes algún paso de la explicación, te confundirás y no comprenderás lo explicado. Si te distraes: mirando por la ventana, charlando con tu compañero, pensando en la hora, jugando con tu celular, etc., perderás el tiempo. También debes tomar apuntes necesarios, no todo. Debes guiarte por expresiones como: "El punto siguiente es muy importante...", "Asegúrense de recordar que..." "No olviden este detalle...", etc.

Lee cinco o diez minutos antes que el profesor aborde un nuevo tema, pues te ayudará a comprender. Debes anotar también los puntos que no entiendes durante la lectura previa para que el profesor te los aclare.

Aprende más...

1. En un sector circular, la longitud del arco es 4π cm y el ángulo central mide 50^g. ¿Cuánto mide su radio?

   a) 14 cm   b) 15   c) 16
   d) 12   e) 8

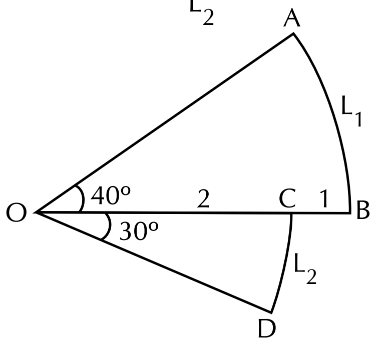
2. En un sector circular, el radio y el arco están representados por dos números enteros consecutivos. Si el perímetro del sector es 13 cm, ¿cuánto mide el ángulo central de dicho sector?

   a) 1,5 rad   b) 1,2   c) 1,25
   d) 1,6   e) 1,3

3. En un sector circular, el ángulo central mide 40^g y su arco correspondiente "L_1". Si aumentamos el ángulo central en 9° y duplicamos el radio, el nuevo arco sería "L_2". Calcular: $\frac{L_1}{L_2}$

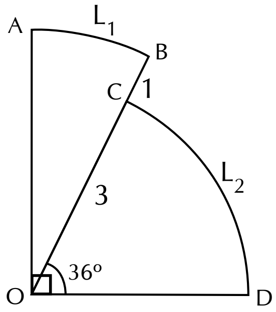
   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$
   d) $\frac{1}{2}$ e) 1

4. En el gráfico, calcular : $\frac{L_1}{L_2}$



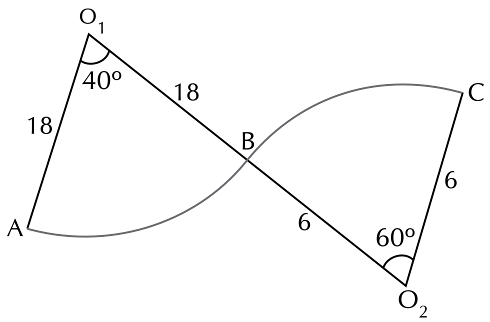
   a) 1, 6 cm   b) 1,8   c) 2
   d) 2,5   e) 2,6

5. En el gráfico, calcular: $\frac{L_1}{L_2}$



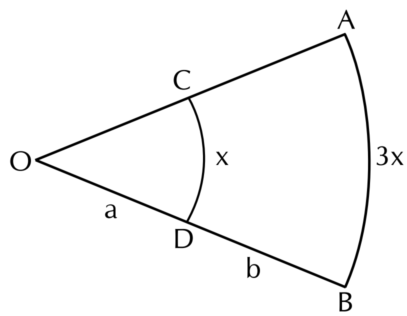
   a) 1   b) 2   c) 3
   d) 4   e) 5

6. En la figura se muestra un camino que consta de dos arcos con sus datos claramente indicados. Determina la longitud de dicho camino.



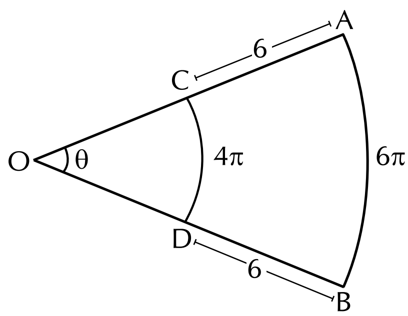
   a) 2π b) 4π c) 6π
   d) 8π e) 10π

7. De la figura, hallar: $\frac{a}{b}$



   a) 1   b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$
   d) 2   e) $\frac{1}{3}$

8. Del gráfico, calcular "θ"



   a) $\frac{\pi}{3}$rad   b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{9}$
   d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{5}$

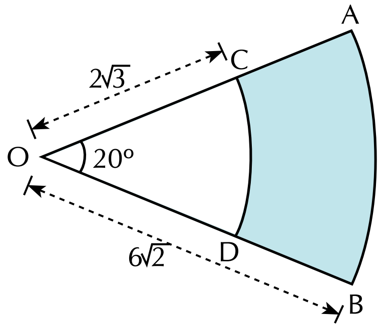
9. En un sector circular, el ángulo central mide 50^g y su radio 8 cm. ¿Cuál es su área?

a) π cm^2 b) 4π c) 8π
d) 6π e) 2π

10. En un sector circular, el área es 20 cm^2. Si triplicamos el radio y el ángulo central se reduce a la mitad, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

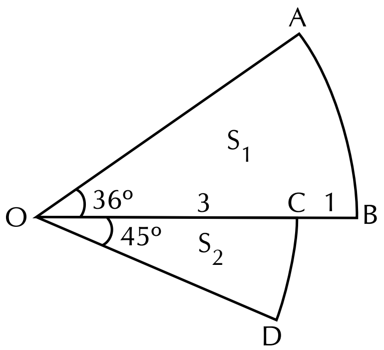
a) 40 cm^2 b) 80 c) 160
d) 45 e) 90

11. A partir del gráfico mostrado, calcular el área de la región sombreada.



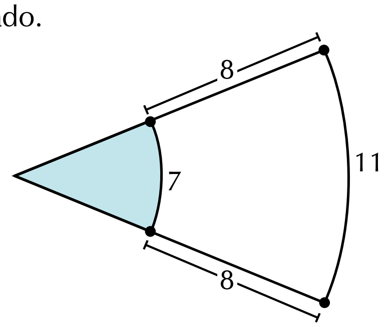
a) 10π b) $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{10\pi}{3}$
d) 30π e) 5π

12. De acuerdo al gráfico, calcular: $\frac{S_1}{S_2}$



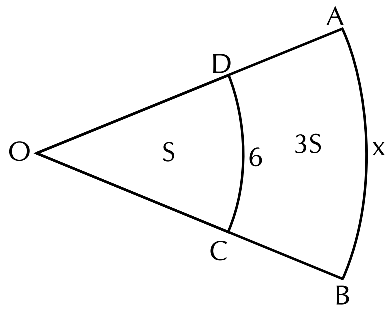
a) $\frac{15}{8}$ b) 2 c) $\frac{21}{8}$
d) $\frac{64}{45}$ e) $\frac{15}{16}$

13. De la figura, hallar el área del sector circular sombreado.



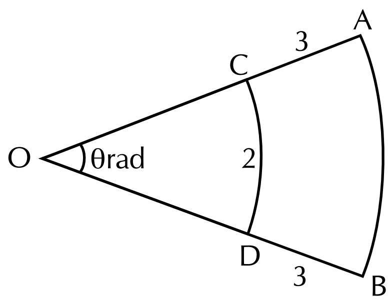
a) 36 cm^2 b) 40 c) 42
d) 49 e) 56

14. Del gráfico, calcular "x"



a) 8 b) 9 c) 12
d) 15 e) 18

15. Si en el gráfico, AOB es un sector circular al igual que COD, calcular "θ" cuando la longitud del arco AB tome su máximo valor entero.



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

Practica en casa

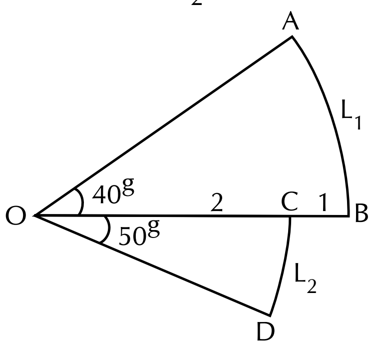
1. Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de 75º en una circunferencia de 24 m de radio.

2. En un sector circular, el ángulo central mide 70^g y el radio 40 m. ¿Cuánto mide el arco?

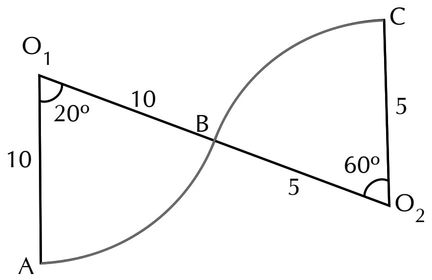
3. En un sector circular, el radio y el arco están representados por dos números enteros consecutivos. Si el perímetro del sector es 16 cm, ¿cuánto mide el ángulo central de dicho sector?

4. En un sector circular, el arco mide 80 cm. Si el ángulo central se reduce a su tercera parte y el radio se triplica, se genera un nuevo sector circular cuyo arco mide:

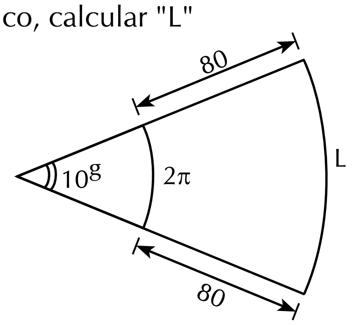
5. En el gráfico, calcular: $\frac{L_1}{L_2}$



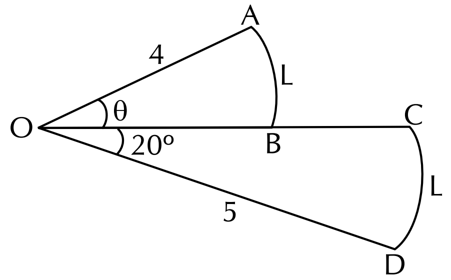
6. En la figura se muestra un camino que consta de dos arcos con sus datos claramente indicados. Determina la longitud de dicho camino.



7. En el gráfico, calcular "L"



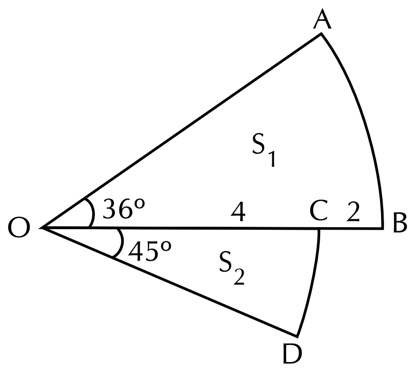
8. Del gráfico, calcular "θ".



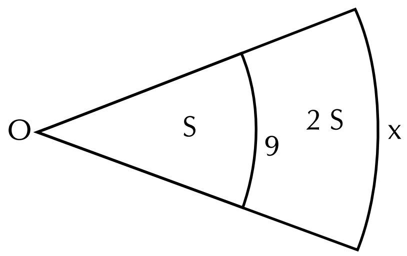
9. En un sector circular, el ángulo central mide 40^g y el radio 10 cm. ¿Cuál es su área?

10. El área de un sector circular es $3\neq cm^2$. Si duplicamos el radio y triplicamos el arco, se genera un nuevo sector circular cuya área es:

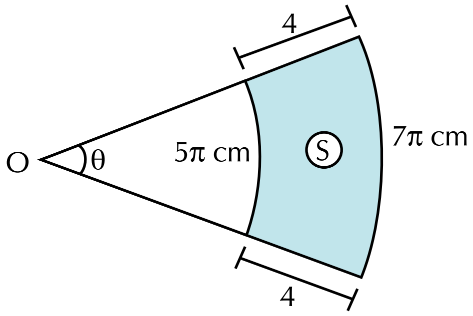
11. De acuerdo al gráfico, calcular: $\frac{S_1}{S_2}$



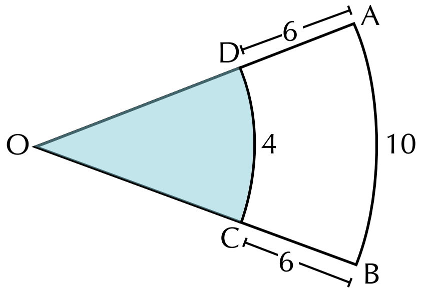
12. Del gráfico, calcular "x"



13. Del gráfico, calcular el área sombreada.



14. De la figura, hallar el área del sector circular sombreado.



15. Se tiene un sector circular de área "S", si se disminuye el arco en 20% y se aumenta el radio en 40%, entonces el área del nuevo sector es: